Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

NICOLAS BERGERON

Propriétés de Lefschetz dans la cohomologie de certaines variétés arithmétiques : le cas des surfaces modulaires de Hilbert

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 21 (2002-2003), p. 75-101

<http://www.numdam.org/item?id=TSG_2002-2003__21__75_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
Volume **21** (2003) 75–101

PROPRIÉTÉS DE LEFSCHETZ DANS LA COHOMOLOGIE DE CERTAINES VARIÉTÉS ARITHMÉTIQUES : LE CAS DES SURFACES MODULAIRES DE HILBERT

Nicolas BERGERON

Abstract

We first state new conjectures, of "Lefschetz type", on the relationships between the (co-)homology of arithmetic real and complex hyperbolic manifolds and the (co-) homology of their totally geodesic subspaces. These conjectures were discussed in the talk and we refer to [3] and [4] for more details and partial proofs. The rest of this paper illustrates part of the techniques of [4] in the much simpler case of Hilbert modular surfaces. In particular we prove that each totally geodesic immersed torus in a Hilbert modular surface can be lifted in a finite cover to an embedded torus which represents a non trivial cohomology class.

1. Introduction

Dans l'exposé oral on a énoncé des conjectures "de type Lefschetz" sur la cohomologie des variétés hyperboliques réelles et complexes arithmétiques. Dans [5] et [4] avec Clozel et dans [3], ces conjectures sont ramenés à des conjectures largement admises en théorie des formes automorphes (cas particulier des conjectures d'Arthur). Un certain nombre de résultats partiels sont également inconditionnellement démontrés dans [4] et [3]. Nous ne reviendrons pas sur les résultats démontrés dans ces deux articles, notre but ici est d'illustrer une partie des outils employés dans [4] et [3], en démontrant un résultat laissé en suspend dans [3] qui concerne la cohomologie des surfaces modulaires de Hilbert. Mais afin de motiver la suite en plaçant les résultats dans un cadre général naturel, commençons par énoncer les conjectures mentionnés ci-dessus.

Soit $\mathbb{G}$ un groupe algébrique simple et connexe sur $\mathbb{Q}$ tel que

– $\mathbb{G}(\mathbb{R})$ soit un groupe de Lie semi-simple;

2000 Mathematics Subject Classification: 11F75.

– $\mathbb{G}(\mathbb{R})$ soit isomorphe au groupe $SO(n,1)$ (resp. $SU(n,1)$) à des facteurs compacts près.

L'espace symétrique associé au groupe $\mathbb{G}(\mathbb{R})$ est alors l'espace hyperbolique réel (resp. complexe) de dimension réelle (resp. complexe) n, nous le noterons X_G et d_G sa dimension réelle.

Soit K_f un sous-groupe compact-ouvert de $\mathbb{G}(\mathbb{A}_f)$ (où $\mathbb{A}_f$ désigne l'anneau des adèles finis sur $\mathbb{Q}$) tel que le groupe $\Gamma = \mathbb{G}(\mathbb{Q}) \cap K_f$ soit sans torsion. Un tel groupe Γ est appelé *sous-groupe de congruence (sans torsion) de* $\mathbb{G}$ [1]. On appellera *variété hyperbolique réelle (resp. complexe) de congruence* tout quotient de l'espace hyperbolique réel (resp. complexe) X_G par un sous-groupe de congruence (sans torsion) Γ de $\mathbb{G}$ comme ci-dessus.

D'après un théorème classique de Borel et Harish-Chandra, une variété hyperbolique réelle (resp. complexe) de congruence est toujours de volume fini et est compacte si et seulement si le groupe $\mathbb{G}$ est anisotrope sur $\mathbb{Q}$.

Une première conjecture concernant l'homologie des variétés hyperboliques réelles ou complexes de congruence s'énonce comme suit. Précisons que tous les groupes de (co-)homologie que nous considèrerons dans cet article seront à coefficients rationnels.

Conjecture A *Soit M une variété hyperbolique réelle (resp. complexe) de congruence de dimension m. Soit F une sous-variété réelle (resp. complexe) compacte connexe totalement géodésique immergée dans M. Alors, il existe un revêtement fini de congruence $\hat{M}$ de M tel que :*

1. *l'immersion de F dans M se relève en un plongement de F dans $\hat{M}$,*
2. *l'application induite :*
$$H_p(F) \to H_p(\hat{M})$$
est injective pour tout entier $p \geqslant \frac{m}{2}$.

La conjecture A est à comparer avec les propriétés de Lefshetz pour les variétés hyperboliques complexes de congruence mises en évidence par Oda [12], Harris et Li [7] et Venkataramana [14]. Ces propriétés s'énoncent plus facilement dans le langage de Harris et Li et Venkataramana que l'on rappelle ci-dessous.

Soient $\mathbb{H} < \mathbb{G}$ deux groupes algébriques sur $\mathbb{Q}$ comme plus haut et que l'on suppose *anisotropes* sur $\mathbb{Q}$ et tous deux du même type, orthogonal ou unitaire. L'inclusion $\mathbb{H} \subset \mathbb{G}$ induit un plongement totalement géodésique naturel $X_H \to X_G$ entre les espaces symétriques associés.

Soit K_f un sous-groupe compact-ouvert de $\mathbb{G}(\mathbb{A}_f)$ tel que le groupe $\Gamma = \mathbb{G}(\mathbb{Q}) \cap K_f$ soit sans torsion. Désignons par Γ_H l'intersection de Γ avec $H(\mathbb{Q})$. On obtient ainsi une application lisse :
$$j = j(\Gamma) : \Gamma_H \backslash X_H \to \Gamma \backslash X_G$$

1. Lorsque $\mathbb{G}$ est défini sur $\mathbb{Z}$, on peut préférer considérer les sous-groupes Γ de $G(\mathbb{Z})$ sans torsion et contenant un sous-groupe de la forme $\ker(G(\mathbb{Z}) \to G(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}))$ pour un certain entier $N \geqslant 1$.

pour chaque sous-groupe de congruence sans torsion de $\mathbb{G}(\mathbb{Q})$. On obtient ainsi une application naturelle

$$j_* : H_*(\Gamma_H \backslash X_H) \to H_*(\Gamma \backslash X_G). \tag{1}$$

Remarquons que si g est un élément quelconque de $\mathbb{G}(\mathbb{Q})$, on peut translater l'immersion j en une application lisse

$$j_g = j_g(\Gamma) : (\mathbb{H}(\mathbb{R}) \cap g^{-1}\Gamma g) \backslash X_H \to \Gamma \backslash X_G.$$

On appelle *application de restriction stable*, l'application

$$H^*(\Gamma \backslash X_G) \to \prod_{g \in \mathbb{G}(\mathbb{Q})} H^*((\mathbb{H}(\mathbb{R}) \cap g^{-1}\Gamma g) \backslash X_H) \tag{2}$$

induite en cohomologie par la famille d'applications $(j_g)_{g \in \mathbb{G}(\mathbb{Q})}$.

On va s'intéresser aux applications 1 et 2 *stablement, i.e.* à revêtements fini (de congruence) près. Soient donc $\Gamma' \subset \Gamma$ deux sous-groupes de congruence sans torsion de $\mathbb{G}(\mathbb{Q})$. Alors le revêtement fini (de variétés compactes)

$$\Gamma' \backslash X_G \to \Gamma \backslash X_G$$

induit, en homologie, une application surjective

$$H_*(\Gamma' \backslash X_G) \to H_*(\Gamma \backslash X_G) \tag{3}$$

et, en cohomologie, une application injective

$$H^*(\Gamma \backslash X_G) \to H^*(\Gamma' \backslash X_G). \tag{4}$$

On obtient ainisi un système projectif (resp. inductif) de groupes d'homologie (resp. de cohomologie) indexé par les sous-groupes de congruence de $\mathbb{G}(\mathbb{Q})$. On désigne par $H_*(Sh^0 G)$ la limite projective du système (3) et par $H^*(Sh^0 G)$ la limite inductive du système (4). En passant à la limite, lorsque Γ varie, dans (1) et (2), on obtient les applications naturelles :

$$H_*(Sh^0 H) \to H_*(Sh^0 G)$$

et

$$H^*(Sh^0 G) \to \prod_{g \in \mathbb{G}(\mathbb{Q})} H^*(Sh^0 H).$$

Rappelons que les théorèmes de Lefschetz permettent d'étudier la topologie d'une variété projective complexe par récurrence, en la coupant par un hyperplan de l'espace projectif. Un yoga semblable, mais moins fort, existe pour les variétés hyperboliques complexes de congruence. Il a été dégagé par Harris et Li [7] et prouvé par Venkataramana : *si $\mathbb{H} \subset \mathbb{G}$ sont deux groupes comme ci-dessus de type unitaire alors l'application naturelle*

$$H^i(Sh^0 G) \to \prod_{g \in \mathbb{G}(\mathbb{Q})} H^i(Sh^0 H)$$

est injective pour tout entier naturel $i \leqslant \frac{d_H}{2}$. De manière plus surprenante, on s'attend à ce que l'énoncé analogue dans le cas hyperbolique réel soit également vérifié[2]. Autre-

2. Voir [3] pour des motivations.

ment dit on conjecture :

Conjecture B *Soient* $\mathbb{H} \subset \mathbb{G}$ *comme plus haut. Alors pour tout entier* $i \leqslant \frac{d_H}{2}$, *l'application naturelle*

$$H^i(Sh^0G) \to \prod_{g \in \mathbb{G}(\mathbb{Q})} H^i(Sh^0H)$$

est injective.

Remarquons que la conjecture A ci-dessus implique la conjecture suivante qui complète le yoga de type Lefschetz :

Conjecture A⁻ *Soient* $\mathbb{H} \subset \mathbb{G}$ *comme plus haut. Alors pour tout entier* $i \geqslant \frac{d_G}{2}$, *l'application naturelle*

$$H_i(Sh^0H) \to H_i(Sh^0G)$$

est injective.

Par dualité, la conjecture A^- implique que l'application naturelle de restriction

$$H^i(Sh^0G) \to H^i(Sh^0H)$$

est surjective.

Il est intéressant de noter que les conjecture A^- et B impliquent une "décomposition de Lefschetz" faible des espaces de cohomologie $H^*(Sh^0G)$; elles impliquent en effet que l'application naturelle

$$H^i(Sh^0G) \to \prod_{g \in \mathbb{G}(\mathbb{Q})} H^{i+d_G-d_H}(Sh^0H)$$

devrait être injective pour tout entier $i \leqslant d_H - \frac{d_G}{2}$. Les méthodes développées par Venkataramana dans [14] permettent de vérifier cette conjecture lorsque G est de type unitaire. Lorsque $d_G - d_H = 2$, la décomposition ainsi obtenue est d'ailleurs assez proche de la décomposition de Lefschetz usuelle des variétés hyperboliques complexes associées. Il est plus surprenant qu'un tel résultat doivent subsister dans le cas des variétés hyperboliques réelles.

