Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

THIERRY LÉVY

Comment choisir une connexion au hasard ?

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 21 (2002-2003), p. 61-73
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_2002-2003__21__61_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
Volume **21** (2003) 61–73

COMMENT CHOISIR UNE CONNEXION AU HASARD ?

Thierry LÉVY

Résumé

Dans ce texte, je présente, sans preuves et dans un style informel, les idées qui me paraissent les plus importantes à propos de la construction de la mesure de Yang-Mills sur une surface compacte. J'espère que la lecture de ce qui suit facilitera, pour le lecteur intéressé, l'abord de la littérature officielle sur le sujet, par exemple : [8, 5] pour la construction proprement dite et, dans le second, une étude un peu plus détaillée de la mesure, [3, 2] pour des idées certainement importantes mais encore mal comprises sur la structure de la mesure, [9, 10] pour des liens avec d'autres domaines et d'autres problèmes.

1. Introduction : comment choisir une fonction au hasard ?

Cette question n'est pas neuve et la théorie des processus stochastiques y répond de plus en plus précisément depuis environ un siècle. L'objet central de cette théorie est le mouvement brownien, qui est une fonction prise au hasard dans l'espace de Banach $C_0([0,1])$ des fonctions réelles continues sur $[0,1]$ et nulles en zéro. Autrement dit, c'est une mesure de probabilités - la mesure de Wiener - sur cet espace muni de la tribu borélienne de sa topologie forte. Cette mesure peut être construite de plusieurs façons, mais dans tous les cas il faut la construire de toutes pièces car, contrairement au cas d'un espace vectoriel de dimension finie, on ne dispose sur $C_0([0,1])$ d'aucune mesure de référence, d'aucune "mesure de Lebesgue" par rapport à laquelle on pourrait définir la mesure de Wiener, par sa densité. Il y a tout de même une construction qui se rapproche de cette façon intuitive de procéder, qui consiste à voir la mesure de Wiener comme la mesure gaussienne sur l'espace de Hilbert $H_0^1([0,1])$. Cet espace est celui des fonctions

---

2000 Mathematics Subject Classification: 81T13, 58D20, 81T27.

L^2 sur $[0,1]$ dont la dérivée est une fonction L^2 et qui sont nulles en zéro[1], muni de la norme $\| h \|^2 = \int_0^1 \dot{h}(t)^2 \, dt$.

Il peut paraître paradoxal de définir la mesure de Wiener comme une mesure sur H^1 alors qu'elle est en fait portée par C_0. C'est ce paradoxe apparent que nous voudrions rapidement expliquer dans cette section introductive.

Si H est un espace de Hilbert réel de dimension finie d dont on note $\| \cdot \|$ la norme, on peut considérer sur H la mesure de Lebesgue normalisée dh, l'unique mesure borélienne invariante par translation telle que le cube unité soit de mesure 1. La mesure gaussienne sur H est alors définie par

$$d\gamma_H(h) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\|h\|^2} \, dh. \tag{1}$$

La constante qui apparaît dans cette expression est simplement celle qui assure que $\int_H d\gamma_H = 1$. On vérifie aisément que si $e_1, \ldots, e_d$ est une base orthonormée de H, alors la mesure image de γ_H par l'application de H dans $\mathbb{R}^d$ qui envoie h sur $((e_1,h), \ldots, (e_d,h))$ est la mesure $\gamma_{\mathbb{R}}^{\otimes d}$, où $\gamma_{\mathbb{R}}$ est la loi de Gauss standard. L'espace mesuré $(\mathbb{R}^d, \gamma_{\mathbb{R}}^{\otimes d})$ est donc le modèle universel de la mesure gaussienne sur un espace de Hilbert de dimension d.

Lorsqu'on veut généraliser cette construction à un espace de dimension infinie, on doit abandonner l'expression (1) qui est devenue inopérante : la constante de normalisation tend vers zéro lorsque d tend vers l'infini et il n'existe sur un espace de Hilbert de mesure invariante par translation[2] que s'il est localement compact.