Comme il est souligné dans [4], les méthodes développées dans [4] et [3] devraient se généraliser aux groupes algébriques semi-simples généraux. En général les sous-variétés totalement géodésique peuvent être de différentes natures et les différentes applications de restriction et d'inclusions induisent une combinatoire plus riche sur les groupes de (co-)homologie. On ne sait pas même encore énoncer de conjectures analogues aux conjecture A et B. Dans [4] on commence l'étude des variétés de congruence associées aux groupes unitaires $U(p,q)$ que l'on poursuit dans un travail en cours.

Plus modestement, on se propose, dans cet article, d'illustrer une partie des méthodes de [4] en les appliquant au cas des *surfaces modulaires de Hilbert*[3], autrement dit

3. Afin de mieux illustrer ces méthodes il nous arrivera (notamment section 4) de ne pas emprunter le chemin le plus directe.

les variétés de congruence associées au groupe $SO(2,2)$ (ou encore au groupe $SL(2,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R})$).

Soit donc $\mathbb{G}$ un groupe algébrique simple et connexe sur $\mathbb{Q}$ tel que

- $\mathbb{G}(\mathbb{R})$ soit un groupe semi-simple;
- $\mathbb{G}(\mathbb{R})$ soit isomorphe au groupe $SO(2,2)$ à des facteurs compacts près.

L'espace symétrique $\mathbb{X}$ associé au groupe $\mathbb{G}(\mathbb{R})$ est alors isométrique au produit de deux plans hyperboliques : $\mathbb{X} \cong \mathbb{H} \times \mathbb{H}$.

Soit K_f un sous-groupe compact-ouvert de $\mathbb{G}(\mathbb{A}_f)$ (où $\mathbb{A}_f$ désigne l'anneau des adèles finis sur $\mathbb{Q}$) tel que le groupe $\Gamma = \mathbb{G}(\mathbb{Q}) \cap K_f$ soit sans torsion. Un tel groupe Γ est appelé *sous-groupe de congruence (sans torsion) de* $\mathbb{G}$. On appelle *surface modulaire de Hilbert* tout quotient de l'espace $\mathbb{X}$ par un sous-groupe de congruence (sans torsion) Γ de $\mathbb{G}$ comme ci-dessus.

D'après un théorème classique, une surface modulaire de Hilbert est toujours de volume fini; elle est de plus compacte si et seulement si le groupe $\mathbb{G}$ est anisotrope sur $\mathbb{Q}$.

Une surface modulaire de Hilbert a toujours un premier nombre de Betti nul, autrement dit seul le groupe de (co-)homologie de degré 2 (le degré médian) est intéressant à étudier. L'analogue de la conjecture B est donc trivial, le but de ce texte est d'étudier l'analogue de la conjecture A. On montre le théorème suivant.

THÉORÈME 1.1. — *Soit $M = \Gamma \backslash \mathbb{X}$ une surface modulaire de Hilbert et soit une surface $S \subset M$ immergée et totalement géodésique. Alors, il existe un revêtement fini de congruence $\hat{M}$ de M tel que :*

1. *l'immersion de S dans M se relève en un plongement de S dans $\hat{M}$;*
2. *la classe $[S]$ de l'image de S dans $H_2(M)$ est non nulle.*

Remarquons que dans le modèle $\mathbb{X} = \mathbb{H} \times \mathbb{H}$, les formes de Kaehler de chacun des facteurs $\mathbb{H}$ fournissent deux formes différentielles de degré 2 : ω_1 et ω_2. Ces formes sont invariantes par isométries et descendent donc en des formes différentielles fermées sur tout quotient $\Gamma \backslash \mathbb{X}$. Soit M une surface modulaire de Hilbert, c'est en particulier un quotient de X, il est alors bien connu que les formes ω_1 et ω_2 définissent deux classes de cohomologies linéairement indépendantes que l'on notera toujours ω_1 et ω_2. Le deuxième groupe de cohomologie $H^2(M)$ se décompose comme d'habitude en une somme directe :

$$H^2(M) = H^{2,0}(M) \oplus H^{1,1}(M) \oplus H^{0,2}(M),$$

et on peut alors distinguer le groupe de cohomologie primitive :

$$H^2_{\mathrm{pr}}(M) = H^{2,0}(M) \oplus H^{1,1}_{\mathrm{pr}}(M) \oplus H^{0,2}(M),$$

où

$$H^{1,1}(M) = \mathbb{C}\omega_1 \oplus \mathbb{C}\omega_2 \oplus H^{1,1}_{\mathrm{pr}}.$$

Nous verrons à la prochaine section que, outre chacun des deux facteurs $\mathbb{H}$, il y a essentiellement trois types de plans totalement géodésiques dans $\mathbb{X}$, à savoir : la diagonale complexe $\Delta = \{(z,z) \ : \ z \in \mathbb{H}\}$, la diagonale totalement réelle $\tilde{\Delta} = \{(z, -\overline{z}) \ : \ z \in \mathbb{H}\}$ et le plan euclidien $\{(ix,iy) \ : \ x,y > 0\}$. Si l'un des deux premier plan totalement géodésique passe au quotient en une sous-variété compacte de M, il donne lieu à une classe de type $(1,1)$ dont la partie primitive peut-être nulle. Par contre le quotient compact (qui doit etre un tore) d'un plan euclidien dans M donne nécessairement lieu à une classe primitive. Le théorème 1.1 et le fait qu'une surface modulaire de Hilbert contient des tores plats totalement géodésiques (voir l' exemple en fin d'article) permet d'exhiber géométriquement des classes primitives de cohomologie.

En général le but que l'on poursuit dans l'étude des propriétés de Lefschetz est la décomposition des groupes de cohomologie des variétés de congruence, on veut ensuite représenter chaque morceau de cohomologie dans la cohomologie primitive (de degré médian) d'une variété de congruence peut-être différente et même non nécessairement une sous-variété de la variété de départ. L'idée est déjà de comprendre ce que les relations d'inclusions et de restrictions entre groupes de cohomologie de variétés de congruence apportent dans cette direction. Les surfaces modulaires de Hilbert sont de dimension 2, la majorité de la cohomologie est donc primitive, il est néanmoins intéressant de représenter géométriquement des classes primitives.

2. L'espace symétrique associé à $SO(2,2)$

Soient G le groupe réel $SO(2,2)$, $K = G \cap O(2) \times O(2)$ un sous-groupe compact maximal et $\mathbb{X} = G/K$ l'espace symétrique associé. L'espace $\mathbb{X}$ est une variété de dimension 4.

On réalise $\mathbb{X}$ comme

$$\mathbb{X} = \{Z \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \ : \ {}^tZZ < I_2\}$$

où I_2 est la matrice carrée identité de taille 2. Soit $g \in G$, on écrit

$$g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

avec A, B, C et $D \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.

L'action de g sur $\mathbb{X}$ est donnée par

$$gZ = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}, \ Z \in \mathbb{X}, \ g \in G.$$

Soit 0 l'image de l'identité dans $\mathbb{X} = G/K$. Le groupe G agit transitivement sur $\mathbb{X}$ et le groupe d'isotropie $G_0 = K$.

On munit $\mathbb{X}$ de la métrique définie par :

$$(ds)^2 = Tr[(I - Z^tZ)^{-1}dZ(I - {}^tZZ)^{-1}d^tZ].$$

L'espace $\mathbb{X}$ muni de cette métrique est symétrique.

Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{k}$ les algèbres de Lie de G et K respectivement. Notons $\mathfrak{p}$ le supplémentaire orthogonal de $\mathfrak{k}$ dans $\mathfrak{g}$ par rapport à la forme de Killing.

Pour $Z \in \mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, on introduit

$$\xi(Z) = \begin{pmatrix} 0 & Z \\ {}^tZ & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors, $\mathfrak{p} = \{\xi(Z) \quad : \quad Z \in \mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{R})\}$. On identifie $\mathfrak{p}$ avec l'espace tangent $T_0\mathbb{X}$. Pour $Z \in \mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, soit τ_t la courbe $\tau_t = (\exp t\xi(Z)).0$. L'image de $\xi(Z)$ dans $T_0(\mathbb{X})$ est le vecteur tangent $\dot\tau_0$ à τ_t en $t = 0$. La métrique riemannienne est alors donnée par :

$$g_0(\xi(Z),\xi(W)) = Tr(Z\,{}^tW).$$

Pour mieux comprendre la géométrie de l'espace $\mathbb{X}$, on va voir l'algèbre $M_{2,2}(\mathbb{R})$ comme l'algèbre de quaternions

$$Q_{1,1} := \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$$

où $i^2 = j^2 = -k^2 = 1$ et $ij = -ji = k$. On réalise cette identification via l'isomorphisme d'algèbre :

$$q = a + bi + cj + dk \mapsto M(q) = \begin{pmatrix} a+b & c+d \\ c-d & a-b \end{pmatrix}.$$

Comme d'habitude on définit la norme d'un quaternion $q = a + bi + cj + dk$ par $N(q) = a^2 - b^2 - c^2 + d^2$ qui est également égale au determinant de la matrice $M(q)$. Les quaternions de normes 1 s'identifient donc au groupe $SL(2,\mathbb{R})$. L'algèbre des nombres complexes se plonge isomorphiquement dans l'algèbre des quaternions $Q_{1,1}$ via l'application :

$$z = x + \sqrt{-1}y \mapsto x + yk.$$

On retrouve ainsi le plongement du groupe $U(1)$ des nombres complexes de module 1 dans $SL(2,\mathbb{R})$ comme groupe des matrices de rotations. On notera $\overline{q} = a - bi - cj - dk$ le conjugué de q, il est facile de vérifier que $N(q) = q\overline{q} = \overline{q}q$. Enfin, il sera commode de noter $\tilde{q} = a + bi + cj - dk$ ainsi que de voir chaque quaternion q comme $u + iv$ où u et v sont deux nombres complexes plongés dans $Q_{1,1}$ comme ci-dessus. Remarquons que ${}^tM(q) = M(\tilde{q})$ et que $\widetilde{u+iv} = \overline{u} + iv$. Ceci équippe $\mathfrak{p}$ d'une structure presque complexe donnée par la multiplication à droite par le quaternion k. Cette structure presque complexe est intégrable et induit donc une structure complexe sur l'espace $\mathbb{X}$ qui est alors clairement un espace symétrique hermitien. Remarquons que le groupe $O(2) \times O(2)$ agit sur $\mathfrak{p}$ en préservant la structure complexe.

Rappelons maintenant brièvement, comment obtenir l'isomorphisme entre $(SL(2,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R}))/\{(I_2,I_2),(-I_2,-I_2)\}$ et le groupe $O_0(2,2)$ la composante connexe de l'identité dans $O(2,2)$. Notons $Q_{1,1}^1$ le groupe des quaternions de norme 1, rappelons qu'il est isomorphe au groupe $SL(2,\mathbb{R})$. Le groupe $Q_{1,1}^1 \times Q_{1,1}^1$ (et donc $SL(2,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R})$)

agit sur $Q_{1,1}$ de la façon suivante : à chaque couple $(q_1,q_2) \in Q^1_{1,1} \times Q^1_{1,1}$ on associe la transformation $S_{q_1,q_2} : q \mapsto q_1 q \overline{q}_2$ de $Q_{1,1}$. On a alors les propriétés suivantes :

1. L'application S_{q_1,q_2} est linéaire bijective, donc est dans $GL_{\mathbb{R}}(Q_{1,1}) \cong GL(4,\mathbb{R})$ et l'application $S : Q^1_{1,1} \times Q^1_{1,1} \to GL_{\mathbb{R}}(Q_{1,1})$, définie par $S(q_1,q_2) = S_{q_1,q_2}$ est un homomorphisme.
2. L'application S_{q_1,q_2} conserve la norme N, donc est dans $O(N) \cong O(2,2)$.
3. Comme S est continue et $Q^1_{1,1} \times Q^1_{1,1}$ est connexe, on a $S(Q^1_{1,1} \times Q^1_{1,1}) \subset O_0(N) \cong O_0(2,2)$.
4. Calculons le noyau de S : si $S_{q_1,q_2} = Id$, on a pour tout $q \in Q_{1,1}$, $q_1 q \overline{q}_2 = q$. Pour $q = 1$, on trouve $q_1 = q_2$, on voit ensuite que q_1 est central, donc $q_1 = \pm 1 = q_2$. En définitive, on a montré :
$$\operatorname{Ker} S = \{(1,1),(-1,-1)\}.$$
5. L'image de S est $O_0(N)$ tout entier. En effet, soit $g \in O_0(N)$, il y a deux cas :
   - Si on a $g(1) = 1$, puisque l'ensemble des quaternions pures $P_{1,1}$ est l'orthogonal de 1, on a $g(P_{1,1}) = P_{1,1}$ et $g_{|P_{1,1}} \in O_0(2,1)$, en vertu de l'isomorphisme entre $PSL(2,\mathbb{R})$ et $O_0(2,1)$ il existe alors un élément $q \in Q^1_{1,1}$ tel que $g \in S_{q,q}$.
   - Si on a $g(1) = r$, on a $N(r) = N(1) = 1$, donc $r \in Q^1_{1,1}$. On peut alors se ramener au premier cas et obtenir l'existence d'un élément $q \in Q^1_{1,1}$ tel que $g = S_{rq,q}$.

On a donc démontré que l'application quotient
$$\overline{S} : (Q^1_{1,1} \times Q^1_{1,1})/\{(1,1),(-1,-1)\} \to O_0(N)$$
est un isomorphisme. Et donc que le groupe $O_0(2,2)$ est isomorphe au groupe $(SL(2,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R}))/\{(I_2,I_2),(-I_2,-I_2)\}$. L'espace symétrique $\mathbb{X}$ est donc isométrique au produit de deux plans hyperboliques. Nous n'utiliserons pas ce fait dans la suite de cette section.

Notre but maintenant est de classifier les sous-variétés complètes totalement géodésiques de dimension 2 (il n'y en a évidemment pas de dimension 3) dans $\mathbb{X}$.

Commençons par rappeler que si $R(.,.)$ désigne le tenseur de courbure sur $\mathbb{X}$, il découle de [9]; théorème 3.2 chapitre XI, que pour $\xi(X), \xi(Y), \xi(U) \in \mathfrak{p}$, où $\mathfrak{p}$ est identifié à $T_0(\mathbb{X})$, on a :
$$R(\xi(X),\xi(Y))\xi(U) = -[[\xi(X),\xi(Y)],\xi(U)]. \tag{5}$$
Dans la suite, pour simplifier, nous noterons $R(\xi(X),\xi(Y))\xi(U)$, $R(X,Y)U$. Un simple calcul montre alors que :
$$R(X,Y)U = -X^t\, YU - U^t\, YX + Y^t\, XU + U^t\, XY. \tag{6}$$

Rappelons maintenant qu'il découle de [9], théorème 4.3 chapitre XI, qu'il existe une correspondance bijective entre l'ensemble des sous-variétés $\mathbb{Y}$ complètes de dimension 2 totalement géodésiques dans $\mathbb{X}$ passant par 0 et l'ensemble des sous-espaces $\mathfrak{m}$

de $\mathfrak{p}$ de dimension 2 tels que $[[\mathfrak{m},\mathfrak{m}],\mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$. La correspondance étant donnée par $\mathbb{Y} \mapsto \mathfrak{m} = T_0(\mathbb{Y})$.

Le groupe d'isotropie $O(2) \times O(2)$ agit sur $\mathfrak{p}$ et donc sur l'ensemble des plans $\mathfrak{m}$ dans $\mathfrak{p}$. On a identifié l'espace $\mathfrak{p}$ à $M_{2,2}(\mathbb{R})$ on peut donc l'identifier à $Q_{1,1}$. L'action d'un élément (A,B) du groupe $O(2) \times O(2)$ sur $M_{2,2}(\mathbb{R})$ est donnée par : $M \mapsto AM^t B$. Le groupe $U(1) \times U(1)$ se plonge isomorphiquement dans $O(2) \times O(2)$ via le plongement naturel de $U(1)$ dans $O(2)$ comme matrices de rotations, il agit donc sur $M_{2,2}(\mathbb{R})$ et donc sur $Q_{1,1}$. L'action d'un élément $(z,w) \in U(1) \times U(1)$ sur $Q_{1,1}$ est donnée par : $q \mapsto zq\overline{w}$. On écrit chaque élément q de $Q_{1,1}$ sous la forme $q = u + iv$ avec $u, v \in \mathbb{C}$. Il est alors clair que tout élément $q = u + iv$ peut-être envoyé par un élément de $U(1) \times U(1)$ dans $\mathbb{R} + i\mathbb{R}$.

Fixons maintenant q_1 et q_2 dans $Q_{1,1}$ engendrant un plan. Quitte à translater ce plan via l'action de $U(1) \times U(1)$, on peut supposer que $q_1 = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. On notera de plus $q_2 = u + iv$ avec $u, v \in \mathbb{C}$. Puisque seul le plan engendré par q_1 et q_2 nous intéresse, on peut se ramener à ce que q_1 et q_2 soient orthogonaux et de normes 1 pour la forme quadratique obtenue en transportant le produit scalaire sur $\mathfrak{p} \cong M_{2,2}(\mathbb{R})$, c'est à dire à ce que

$$\begin{gathered} x\,\mathrm{Re}(u) + y\,\mathrm{Re}(v) = 0, \\ x^2 + y^2 = 1 \\ \text{et} \quad |u|^2 + |v|^2 = 1. \end{gathered} \tag{7}$$

On veut que le plan engendré par q_1 et q_2 corresponde à un plan $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{p}$ vérifiant $[[\mathfrak{m},\mathfrak{m}],\mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$. En fait, la courbure d'une variété symétrique de dimension 2 devant être constante. Si l'on note $X_1 = M(q_1)$ et $X_2 = M(q_2)$, on cherche q_1 et q_2 de façon à ce qu'il existe une constante c telle que

$$R(X_1,X_2)X_1 = -cX_2$$

et

$$R(X_1,X_2)X_2 = cX_1.$$

Transposons ces deux dernières équations dans le langage des quaternions. On obtient :

$$-2q_1\tilde{q}_2q_1 + q_2q_1^2 + q_1^2q_2 = -cq_2$$

et

$$-q_1\tilde{q}_2q_2 - q_2\tilde{q}_2q_1 + 2q_2q_1q_2 = cq_1.$$

Un calcul simple réduit ces deux équations aux deux équations suivantes :

$$2x^2(u - \overline{u}) + 2iy^2(v - \overline{v}) = -c(u + iv)$$

et

$$2xu(u - \overline{u}) + 2iyv(v - \overline{v}) = c(x + iy).$$

Celles-ci sont équivalentes aux quatre équations suivantes :

$$2x^2(u - \overline{u}) = -cu \tag{8}$$

$$2y^2(v - \overline{v}) = -cv \tag{9}$$

$$2xu(u - \overline{u}) = cx \tag{10}$$

$$2yv(v - \overline{v}) = cy. \tag{11}$$

Supposons d'abord que c est différent de 0. Alors les équations (10) et (11) impliquent que u et v sont imaginaires purs et que

$$4x^2\mathrm{Im}(u) = -c\mathrm{Im}(u)$$

et

$$4y^2\mathrm{Im}(v) = -c\mathrm{Im}(v).$$

Puis les équations (12) et (13) impliquent que

$$4x\mathrm{Im}(u)^2 = -cx$$

et

$$4y\mathrm{Im}(v)^2 = -cy.$$

On examine plusieurs possibilités.

- Supposons d'abord que $c = -4$. Alors si $\mathrm{Im}(u)$ est non nulle, on doit avoir $x^2 = 1$ donc $y = 0$, puis $\mathrm{Im}(u)^2 = 1$ et donc $\mathrm{Im}(v) = 0$. On peut raisonner de même en supposant $\mathrm{Im}(v)$ non nulle. Il reste alors, compte tenu de (7), huit cas possibles à savoir $(q_1,q_2) \in \{1, -1\} \times \{k, -k\}$ ou $(q_1,q_2) \in \{i, -i\} \times \{j, -j\}$. Vus comme matrices dans $M_{2,2}(\mathbb{R})$, on obtient deux classes d'orbites de plans sous $O(2)\times O(2)$, à savoir la classe de chacun des plans

$$\mathfrak{m}_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \right\rangle$$

et

$$\mathfrak{m}_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \right\rangle.$$

- Supposons maintenant c différent de -4. Si $\mathrm{Im}(u)$ est non nulle $-c = 4x^2$ et si $\mathrm{Im}(v) = 0$, alors $y = 0$, $x^2 = 1$ et $c = -4$ ce qui contredit notre hypothèse. On doit donc avoir $\mathrm{Im}(u)\mathrm{Im}(v) \neq 0$. D'où il découle que $c = -4x^2 = -4y^2$ et donc que $c = -2$. Il reste alors huit cas possibles à savoir, $(q_1,q_2) \in \{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i), \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)\} \times \{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(j - k)\}$. Vus comme matrices dans $M_{2,2}(\mathbb{R})$, on obtient quatre classes d'orbites de plans sous $O(2) \times O(2)$, à savoir la classe de chacun des plans

$$\mathfrak{m}_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & \\ & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & 1 \\ & \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$\mathfrak{m}_4 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & \\ & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & \\ 1 & \end{pmatrix} \right\rangle.$$

- Il nous reste à traiter le cas où $c = 0$. On a alors évidemment soit x et y non nuls et u, v réels, soit $x = v = 0$, soit $y = u = 0$. Compte tenu de (7), les quaternions q_1 et q_2 doivent être de l'un des formes suivantes :
  - $(q_1,q_2) = (\cos\theta + i\sin\theta, \sin\theta - i\cos\theta)$ ou $(\cos\theta + i\sin\theta, -\sin\theta + i\cos\theta)$ pour un certain paramètre réel θ, ou
  - $(q_1,q_2) \in \{\pm 1\} \times \{i\cos\varphi + j\sin\varphi \ : \ \varphi \in \mathbb{R}\}$, ou
  - $(q_1,q_2) \in \{\pm i\} \times \{\cos\varphi + k\sin\varphi \ : \ \varphi \in \mathbb{R}\}$.