Pour définir γ_H lorsque H est séparable de dimension infinie, nous pouvons tenter de compléter le tableau suivant :

$$\begin{array}{lccc} \dim H = d, & (H, \gamma_H) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^d, \gamma_{\mathbb{R}}^{\otimes d}) \\ \dim H = \infty, & (H, ?\,) & \longleftarrow & (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \gamma_{\mathbb{R}}^{\otimes \mathbb{N}}), \end{array}$$

où les flèches sont déterminées par le choix d'une base orthonormée de H. La mesure $\gamma_{\mathbb{R}}^{\otimes \mathbb{N}}$ existe[3] et elle est caractérisée par le fait que, pour toute partie finie I de $\mathbb{N}$, sa projection sur $\mathbb{R}^I$ est la mesure $\gamma_{\mathbb{R}}^{\otimes I}$. Nous voudrions considérer sa mesure image par l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & H \\ x = (x_0, x_1, \ldots) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i \geqslant 0} x_i e_i. \end{array} \tag{2}$$

Bien entendu, il y a une différence fondamentale avec le cas où H est de dimension finie : l'application ci-dessus n'est pas un isomorphisme linéaire et n'est définie que sur un

1. Ces fonctions sont continues sur $[0,1]$: on peut définir leur valeur en un point. Par ailleurs, contrairement à la signification habituelle de cette notation, nous n'imposons pas aux fonctions de s'annuler en 1.

2. Il s'agit de mesures σ-finies, c'est-à-dire telles que l'espace entier soit une réunion dénombrable d'ensembles mesurables de mesure finie. Sans cette hypothèse, la mesure de comptage définie par $m(A) = \sharp A$ conviendrait !

3. On peut en donner une construction assez explicite à partir de la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$.

sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, en l'occurrence ℓ^2. Si on avait $\gamma_{\mathbb{R}}^{\otimes \mathbb{N}}(\ell^2) = 1$ ou tout du moins si cette mesure était strictement positive, on pourrait définir une mesure image. Mais c'est le contraire qui se produit.

LEMME 1.1. — *Le sous-espace ℓ^2 de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est de $\gamma_{\mathbb{R}}^{\otimes \mathbb{N}}$-mesure nulle.*

Démonstration. — Définissons sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la fonction $e^{-\sum_i x_i^2}$ en la prolongeant par 0 hors de ℓ^2. Son intégrale vaut

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} e^{-\sum_i x_i^2}\, d\gamma_{\mathbb{R}}^{\otimes \mathbb{N}} &= \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \lim_{n\to\infty} e^{-\sum_{i=0}^n x_i^2}\, d\gamma_{\mathbb{R}}^{\otimes \mathbb{N}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{i=0}^n x_i^2}\, d\gamma_{\mathbb{R}}^{\otimes n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \prod_{i=0}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_i^2} \frac{dx_i}{\sqrt{2\pi}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

La fonction $e^{-\sum_i x_i^2}$ étant strictement positive sur ℓ^2, on a le résultat. □

Pour comprendre comment on contourne ce problème, la meilleure chose à faire est de penser à $\sum x_i e_i$ comme à une série de fonctions à coefficients aléatoires, par exemple de fonctions de H_0^1. Nous venons de voir que cette série ne converge presque jamais – au sens de la mesure $\gamma_{\mathbb{R}}^{\otimes \mathbb{N}}$ – dans H_0^1. En revanche, on peut montrer[4] qu'elle converge presque partout en un sens plus faible, par exemple, dans le cas de H_0^1, uniformément[5]. Pour $\gamma_{\mathbb{R}}^{\otimes \mathbb{N}}$-presque tout x, cette série définit une fonction continue sur $[0,1]$: l'application (2) est finalement définie presque partout de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dans $C_0([0,1])$ et sa mesure image est par définition la mesure de Wiener, que nous noterons W.

Ce qui est "paradoxal", c'est que $W(H_0^1) = 0$: c'est ce que nous dit le lemme 1.1. Nous avons ici une belle illustration d'un phénomène général : lorsqu'on essaie de construire une mesure de probabilités sur un espace fonctionnel de dimension infinie (c'est-à-dire d'en choisir un élément au hasard), on trouve souvent une mesure portée par un espace plus gros et dans lequel l'espace initial est de mesure nulle. Pour donner un autre exemple, si l'on essaie de construire la mesure gaussienne sur $L^2([0,1])$, on trouve une mesure portée par un espace de distributions sur $[0,1]$, à peu de choses près des dérivées de fonctions continues. Cette mesure s'appelle le bruit blanc sur $[0,1]$.