  Dans le premier cas le plan engendré par q_1 et q_2 est le plan engendré par 1 et i. Dans les deux derniers cas, on peut translater le plan engendré par q_1 et q_2 par un élément de $U(1) \times U(1)$ et l'envoyer sur le plan engendré par 1 et i. Vus comme matrices dans $M_{2,2}(\mathbb{R})$, on obtient une seule classe d'orbites de plans sous $O(2) \times O(2)$, à savoir la classe du plan

$$\mathfrak{m}_5 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & \\ & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & \\ & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Finalement il découle de ces calculs la proposition suivante.

Proposition 2.1. — *Soit $\mathbb{Y}$ une sous-variété complète de dimension 2 et totalement géodésique dans $\mathbb{X}$, dont on suppose la courbure normalisée entre 0 et -1. Il existe une isométrie $g \in G$ de $\mathbb{X}$ (qui préserve donc la structure complexe de $\mathbb{X}$) et telle que l'image de $\mathbb{Y}$ par g soit l'une des sous-variétés suivantes :*

$$\begin{aligned}
\mathbb{Y}_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{X} \ : \ a,b \in \mathbb{R} \right\}; \\
\mathbb{Y}_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \in \mathbb{X} \ : \ a,b \in \mathbb{R} \right\}; \\
\mathbb{Y}_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{X} \ : \ Z_2 = 0 \right\}; \\
\mathbb{Y}_4 &= \left\{ \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{X} \ : \ Z_2 = 0 \right\}; \\
\mathbb{Y}_5 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in \mathbb{X} \ : \ a,b \in \mathbb{R} \right\}.
\end{aligned}$$

Munies de la métrique induite, les variétés $\mathbb{Y}_1$ et $\mathbb{Y}_2$ sont holomorphes et à courbure sectionnelle constante égale à -1, la variété $\mathbb{Y}_3$ est holomorphe et à courbure sectionnelle constante égale à $-\frac{1}{2}$, la variété $\mathbb{Y}_4$ est totalement réelle et à courbure sectionnelle constante égale à $-\frac{1}{2}$, enfin la variété $\mathbb{Y}_5$ est totalement réelle et à courbure sectionnelle constante nulle.

Remarquons que les différents sous-espaces totalement géodésiques peuvent être facilement visualiser dans le modèle du disque de Poincaré. Plus précisemment, comme on l'a rappelé l'espace symétrique $\mathbb{X}$ est isométrique au produit de deux plans hyperboliques, il est donc isométriques au produit de deux disques $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ chacun munit de sa métrique de Poincaré (de courbure sectionnelle constante égale à -1). Les sous-espaces $\mathbb{Y}_1$ et $\mathbb{Y}_2$ correspondent aux deux facteurs $\mathbb{D}$, le sous-espace $\mathbb{Y}_3$ correspond à la diagonale, le sous-espace $\mathbb{Y}_4$ à l'ensemble $\{(z,\overline{z}) \ : \ z \in \mathbb{D}\}$ et le sous-espace $\mathbb{Y}_5$ au produit $]-1,1[\times]-1,1[$.

Dans la section suivante on se concentre sur la sous-variété $\mathbb{Y}_5$ que l'on notera $\mathbb{Y}$.

3. Sur les plats de $\mathbb{X}$

Le morphisme

$$\begin{array}{ccc} S(O(1,1)\times O(1,1)) & \to & SO(2,2) \\ \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\right) & \mapsto & \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \beta \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & \delta \end{pmatrix} \end{array}$$

est un plongement. Le sous-groupe $H = S(O(1,1)\times O(1,1))$ de G ainsi définit, agit transitivement sur la sous-variété $\mathbb{Y}$. Soit h un élément de H que l'on écrit

$$h = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \beta \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & \delta \end{pmatrix}$$

avec $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. L'action de H sur $\mathbb{Y}$ est donnée par

$$h.\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{au+b}{cu+d} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha v+\beta}{\gamma v+\delta} \end{pmatrix}.$$

Puisque le sous-espace totalement géodésique $\mathbb{Y}$ est plat dans $\mathbb{X}$, le fait suivant est trivial.

Fait. Soit $Z \in \mathbb{Y}$. Soient $Y_1, Y_2 \in T_Z\mathbb{Y}$, alors l'opérateur $R(Y_1,Y_2)$ est identiquement nul.

Lemme 3.1. — *Soit* $Y = \xi\left(\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}\right) \in T_0(\mathbb{Y})^\perp$ *avec* $||Y|| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = 1$. *Alors,*

1. *les espaces* $T_0(\mathbb{Y})$ *et* $T_0(\mathbb{Y})^\perp$ *sont invariants sous l'application* $R(.,Y)Y$;
2. *l'opérateur* $R(.,Y)Y_{|T_0(\mathbb{Y})}$ *admet la base orthonormée de vecteurs propres suivante :*

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\xi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\xi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)\right\}$$

de valeurs propres associées respectivement $-1+2\alpha\beta$ *et* $-1-2\alpha\beta$;

3. *l'opérateur* $R(.,Y)Y_{|T_0(\mathbb{Y})}$ *est identiquement nul.*

Démonstration. D'après l'égalité (5), si $X = \xi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\right) \in T_0(\mathbb{Y})$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, on a :

$$R(X,Y)Y = \xi\left(\begin{pmatrix} -a+2\alpha\beta b & 0 \\ 0 & -b+2\alpha\beta a \end{pmatrix}\right).$$

Ceci prouve les deux premiers points du lemme. Le troisième point est trivial.

Maintenant soit τ une géodésique perpendiculaire à $\mathbb{Y}$. On s'intéresse aux champs de Jacobi le long de τ. Soit $\tau = \tau_t$, t la longueur d'arc de $\mathbb{Y}$ à τ_t. On peut supposer que $\tau_0 = 0$ et que $Y = \dot{\tau}_0 = \xi\left(\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}\right)$. Dans la suite on décrit les champs de Jacobi $X = X(t)$ le long de τ vérifiant

$$X(0) \in T_0(\mathbb{Y}) \text{ et } \nabla_Y X \in T_0(\mathbb{Y})^{\perp}. \tag{12}$$

L'équation de Jacobi est donnée par

$$\nabla^2_{\tau_t} X + R(X,\dot{\tau}_t)\dot{\tau}_t = 0.$$

D'après le lemme 3.1, les valeurs propres de $R(.,Y)Y$ sont négatives.

Soit $X_0 \in T_0(\mathbb{Y})$ un vecteur propre de $R(.,Y)Y$ pour la valeur propre $-\lambda$ ($\lambda = 1 \pm 2\alpha\beta$). Soit X_t le transport parallèle de X_0 le long de τ. On peut vérifier que

$$X(t) \quad = \quad (\cosh\sqrt{\lambda}t)X_t \tag{13}$$

est un champ de Jacobi le long de τ vérifiant (12).

Soit $L_0 \in T_0(\mathbb{Y})^{\perp}$. Soit L_t le transport parallèle de L_0 le long de τ. On peut vérifier que

$$L(t) \quad = \quad tL_t \tag{14}$$

est un champ de Jacobi le long de τ vérifiant (12). L'espace des champs de Jacobi vérifiant (12) a pour dimension 4. Cet espace est engendré par les champs de Jacobi construits ci-dessus.

On introduit maintenant les coordonnées normales. Soit (b_1,b_2,e_1,e_2) la base orthonormée de l'espace tangent à $\mathbb{X}$ en 0 donnée par :

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\xi(I_2),\ b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\xi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right),\ e_1 = \xi(E_{2,1}) \text{ et } e_2 = \xi(E_{1,2}).$$

Les vecteurs b_i sont tangents à la sous-variété $\mathbb{Y}$ et les vecteurs e_j sont perpendiculaires à la sous-variété $\mathbb{Y}$. On étend la base orthonormée (b_1,b_2,e_1,e_2) en un repère orthonormé mobile (B_1,B_2,E_1,E_2) de $T(\mathbb{X})_{|\mathbb{Y}}$ par transport parallèle radial depuis 0. L'espace $\mathbb{Y}$ est totalement géodésique dans $\mathbb{X}$. Les champs de vecteurs D_i demeurent donc tangents à $\mathbb{Y}$ et les champs de vecteurs E_j demeurent orthogonaux à $\mathbb{Y}$.

On munit maintenant des coordonnées (x_1,x_2,y_1,y_2) le point

$$\exp_q(y_1E_1(q)+y_2E_2(q))$$

où

$$q=\exp_0(x_1b_1+x_2b_2).$$

On change alors les coordonnées (y_j) dans la fibre pour les coordonnées polaires (r,θ).

Remarquons que la variété $\mathbb{X}$ s'identifie, via l'application exponentielle, au fibré normal de $\mathbb{Y}$ dans $\mathbb{X}$. Notons $\pi:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ la projection de ce fibré et μ la forme volume sur $\mathbb{Y}$. Soit $S(r)$ (pour $r>0$) le sous-fibré de $\mathbb{X}$ constitué des cercles de rayon r. On a une projection $\mathbb{X}_0\to S(1)$ induite par l'application $x\mapsto\frac{x}{||x||}$ dans les fibres, où $\mathbb{X}_0$ est le sous-fibré des vecteurs non nuls *i.e.* $\mathbb{X}_0=\mathbb{X}-\mathbb{Y}$.

Le fibré $S(1)$ s'identifie, via l'application exponentielle, au fibré normal unitaire de $\mathbb{Y}$ dans $\mathbb{X}$. En particulier, le choix d'un repère orthonormé mobile induit une inclusion de ce fibré dans le fibré $O(\mathbb{X})_{|\mathbb{Y}}$ des repères orthonormés sur $\mathbb{X}$ restreint à $\mathbb{Y}$. Sur le fibré $O(\mathbb{X})$ on a la connexion riemannienne (de Levi-Cività) et sa forme de connexion associée ω'. Celle-ci induit une forme de connexion ω sur le fibré $S(1)$.

LEMME 3.2. — *En restriction à la fibre, la forme de connexion ω coïncide avec la forme $d\theta$. De plus,*

$$d\omega=0.$$

Démonstration. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
TS(1) \arrow[rr, hook] \arrow[d] & & T(O(\mathbb{X})_{|\mathbb{Y}}) \arrow[d] \\
S(1) \arrow[rr, hook] \arrow[dr] & & O(\mathbb{X})_{|\mathbb{Y}} \arrow[dl] \\
& \mathbb{Y} &
\end{tikzcd}$$

La forme de connexion ω' est une application

$$\omega':T(O(\mathbb{X})_{|\mathbb{Y}})\to\mathfrak{o}(4),$$

où $\mathfrak{o}(n)$ désigne l'algèbre de Lie du groupe $O(n)$. On obtient la forme de connexion ω en composant les applications $TS(1)\hookrightarrow T(O(\mathbb{X})_{|\mathbb{Y}})$ et ω'.

L'application ω_1 est à valeurs dans $\mathfrak{o}(2)\subset\mathfrak{o}(4)$. Or $\mathfrak{o}(2)=\{\begin{pmatrix}0&-t\\t&0\end{pmatrix}:t\in\mathbb{R}\}\cong\mathbb{R}$. Donc la forme de connexion ω s'identifie à une forme différentielle de degré 1 sur $S(1)$ qui coïncide avec la forme $d\theta$ en restriction à la fibre.

On sait que la forme $d\omega'$ évaluée sur des vecteurs horizontaux n'est autre que la forme de coubure Ω' de la variété $\mathbb{X}$ restreinte à $T(O(\mathbb{X})_{|\mathbb{Y}})$. Or d'après le lemme 3.1, l'opérateur $R(b_1,b_2)$, vu dans $\mathfrak{o}(2)$, agissant sur $T_0(\mathbb{Y})^\perp$ est nul. En particulier, d'après [9], l'opérateur $\Omega'(b_1^*,b_2^*)$ (où b_1^* et b_2^* sont deux vecteurs horizontaux au-dessus de b_1 et b_2) vu dans $\mathfrak{o}(2)$ est nul. Via l'isomorphisme entre $\mathfrak{o}(2)$ et $\mathbb{R}$, on obtient finalement que

$$d\omega = 0.$$

4. Variation sur une construction de Kudla et Millson

Soit $M = \Gamma\backslash\mathbb{X}$ un quotient de volume fini de $\mathbb{X}$ par Γ un sous-groupe discret de G sans torsion. On note toujours $H = S(O(1,1) \times O(1,1))$ et $\mathbb{Y}$ le sous-espace symétrique (totalement géodésique) de $\mathbb{X}$ associé à H.

Soit $\Lambda = \Gamma \cap H$ et soit $T = \Lambda\backslash\mathbb{Y}$. Dans la suite on supposera que T est compacte (c'est alors nécessairement un tore) et on notera $M_\infty = \Lambda\backslash\mathbb{X}$; on dira que *la variété M contient un tore plat immergé.* On obtient alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Y} \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathbb{X} \arrow[d] \\ T = \Lambda\backslash\mathbb{Y} \arrow[r, "i"] & \Gamma\backslash\mathbb{X} = M \end{tikzcd}$$

où l'application i est induite par l'inclusion de $\mathbb{Y}$ dans $\mathbb{X}$.

Remarquons tout d'abord que la variété M_∞ s'identifie avec le fibré normal de T dans M par exponentiation des fibres normales en utilisant l'application exponentielle dans M. Rappelons que de même on a une fibration $\pi : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ qui est un fibré H-homogène.

Dans la suite, on conserve les notations de la section précédente. Soit toujours μ la forme volume sur $\mathbb{Y}$. Soit ν la forme sur M_∞ définie par la formule

$$\nu_y(v,w) = \mathrm{vol}_F(p_F v, p_F w)$$

où $y \in M_\infty$, $v,w \in T_y(M_\infty)$, p_F est la projection sur les vecteurs verticaux de π donnée par la connection riemannienne, F est la fibre passant par y et vol_F est la forme volume sur F. Les formes ν et μ forment une base de l'espace des 2-formes H-invariantes sur $\mathbb{X}$.

De la même manière que la fibration H-homogène π induit une fibration (toujours notée π) de M_∞ sur T, le sous-fibré $S(r)$ (pour $r > 0$) induit un sous-fibré (que l'on note toujours $S(r)$) de M_∞. Le sous-fibré $S(r)$ de M_∞ est constitué des cercles de rayon r. On a une projection $p : M_\infty^0 \to S(1)$ induite par l'application $x \mapsto \frac{x}{||x||}$ sur les fibres, où M_∞^0 est le sous-fibré des vecteurs non nuls *i.e.* $M_\infty^0 = M_\infty - T$.O On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} M_\infty^0 \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "\pi"'] & & S(1) \arrow[dl, "\pi'"] \\ & T & \end{tikzcd}$$

où π' est la fibration induite par π. Sur $S(1)$ on a la forme de connection ω associée à la connection riemannienne sur π. D'après le lemme 3.2, la restriction de ω à la fibre est $d\theta$, où $d\theta$ est l'élément de volume du cercle. On étend ω à M^0_∞ en la tirant en arrière par p. D'après le lemme 3.2, on obtient alors une forme différentielle fermée que l'on note toujours ω.

Nous allons maintenant décrire une variante de la construction de Kudla et Millson telle que développée dans [11]. Le but de cette construction est la description de la forme harmonique duale au tore (immergé) T dans M.

LEMME 4.1. — *Soit K l'horizontal dans M_∞.*

1. *Si $y \in \pi^{-1}(0)$, alors $K_{|y}$ est engendré par les vecteurs $\partial/\partial x_{i|y}$.*
2. *L'espace $K_{|y}$ est le supplémentaire orthogonal de l'espace tangent aux fibres pour tout $y \in M_\infty$.*

Démonstration. Soit $y \in \pi^{-1}(0)$. Supposons que

$$y = \exp_0(a_1 e_1 + a_2 e_2).$$

Soit s la section de M_∞ définit par la formule

$$s(q) = \exp_q(a_1 E_1(q) + a_2 E_2(q)).$$

Puisque les dérivés covariantes de E_1 et E_2 sont nulles en 0, il en est de même pour la section s. Donc l'espace $K_{|y}$ est engendré par les vecteurs $ds_{|0}(b_1)$ et $ds_{|0}(b_2)$. Mais

$$ds_{|0}(b_1) = \frac{\partial}{\partial x_1}_{|y} \text{ et } ds_{|0}(b_2) = \frac{\partial}{\partial x_2}_{|y}.$$

Le premier point est donc démontré. Par H-invariance, le point 2 en découlera si l'on peut prouver que pour tout i, j on a :

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}_{|y}, \frac{\partial}{\partial y_j}_{|y} \right\rangle = 0.$$

Mais, il existe une isométrie involutive σ de $\mathbb{X}$ qui fixe point par point $\pi^{-1}(0)$ et préserve globalement $\mathbb{Y}$. Alors $K_{|y}$ est un espace propre pour la valeur propre -1 de $d\sigma$. Or $d\sigma$ se restreint en l'identité suivant la verticale. Donc le lemme 4.1 découle du fait que deux espaces propres distincts d'une isométrie sont orthogonaux.

Notons $\langle .,. \rangle_y$ le produit scalaire sur les formes différentielles de M_∞ et en un point $y \in M_\infty$. Soit $||.||_y$ la norme riemannienne associée.

LEMME 4.2. — *Soit $y \in M_\infty$ un point donné par les coordonnées polaires (r,θ) dans la fibre de π. On a alors :*

1. $||\pi^*\mu||_y = \dfrac{1}{\cosh(2r\sin\theta) + \cosh(2r\cos\theta)}$;

2. $\langle d\theta, dr\rangle_y = 0$;
3. $||d\theta||_y = 1/r$.

Démonstration. On commence par supposer que $\pi(y) = 0$. Soit τ la géodésique perpendiculaire à $\mathbb{Y}$ telle que $\tau_r = y$. Alors :

$$Y = \dot{\tau}_0 = \xi\left(\begin{pmatrix} 0 & \sin\theta \\ \cos\theta & 0 \end{pmatrix}\right).$$

Soit (X_0^1, X_0^2) un repère orthonormé de $T_0(\mathbb{Y})$ constitué de vecteurs propres de l'opérateur $R(.,Y)Y$. On peut supposer (lemme 3.1) que X_0^1 est un vecteur propre associé à la valeur propre $-1+\sin 2\theta$ et X_0^2 un vecteur propre associé à la valeur propre $-1-\sin 2\theta$. Enfin remarquons que $|\mu_0(X_0^1, X_0^2)| = 1$.

Soit X_t^i $(i = 1,2)$ le transport parallèle du vecteur X_0^i le long de τ. On a vu que les champs de vecteurs $X^1(t) = (\cosh\sqrt{1-\sin 2\theta}\, t)X_t^1$ et $X^2(t) = (\cosh\sqrt{1+\sin 2\theta}\, t)X_t^2$ sont des champs de Jacobi le long de τ vérifiant 12. On en déduit que

$$|(\pi^*\mu)_y(X^1(r), X^2(r))| = 1.$$

En remarquant que $\sqrt{1-\sin 2\theta} = |\cos\theta - \sin\theta|$ et $\sqrt{1+\sin 2\theta} = |\cos\theta + \sin\theta|$, on obtient la première assertion du lemme 4.2 lorsque $\pi(y) = 0$. En toute généralité, elle découle de son invariance sous l'action du groupe H.

Pour chaque fibre $\pi^{-1}(q)$, les fonctions $\{r,\theta\}$ sont les coordonnées polaires géodésiques usuelles de centre q. Mais chaque fibre est un plan euclidien de courbure nulle. Les assertions 2 et 3 sont donc immédiates.

LEMME 4.3. — *Pour tout $y \in M_\infty^0$, $\omega_y = d\theta_y$.*

Démonstration. Notons toujours s la section définie dans la démonstration du lemme 4.1. L'application $\theta \circ s$ est constante. En différentiant cette application on obtient donc

$$d\theta\left(\frac{\partial}{\partial x_1}_{|y}\right) = 0 \text{ et } d\theta\left(\frac{\partial}{\partial x_2}_{|y}\right) = 0.$$

Or les vecteurs $\partial/\partial x_i$ sont horizontaux (lemme 4.1) et annulent donc la forme ω. Puisque les formes $d\theta$ et ω sont tirées en arrière à partir de formes sur $S(1)$ elles doivent toutes deux s'annuler sur le vecteur $\partial/\partial r$. Enfin $\omega = d\theta$ sur le cercle unité de la fibre au-dessus de 0. Donc

$$\omega_{|y} = d\theta_{|y},$$

pour tout $y \neq 0$ au-dessus de 0.

Par H-invariance, on déduit des lemmes 4.2 et 4.3 le corollaire suivant.

COROLLAIRE 4.4. — *Pour tout y dans M_∞^0,*

1. $\langle d\theta, dr\rangle_{|y} = 0$;

2. $\|d\theta\| = 1/r$;
3. $\nu = r dr \wedge d\theta$;
4. $d\nu = 0$.