Lorsque, dans un cadre beaucoup plus général, on dispose sur un certain ensemble d'une fonction positive qui s'apparente un tant soit peu à une énergie, on peut essayer d'y construire une mesure de probabilités, sur le modèle de l'expression (1). Les mesures de ce type jouent bien entendu un rôle fondamental en physique statistique, puisqu'elles décrivent l'équilibre d'un système macroscopique en contact avec un thermostat. Elles

4. Ceci repose sur un résultat simple du type suivant : pour $\gamma_{\mathbb{R}}^{\otimes \mathbb{N}}$-presque tout $x = (x_1, x_2, \ldots)$, on a $\limsup (x_n/\sqrt{2\log n}) = 1$.

5. Il faut cependant noter que, si le résultat ne dépend pas de la base de H_0^1 qu'on choisit, la facilité de la preuve en dépend beaucoup.

apparaissent également en mécanique quantique, lorsqu'on utilise le formalisme des intégrales de chemins de Feynman. Par exemple, en électrodynamique quantique, le champ électromagnétique est représenté par une connexion sur un fibré principal en cercles et, d'après Feynman, on doit attribuer à la connexion ω l'amplitude de probabilités $e^{\frac{i}{\hbar}S(\omega)}$, où S est l'énergie de Yang-Mills de A, que nous définirons dans la section suivante. On est ainsi amené à considérer la mesure définie sans rigueur par

$$d\mu(\omega) = \frac{1}{Z}\, e^{\frac{i}{\hbar}S(\omega)}\, \mathcal{D}\omega$$

sur un espace de connexions. Même en dimension finie, les mesures complexes de ce type sont difficiles à étudier : il est bien plus facile de calculer une intégrale gaussienne qu'une intégrale de Fresnel. C'est pourquoi nous allons immédiatement poser $\hbar = -2i$. Le but de ce texte est d'expliquer à quoi ressemble la mesure μ dans ce cas.

2. L'énergie de Yang-Mills

Nous allons maintenant présenter le cadre géométrique dans lequel nous pourrons ensuite définir la mesure de Yang-Mills.

Soient M une variété compacte munie d'une métrique riemannienne, G un groupe de Lie compact connexe et P un fibré principal de groupe de structure G sur M. Une connexion sur P est un élément ω de $T^*P \otimes \mathfrak{g}$ qui coïncide avec l'identité sur les vecteurs verticaux[6] et qui vérifie, pour tout $g \in G$, $R_g^*\omega = \mathrm{Ad}(g^{-1})\omega$. Sa courbure est la forme $\Omega \in \bigwedge^2(T^*P) \otimes \mathfrak{g}$ définie par $\Omega(X,Y) = d\omega(X,Y) + [\omega(X),\omega(Y)]$. Cette forme s'annule dès que l'un de ses arguments est vertical et elle a la même propriété d'équivariance que ω, si bien qu'on peut l'identifier à un élément de $\bigwedge^2(T^*M) \otimes \mathrm{Ad(P)}$, où $\mathrm{Ad(P)}$ est le fibré dont les sections globales sont les applications G-équivariantes de P dans $\mathfrak{g}$.

Comme G est compact, on dispose sur $\mathfrak{g}$ d'un produit scalaire invariant par adjonction, qu'on suppose normalisé pour que le volume riemannien correspondant de G soit égal à 1. La forme $\Omega \wedge *\Omega$ est une forme de degré maximal sur M à valeurs dans $\mathrm{Ad(P)}^{\otimes 2}$. Grâce au produit scalaire sur $\mathfrak{g}$, on en déduit une forme à valeurs réelles, dont l'intégrale sur M est l'énergie de Yang-Mills de ω :

$$S(\omega) = \int_M \langle \Omega \wedge *\Omega \rangle.$$

Nous allons nous intéresser au cas particulier ou M est une surface. Dans ce cas, nous ne nous servons de la structure riemannienne que pour identifier une 2-forme avec une 0-forme, ce pour quoi il suffit en fait d'une forme volume. En fait, nous n'utilisons même que la valeur absolue de cette forme volume : dans ce cas, l'énergie ne dépend que d'une densité sur M, que nous noterons σ.