Proposition 4.5. — *Pour $s,t \in \mathbb{C}$, de parties réelles strictement positives, soit*

$$\psi_{s,t} = 2\frac{\Gamma\left(1+\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{t}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{t+1}{2}\right)}\frac{r dr \wedge d\theta}{\cosh^{s+1}((\sin\theta+\cos\theta)r)\cosh^{t+1}((\sin\theta-\cos\theta)r)}.$$

La forme $\psi_{s,t}$ est une 2-forme fermée H-invariante sur M_∞, intégrable et d'intégrale 1 sur chaque fibre de π. De plus $\psi_{s,t}$ vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\Delta\psi_{s,t} = \frac{s(s+1)}{2}[\psi_{s+2,t} - \psi_{s,t}] + \frac{t(t+1)}{2}[\psi_{s,t+2} - \psi_{s,t}].$$

Démonstration. La forme $\psi_{s,t}$ est bien définie pout tout s,t de parties réelles > -1. Il découle facilement de son expression que $\psi_{s,t}$ a les propriétés suivantes :

- $\psi_{s,t}$ est H-invariante pour tout s et t;
- $\psi_{s,t}$ est fermée pour tout s et t;
- $\|\psi_{s,t}\|$ est intégrable sur M_∞ dès que $\mathrm{Re}(s), \mathrm{Re}(t) > 0$;
- $\int_F \psi_{s,t} = 1$ où F est une fibre quelconque de π.

Le dernier point découle immédiatement du changement de variable

$$u = (\sin\theta + \cos\theta)r,$$

$$v = (\sin\theta - \cos\theta)r.$$

Pour conclure la démonstration de la proposition 4.5, il suffit donc de calculer $\Delta\psi_{s,t}$. Remarquons tout d'abord que

$$2\cosh((\sin\theta+\cos\theta)r)\cosh((\sin\theta-\cos\theta)r) = \cosh(2r\sin\theta) + \cosh(2r\cos\theta). \quad (15)$$

Pour simplifier, notons $C(s) = \frac{\Gamma(1+\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{s+1}{2})}$. Il est clair que

$$C(s+2) = \frac{s+2}{s+1}C(s). \quad (16)$$

On déduit du lemme 4.2, du corollaire 4.4 et de 15 que :

$$d\mathrm{vol}_{M_\infty} = 2\cosh((\sin\theta+\cos\theta)r)\cosh((\sin\theta-\cos\theta)r)\pi^*\mu \wedge \nu,$$

où $d\mathrm{vol}_{M_\infty}$ est l'élément de volume de M_∞ et toujours $\nu = r dr \wedge d\theta$. Donc, d'après le corollaire 4.4 et toujours grâce à 15, si $*$ désigne l'opérateur étoile de Hodge sur M_∞, on a :

$$*\nu = 2\cosh((\sin\theta+\cos\theta)r)\cosh((\sin\theta-\cos\theta)r)\pi^*\mu,$$

$$*\pi^*\mu = \frac{1}{2\cosh((\sin\theta+\cos\theta)r)\cosh((\sin\theta-\cos\theta)r)}\nu,$$

$$*(dr\wedge\pi^*\mu) = \frac{1}{2\cosh((\sin\theta+\cos\theta)r)\cosh((\sin\theta-\cos\theta)r)}rd\theta$$

et

$$*(rd\theta\wedge\pi^*\mu) = -\frac{1}{2\cosh((\sin\theta+\cos\theta)r)\cosh((\sin\theta-\cos\theta)r)}dr.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\Delta\psi_{s,t} &= -d*d*\psi_{s,t}\\
&= -\frac{1}{4}C(s)C(t)d*d\left(\frac{\pi^*\mu}{\cosh^s((\sin\theta+\cos\theta)r)\cosh^t((\sin\theta-\cos\theta)r)}\right)\\
&= \frac{1}{4}C(s)C(t)d*\left\{\frac{s\sinh((\sin\theta+\cos\theta)r)}{\cosh^{s+1}((\sin\theta+\cos\theta)r)\cosh^t((\sin\theta-\cos\theta)r)}\right.\\
&\quad\cdot\Big((\sin\theta+\cos\theta)dr\wedge\pi^*\mu+(\cos\theta-\sin\theta)rd\theta\wedge\pi^*\mu\Big)\\
&\quad+\frac{t\sinh((\sin\theta-\cos\theta)r)}{\cosh^s((\sin\theta+\cos\theta)r)\cosh^{t+1}((\sin\theta-\cos\theta)r)}\\
&\quad\left.\cdot\Big((\sin\theta-\cos\theta)dr\wedge\pi^*\mu+(\cos\theta+\sin\theta)rd\theta\wedge\pi^*\mu\Big)\right\}\\
&= \frac{1}{8}C(s)C(t)d\left\{\frac{s\sinh((\sin\theta+\cos\theta)r)}{\cosh^{s+2}((\sin\theta+\cos\theta)r)\cosh^{t+1}((\sin\theta-\cos\theta)r)}\right.\\
&\quad\cdot((\sin\theta+\cos\theta)rd\theta-(\cos\theta-\sin\theta)dr)\\
&\quad+\frac{t\sinh((\sin\theta-\cos\theta)r)}{\cosh^{s+1}((\sin\theta+\cos\theta)r)\cosh^{t+2}((\sin\theta-\cos\theta)r)}((\sin\theta-\cos\theta)rd\theta\\
&\quad\left.-(\cos\theta+\sin\theta)dr)\right\}\\
&= \frac{1}{4}C(s)C(t)\left\{-(s(s+1)+t(t+1))+\frac{s(s+2)}{\cosh^2((\sin\theta+\cos\theta)r)}\right.\\
&\quad\left.+\frac{t(t+2)}{\cosh^2((\sin\theta-\cos\theta)r)}\right\}\frac{rdr\wedge d\theta}{\cosh^{s+1}((\sin\theta+\cos\theta)r)\cosh^{t+1}((\sin\theta-\cos\theta)r)}.
\end{aligned}$$

D'où l'on déduit, grâce à (16), que :

$$\Delta\psi_{s,t} = \frac{s(s+1)}{2}[\psi_{s+2,t}-\psi_{s,t}]+\frac{t(t+1)}{2}[\psi_{s,t+2}-\psi_{s,t}].$$

Ce qui achève la démonstration de la proposition 4.5.

Étant donné un point $P\in M_\infty$ et deux nombres réels strictement positifs u_0 et v_0, on pose :

$$u(P) = (\sin\theta(P)+\cos\theta(P))r(P),$$
$$v(P) = (\sin\theta(P)-\cos\theta(P))r(P)$$

et

$$N(P,u_0,v_0) = |\{\gamma\in\Lambda\backslash\Gamma\ :\ |u(\gamma P)|\leqslant u_0 \text{ et } |v(\gamma P)|\leqslant v_0\}|,$$

où les coordonnées $\theta(P)$ et $r(P)$ sont dans la fibre de π passant par P.

LEMME 4.6. — *Il existe une constante $C(P) > 0$ telle que pour tous u_0 et v_0 strictement positifs on ait :*

$$N(P,u_0,v_0) \leqslant C(P)e^{u_0+v_0}.$$

De plus, on peut choisir $C(P)$ de manière à ce qu'elle soit bornée sur les compacts de M_∞.

Démonstration. Soit $B(u_0,v_0)$ le sous-ensemble de M_∞ constitué des points P vérifiant

$$|u(P)| \leqslant u_0$$

et

$$|v(P)| \leqslant v_0.$$

Soit D un ouvert relativement compact de M_∞ de diamètre δ contenant P et tel que les ensembles γD ($\gamma \in \Lambda\backslash\Gamma$) soient disjoints. On a alors :

$$\mathrm{vol}(D)N(P,r) \leqslant \mathrm{vol}(B(u_0+\delta,v_0+\delta)).$$

Mais

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(B(u_0+\delta,u_0+\delta)) &= \int_{B(u_0+\delta,v_0+\delta)} 2\cosh((\sin\theta+\cos\theta)r) \\ &\qquad\qquad \cdot \cosh((\sin\theta-\cos\theta)r)\pi^*\mu\wedge\nu \\ &= \mathrm{vol}(T)\int_{|u|\leqslant u_0+\delta}\int_{|v|\leqslant v_0+\delta} \cosh u\cosh v\, du\wedge dv.\end{aligned}$$

Finalement, on obtient bien que :

$$N(P,r) \leqslant C(P)e^{u_0+v_0}.$$

PROPOSITION 4.7. — *Soit K un compact de M_∞. Il existe une constante $C(K)$ (dépendante de Γ) telle que pour tout $P \in K$, $T \geqslant 1$ et deux nombres réels s et t, on ait :*

$$\sum_{r(\gamma P)\leqslant T} \frac{1}{\cosh^s u(\gamma P)\cosh^t v(\gamma P)} \leqslant C(K)(1+e^{(2-s-t)\sqrt{2}T}).$$

Démonstration. D'après le lemme 4.6, il existe une constante $C(K)$ telle que

$$N(P,u_0,v_0) \leqslant C(K)e^{u_0+v_0},$$

pour tout $P \in K$ et $u_0, v_0 > 0$. On a donc (pour s et t deux nombres réels) :

$$
\begin{aligned}
\sum_{r(\gamma P)\leqslant T} \frac{1}{\cosh^s u(\gamma P) \cosh^t v(\gamma P)} &\leqslant \int_0^{\sqrt{2}T)} \int_0^{\sqrt{2}r(\gamma P)} \frac{1}{\cosh^s u \cosh^t v} \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} N(P,u,v) \\
&\leqslant \int_0^{\sqrt{2}T} \frac{1}{\cosh^s u} \left\{ \frac{1}{\cosh^t \sqrt{2}T} \frac{\partial}{\partial u} N(P,u,\sqrt{2}T) \right. \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial u} N(P,u,0) \\
&\quad \left. + t \int_0^{\sqrt{2}T} \frac{\sinh v}{\cosh^{t+1} v} \frac{\partial}{\partial u} N(P,u,v) dv \right\} du \\
&\leqslant \frac{1}{\cosh^s \sqrt{2}T \cosh^t \sqrt{2}T} N(P,\sqrt{2}T,\sqrt{2}T) \\
&\quad - \frac{1}{\cosh^s \sqrt{2}T} N(P,\sqrt{2}T,0) + \\
&\quad - \frac{1}{\cosh^t \sqrt{2}T} N(P,0,\sqrt{2}T) + N(P,0,0) \\
&\quad + \frac{s}{\cosh^t \sqrt{2}T} \int_0^{\sqrt{2}T} \frac{\sinh u}{\cosh^{s+1} u} N(P,u,\sqrt{2}T) \\
&\quad - s \int_0^{\sqrt{2}T} \frac{\sinh u}{\cosh^{s+1} u} N(P,u,0) \\
&\quad + \frac{t}{\cosh^s \sqrt{2}T} \int_0^{\sqrt{2}T} \frac{\sinh v}{\cosh^{t+1} v} N(P,\sqrt{2}T,v) \\
&\quad - t \int_0^{\sqrt{2}T} \frac{\sinh v}{\cosh^{t+1} v} N(P,0,v) \\
&\quad + st \int_0^{\sqrt{2}T} \int_0^{\sqrt{2}T} \frac{\sinh u \sinh v}{\cosh^{s+1} u \cosh^{t+1} v} N(P,u,v) du dv \\
&\leqslant C'(K)(1 + e^{(2-s-t)\sqrt{2}T}),
\end{aligned}
$$

où $C'(K)$ est une constante ne dépendant que de Γ et de K.

Soit

$$\Omega_{s,t} = \sum_{\Lambda \backslash \Gamma} \gamma^* \psi_{s,t}. \tag{17}$$

La proposition 4.7 implique immédiatement le lemme suivant.

LEMME 4.8. — *La série (17) converge absolument sur tout compact de M_∞ dès que* $\mathrm{Re}(s+t) > 0$; *elle définit alors une 2-forme fermée sur M.*

Les démonstrations du théorème 3.1 de [10] et du théorème 7 de [2] (pour une variante et le cas non compact) impliquent le théorème suivant.

THÉORÈME 4.9. — *La série $\Omega_{s,t}$ admet un prolongement continu au produit de demi-plans $\{(s,t)\ :\ \mathrm{Re}(s), \mathrm{Re}(s) \geqslant 0\}$ et vérifie l'équation fonctionnelle :*

$$\Delta\Omega_{s,t} = \frac{s(s+1)}{2}[\Omega_{s+2,t} - \Omega_{s,t}] + \frac{t(t+1)}{2}[\Omega_{s,t+2} - \Omega_{s,t}]. \tag{18}$$

La 2-forme $\Omega_{0,0}$ ainsi définie est harmonique et duale (au sens L^2 lorsque M n'est pas compacte) à T dans M.

5. Sur le spectre des surfaces modulaires de Hilbert

On va maintenant s'intéresser aux surfaces modulaires de Hilbert. Soit donc, comme dans l'introduction, un groupe $\mathbb{G}$ algébrique simple et connexe sur $\mathbb{Q}$ tel que

- $\mathbb{G}(\mathbb{R})$ soit un groupe semi-simple;
- $\mathbb{G}(\mathbb{R})$ soit isomorphe au groupe $SO(2,2)$ à des facteurs compacts près.

Soit K_f un sous-groupe compact-ouvert de $\mathbb{G}(\mathbb{A}_f)$ (où $\mathbb{A}_f$ désigne l'anneau des adèles finis sur $\mathbb{Q}$) tel que le groupe $\Gamma = \mathbb{G}(\mathbb{Q}) \cap K_f$ soit sans torsion et que sa projection dans $SO(2,2)$ soit contenu dans la composante connexe de l'identité $O_0(2,2)$. Un tel groupe Γ est appelé *sous-groupe de congruence (sans torsion) de* $\mathbb{G}$. On appelle *surface modulaire de Hilbert* tout quotient de l'espace $\mathbb{X}$ par un sous-groupe de congruence (sans torsion) Γ de $\mathbb{G}$ comme ci-dessus.

D'après un théorème classique, une surface modulaire de Hilbert est toujours de volume fini; elle est de plus compacte si et seulement si le groupe $\mathbb{G}$ est anisotrope sur $\mathbb{Q}$.

Les groupes $\mathbb{G}$ comme ci-dessus sont tous connus, voir par exemple [13], on peut les décrire de la façon suivante.

Soit $K \subset \mathbb{R}$ un corps de nombre totalement réel de degré d sur $\mathbb{Q}$. Notons $\sigma_1 = id, \sigma_2, \ldots, \sigma_d$ les différents plongements de K dans $\mathbb{R}$. Soit

$$q(x,y,z,t) = \alpha x^2 + \beta y^2 - \gamma z^2 - \delta t^2$$

une forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ avec $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in K$ et telle que :

- $\mathrm{sign}(q) = (2,2)$;
- les formes quadratiques $q^{\sigma_i} = \sigma_i(\alpha)x^2 + \sigma_i(\beta)y^2 - \sigma_i(\gamma)z^2 - \sigma_i(\delta)t^2$ soient définies positives pour $i = 2, \ldots, d$.

Le groupe $SO(q)$ est un groupe algébrique sur K. Soit $R_{K/\mathbb{Q}}$ le foncteur de restriction des scalaires de Weil passant du corps K au corps $\mathbb{Q}$. Le groupe $R_{K/\mathbb{Q}}(SO(q))$ est un groupe $\mathbb{Q}$-algébrique comme au-dessus. Et réciproquement tout groupe $\mathbb{G}$ comme au-dessus est de cette forme.

On l'a rappelé, la composante connexe de l'identité du groupe $SO(2,2)$ est isomorphe au groupe $(SL_2(\mathbb{R}) \times SL_2(\mathbb{R}))/\{(I_2,I_2),(-I_2,-I_2)\}$. On aurait ainsi pu travailler avec des groupes $\mathbb{G}'$ algébriques simples et connexes sur $\mathbb{Q}$ tels que

- $\mathbb{G}'(\mathbb{R})$ soit un groupe semi-simple;

– $\mathbb{G}'(\mathbb{R})$ soit isomorphe au groupe $SL_2(\mathbb{R}) \times SL_2(\mathbb{R})$ à des facteurs compacts près.

Si $\mathbb{G}'$ est un tel groupe, on peut, comme ci-dessus, considérer un sous-groupe compact-ouvert K_f de $\mathbb{G}'(\mathbb{A}_f)$ tel que le groupe $\Gamma' = \mathbb{G}'(\mathbb{Q}) \cap K_f$ soit sans torsion. Il est clair que la projection de Γ' dans $(SL_2(\mathbb{R}) \times SL_2(\mathbb{R}))/\{(I_2,I_2),(-I_2,-I_2)\} \cong O_0(2,2)$ coïncide avec la projection d'un sous-groupe de congruence (sans torsion) d'un groupe $\mathbb{G}$ comme au-dessus, et réciproquement. Autrement dit, le quotient de $\mathbb{X} \cong \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ par un groupe discret Γ' comme au-dessus est une surface modulaire de Hilbert et, réciproquement, toute surface modulaire de Hilbert est de ce type.

Les groupes $\mathbb{G}'$ comme au-dessus sont également connus, voir [13], on peut les décrire de la façon suivante.

Soit K un corps de nombre totalement réel de degré d sur $\mathbb{Q}$. Notons $\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_d$ les différents plongements de K dans $\mathbb{R}$. Soit D une *algèbre de quaternions* sur K, *i.e.* une algèbre centrale simple de dimension 4 sur K. Il n'y a que deux types d'algèbres de quaternions sur $\mathbb{R}$, l'algèbre des matrices $M_2(\mathbb{R})$ et l'algèbre des quaternions usuels $\mathbb{H}$. On choisit le corps K de manière à ce que

– $\sigma_1(D) \otimes_{\sigma_1(K)} \mathbb{R} \cong M_2(\mathbb{R})$,
– $\sigma_2(D) \otimes_{\sigma_2(K)} \mathbb{R} \cong M_2(\mathbb{R})$ et
– $\sigma_i(D) \otimes_{\sigma_i(K)} \mathbb{R} \cong \mathbb{H}$.

Le groupe D^1 des quaternions de norme 1 est un groupe algébrique sur K. Le groupe $R_{K/\mathbb{Q}}(D^1)$ est alors un groupe $\mathbb{Q}$-algébrique du type $\mathbb{G}'$ comme ci-dessus. Et réciproquement tout groupe $\mathbb{G}'$ comme au-dessus est de cette forme.

Nous allons maintenant démontrer le résultat principal de cette section.

THÉORÈME 5.1. — *Il existe un nombre réel strictement positif ε tel que pour toute surface modulaire de Hilbert, la première valeur propre non nulle du laplacien de Hodge-de Rham sur les formes différentielles est supérieure ou égale à ε.*

Il est classique (et détaillé dans [4]) que pour démontrer le théorème ci-dessus, il suffit de démontrer le lemme qui va suivre. On ne détaille pas le dictionnaire entre formes différentielles et représentations (c'est essentiellement la formule de Matsushima), notons néanmoins que les représentations cohomologiques correspondent évidemment aux formes harmoniques. Enfin, rappelons que si $\mathbb{G}'$ est un groupe algébrique sur $\mathbb{Q}$ comme au-dessus, on note $\hat{\mathbb{G}}'_{Aut}$ l'adhérence (dans le dual unitaire $\hat{\mathbb{G}}'(\mathbb{R})$ de $\mathbb{G}'(\mathbb{R})$) de la réunion

$$\cup\sigma(\Gamma'\backslash\mathbb{G}'(\mathbb{R}))$$

des spectres $\sigma(\Gamma'\backslash\mathbb{G}'(\mathbb{R}))$, *i.e.* des classes d'équivalence de représentations irréductibles unitaires qui sont faiblement contenues dans $L^2(\Gamma\backslash\mathbb{G}'(\mathbb{R}))$, lorsque les groupes Γ' parcourent l'ensemble des sous-groupes de congruence de $\mathbb{G}'$.

LEMME 5.2. — *Soit D^1 le groupe des éléments de norme d'une certaine algèbre de quaternions sur un corps de nombre K totalement réel. Soit $\mathbb{G}' = R_{K/\mathbb{Q}}(D^1)$. Alors les re-*

présentations cohomologiques de $\mathbb{G}'(\mathbb{R})$ sont isolées, uniformément par rapport au choix de D, dans le dual automorphe $\hat{\mathbb{G}}_{Aut}$.

Démonstration. On a $\mathbb{G}'(\mathbb{R}) \cong SL_2(\mathbb{R})^r \times SU(2)^s$, où r et s sont des entier de somme $r + s = d$ le degré de K (dans le cas qui nous intéresse $r = 2$). Les représentations cohomologiques font toutes partie de la série discrète de $\mathbb{G}'(\mathbb{R})$ et sont donc isolés dans la partie tempérée du dual unitaire de $\mathbb{G}'(\mathbb{R})$. Pour $SL_2(\mathbb{R})$, une représentation de la série discrète ne peut donc être approchée que par des représentations sphériques de la série complémentaire. Les seules représentations de la série discrète pouvant être ainsi approchées sont les deux représentations apparaissant comme sous-quotients irréductibles à la fin de la série complémentaire. Mais ce phénomème ne peut se produire dans $\hat{\mathbb{G}}'_{Aut}$ puisqu'en combinant la correspondance de Jacquet-Langlands [8] avec l'estimé de Gelbart-Jacquet [6], on montre que la moitié de la série complémentaire de $SL_2(\mathbb{R})$ est exclue de $\hat{\mathbb{G}}'_{Aut}$.

Ceci conclut la démonstration du théorème 5.1.

6. Démonstration du théorème 1

Soit $\mathbb{G}$ un groupe $\mathbb{Q}$-algébrique comme dans l'introduction (ou dans la section précédente) et soit Γ un sous-groupe de congruence de $\mathbb{G}$. Soit $M = \Gamma\backslash\mathbb{X}$ la surface modulaire de Hilbert associée. Soit S une sous-variété de dimension 2 et totalement géodésique dans M. Il existe alors un plan totalement géodésique $\mathbb{Y}$ de dimension 2 dans $\mathbb{X}$ tel que :

- $S = \Lambda\backslash\mathbb{Y}$;
- $\Lambda = \Gamma \cap H$, où H est le sous-groupe de $SO(2,2)$ stabilisant $\mathbb{Y}$;
- l'immersion de S dans M est induite par l'inclusion de $\mathbb{Y}$ dans $\mathbb{X}$.

Puisque M est arithmétique, la sous-variété $\mathbb{Y}$ est elle aussi arithmétique. On peut trouver une démonstration de ce résultat dans [4]. Plus précisemment, il doit exister un $\mathbb{Q}$-sous-groupe $\mathbb{H}$ de $\mathbb{G}$ tel que :

- la projection de $\mathbb{H}(\mathbb{R})$ dans $SO(2,2)$ coïncide avec le groupe H;
- le groupe Λ est un sous-groupe de congruence de $\mathbb{G}$.

Fait. Il existe une suite décroissante $\{\Gamma_m\}_{m\geqslant 0}$ de sous-groupe de congruence de $\mathbb{G}$ telle que :

1. $\Gamma_0 = \Gamma$, et
2. $\cap_{m\geqslant 0}\Gamma_m = \Lambda$.

Démonstration. Rappelons que Γ est de la forme

$$\Gamma = \mathbb{G}(\mathbb{Q}) \cap K_f,$$

où K_f est un sous-groupe compact-ouvert de $\mathbb{G}(\mathbb{A}_f)$. De même, le groupe Λ est de la forme

$$\Lambda = \mathbb{H}(\mathbb{Q}) \cap K_f^H,$$

où K_f^H est un sous-groupe compact-ouvert de $\mathbb{H}(\mathbb{A}_f)$. Soit alors $\{K_f^m\}$ une suite décroissante de sous-groupes compact-ouvert de $\mathbb{G}(\mathbb{A}_f)$ telle que :

1. $K_f^0 = K_f$, et
2. $\cap_{m\geqslant 0} K_f^m = \{e\}$.

La suite de sous-groupe de congruence :

$$\Gamma_m := \mathbb{G}(\mathbb{Q}) \cap K_f^H K_f^m$$

vérifie alors clairement l'énoncé du fait.

Il découle du fait ci-dessus et de la démonstration du théorème 1 de [1] que la surface S se relève à un revêtement fini (toujours de congruence) en une surface plongée. Le premier point du théorème 1 est donc démontré. On supposera dorénavant que la surface S est plongée. La démonstration du théorème 1 se scinde maintenant en trois cas, le cas où S est complexe, le cas ou S est totalement réelle et de caractéristique d'Euler non nulle et le cas où S est un tore.

Le cas où S est complexe est trivial puisque M est kaehlérienne et donc $[S]$ est non triviale dans $H_2(M)$.

Le cas où S est totalement réelle et de caractéristique d'Euler non nulle n'est pas beaucoup plus difficile. En effet, la multiplication par J (la structure presque complexe) envoie le fibré tangent à S vers le fibré normal de S dans M. Le nombre d'Euler du fibré normal de S dans M est donc égal à la caractéristique d'Euler de S, qui est non nul. La classe d'homologie $[S]$ est donc nécessairement non triviale.

Le cas où S est un tore est le plus délicat. On note toujours $\{\Gamma_m\}$ la suite de sous-groupes de congruence vendue par le fait ci-dessus. Pour chaque entier $m \geqslant 0$, soit $M_m = \Gamma_m\backslash\mathbb{X}$ et $\Omega_{s,t}^m$ la forme duale à T construite section 4. La famille $\{M_m\}$ est constituée de revêtements finis galoisiens de M. La forme différentielle $\Omega_{0,0}^m$ est la forme harmonique duale au cycle $T = \Lambda\backslash\mathbb{Y}$ dans M_m.

Puisque chaque groupe Γ_m est un sous-groupe de congruence, chaque M_m est une surface modulaire de Hilbert. Le théorème 5.1 implique donc que la première valeur propre non nulle du laplacien sur les 2-formes de M_m est uniformément minorée.

La démonstration de la proposition 12 de [2] implique la proposition suivante.

Proposition 6.1. — *La suite* $\{\int_{M_m} ||\Omega_{0,0}^m||^2\}$ *converge, lorsque m tend vers l'infini, vers* $\int_{M_\infty} ||\psi_{0,0}||^2$.

Idée de la démonstration. Lorsque $\mathrm{Re}(s + t) > 0$, il découle facilement de l'expression (17) que la suite de formes différentielles (vues sur $\mathbb{X}$) $\Omega_{s,t}^m$ converge uniformément sur tous les compacts de $\mathbb{X}$ vers la forme différentielle $\psi_{s,t}$. Le trou spectral assuré par la minoration uniforme de la première valeur propre non nulle du laplacien sur les 2-formes de M_m implique alors que $\Omega_{0,0}^m$ la projection hilbertienne de $\Omega_{s,t}^m$ sur l'espace des formes harmoniques converge au sens L^2 vers le projeté harmonique $\psi_{0,0}$ de $\psi_{s,t}$, d'où l'on conclut la proposition.

Conclusion de la démonstration du théorème 1. L'intégrale $\int_{M_\infty} ||\psi_{0,0}||^2$ est bien sur non nulle. Il existe donc un entier m tel que l'intégrale $\int_{M_m} ||\Omega^m_{0,0}||^2$ soit elle aussi non nulle. Puisque $\Omega^m_{0,0}$ est la forme harmonique duale à T dans M_m, on en déduit que la classe de T dans $H_2(M_m)$ est non triviale. Ce qui conclut la démonstration du théorème 1.

Pour conclure cette section, remarquons que, comme dans [2], l'expression exacte de $\Omega_{s,t}$ donnée par (17) permet de démontrer l'estimer précis suivant sur la croissance de la norme L^2 de la classe de cohomologie représentée par un tore plat dans la suite des revêtements de congruence d'une surface modulaire de Hilbert.

THÉORÈME 6.2. — *Soient* $\Gamma_0\backslash\mathbb{X}$ *une surface modulaire de Hilbert et*

$$T = \Lambda_0\backslash\mathbb{Y} \to \Gamma_0\backslash\mathbb{X}$$

un tore immergé et totalement géodésique. Alors, pour chaque Γ *sous-groupe de congruence inclus dans* Γ_0, *le tore* $T_\Gamma := (\Gamma \cap \Lambda_0)\backslash\mathbb{Y}$ *s'immerge dans la variété* $\Gamma\backslash\mathbb{X}$ *de façon totalement géodésique. Pour* Γ *suffisamment profond, cette immersion est en fait un plongement et*

$$\lim_{\Gamma\to\{e\}} \frac{||[T_\Gamma]||_{(2)}}{\sqrt{vol(T_\Gamma)}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}.$$

Concluons par un exemple.

Soit

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_3^2 - 3x_4^2.$$

La forme quadratique f ne représente pas zéro sur $\mathbb{Q}$ comme on peut facilement le montrer en passant modulo 3. Le sous-groupe $\Gamma(f)$ de $GL_{n+1}(\mathbb{Z})$ préservant f s'identifie alors à un réseau cocompact de $O(2,2)$. Soit $\Gamma \subset \Gamma(f)$ un sous-groupe d'indice fini sans torsion inclus dans $SO_0(2,2)$ (un tel sous-groupe Γ existe d'après le lemme de Selberg). Le groupe Γ agit librement et sans point fixe sur $\mathbb{X}$, l'espace symétrique associé à $SO(2,2)$. On note $M = \Gamma\backslash\mathbb{X}$.

Pour motiver *a posteriori* cet article montrons que la variété M contient un tore totalement géodésiques immergé.

La forme quadratique f peut s'écrire $f = q\dot{+}q$ où q est la forme quadratique en deux variables : $q(x,y) = x^2 - 3y^2$. Le groupe $O(f)$ contient donc le groupe $O(q)\times O(q)$. Sur $\mathbb{R}$, le groupe $O(q)$ est isomorphe au groupe $\mathbb{R}$. Le plongement $O(q)(\mathbb{Z}) \times O(q)(\mathbb{Z}) \subset O(f)(\mathbb{Z})$ montre que le groupe $\Gamma(f)$ contient un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}^2$ qui est un reseau dans $O(q)\times O(q)$. Ceci induit l'immersion d'un tore totalement géodésique dans la variété M.

Bibliographie

[1] N. BERGERON. Premier nombre de Betti et spectre du laplacien de certaines variétés hyperboliques. *Enseign. Math.*, 46:109, 2000.

[2] N. BERGERON. Asymptotique de la norme L^2 d'un cycle géodésique dans les revêtements de congruence d'une variété hyperbolique arithmétique. *Math. Z.*, 241:101–125, 2002.

[3] N. BERGERON. Lefschetz Properties for Arithmetic Real and Complex Hyperbolic Manifolds. *Int. Math. Res. Not.*, pages 1089–1122, 2003.

[4] N. BERGERON and L. CLOZEL. Sur le spectre et l'homologie des variétés hyperboliques rélles et complexes de congruence. in preparation.

[5] N. BERGERON and L. CLOZEL. Spectre et Homologie des variétés hyperboliques complexes de congruence. *C. R. Math. Acad. Sci.*, 334:995–998, 2002.

[6] S. GELBART and H. JACQUET. A relation between automorphic representations of GL(2) and GL(3). *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 11:471–542, 1978.

[7] M. HARRIS and J. S. LI. A Lefschetz property for subvarieties of Shimura varieties. *J. Algebraic Geometry*, 7:77–122, 1998.

[8] H. JACQUET and R. P. LANGLANDS. *Automorphic forms on GL*(2), volume 114 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer Verlag, 1970.

[9] S. KOBAYASHI and K. NOMIZU. *Foundations of differential geometry. Vol II.* Wiley Interscience Publication, 1969.

[10] S. S. KUDLA and J. J. MILLSON. Harmonic differentials and closed geodesics on a Riemann surface. *Invent. Math.*, 54:193–211, 1979.

[11] S. S. KUDLA and J. J. MILLSON. The Poincaré dual of a geodesic algebraic curve in a quotient of the 2-ball. *Canad. J. Math.*, 33:485–499, 1981.

[12] T. ODA. A note on the Albanese variety of an arithmetic quotient of the complex hyperball. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. 1A Math.*, 28:481–486, 1981.

[13] V. PLATONOV and A. RAPINCHUK. *Algebraic groups and number theory. Translated from the 1991 Russian original by Rachel Rowen.* Pure and Applied Mathematics, 139. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1994.

[14] T. N. VENKATARAMANA. Cohomology of compact locally symmetric spaces. *Compositio Math.*, 125:221–253, 2001.

Nicolas BERGERON
Unité Mixte de Recherche 8628 du C. N. R. S.
Laboratoire de Mathématiques
Bât. 425
Université Paris-Sud
91405 ORSAY cedex (France)

`Nicolas.Bergeron@math.u-psud.fr`