6. Via l'identification, en chaque point p de P, entre $\mathfrak{g}$ et l'espace $T_p^V P$ des vecteurs verticaux en p, par l'application $\mathfrak{g} \longrightarrow T_p^V P$ qui à X associe $\frac{d}{dt}|_{t=0}[p.\exp(tX)]$.

L'espace $\mathscr{A}$ des connexions sur P est un espace affine modelé sur $T^*M \otimes \mathrm{Ad}(P)$ et le groupe $\mathscr{G}$ des automorphismes G-équivariants de P au-dessus de l'identité de M agit de façon affine sur $\mathscr{A}$. Cette action transforme la courbure d'une connexion par conjugaison en chaque point, si bien que l'énergie de Yang-Mills est constante sur les orbites : on a bien une fonctionnelle

$$S : \mathscr{A}/\mathscr{G} \longrightarrow [0,\infty[.$$

La mesure de Yang-Mills est la mesure de Gibbs de cette énergie, c'est-à-dire, la mesure sur $\mathscr{A}/\mathscr{G}$ définie par

$$d\mu([\omega]) = \frac{1}{Z}\, e^{-\frac{1}{2}S([\omega])}\, \mathscr{D}[\omega], \tag{3}$$

avec $Z = \int_{\mathscr{A}/\mathscr{G}} e^{-\frac{1}{2}S([\omega])}\, \mathscr{D}[\omega]$.

Si on pense à l'énergie $S(\omega)$ comme à la norme L^2 de la dérivée de ω, on voit à quel point cette expression est similaire à celle qui définit la mesure de Wiener comme mesure gaussienne sur l'espace H^1. Nous pouvons déjà nous attendre à ce que la mesure de Yang-Mills soit portée par un espace de connexions beaucoup moins régulières que ce qu'il faudrait pour définir l'énergie S. Mais il y a une différence importante avec la mesure de Wiener : l'action $S(\omega)$ n'est pas une fonction quadratique de ω, mais une fonction quartique – sauf si G est abélien. En général, on ne peut par exemple pas identifier facilement un espace de Sobolev des connexions d'énergie finie. Il est vrai que les connexions $L^{2,1}$ (c'est-à-dire H^1) ont une énergie finie[7], mais n'y en a-t-il pas d'autres? La présence de ce terme quartique, c'est-à-dire la non-commutativité de G, ont en tout cas des conséquences très importantes sur la structure de la mesure, comme nous le verrons à la fin de cette présentation.

3. Dualité connexions-lacets

La première étape de la construction de μ consiste à se ramener à un cadre où l'on sait bien construire des mesures, ou disons, mieux que sur un quotient d'un espace affine par un groupe de dimension infinie. De ce point de vue, les espaces de fonctions sont de très bons candidats : on sait, sous des hypothèses topologiques assez faibles et avec des données suffisantes, construire des mesures de probabilités sur des espaces du type $\mathscr{F}(X,E)$, où X et E sont deux ensembles. On appelle une telle mesure un processus stochastique indexé par X à valeurs dans E.

Pour plonger un espace donné, par exemple $\mathscr{A}/\mathscr{G}$ dans un espace de fonctions, on peut essayer de déterminer un ensemble L de fonctions sur $\mathscr{A}/\mathscr{G}$ à valeurs dans un certain ensemble G, de telle sorte que L sépare les points de $\mathscr{A}/\mathscr{G}$. Alors l'évaluation détermine un plongement $\mathscr{A}/\mathscr{G} \subset \mathscr{F}(L,G)$. Les éléments de L jouent le rôle d'observables : ils sont définis comme des fonctions pertinentes sur $\mathscr{A}/\mathscr{G}$ et ils indexent finalement

7. En deux variables, on a $L^{2,1} \subset L^p$ pour tout $p < \infty$, en particulier pour $p = 4$.

le processus stochastique que l'on construit. D'ailleurs, les fonctions mesurables fondamentales pour un processus indexé par L sont justement les fonctions d'évaluation $ev_l : \mathcal{F}(L,G) \longrightarrow G$.

La façon la plus simple de construire une fonction intéressante sur $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ est la suivante. On commence par choisir sur M un lacet assez régulier l, disons de classe C^1 par morceaux. Étant donné une connexion ω sur P et un point p de P au-dessus de la base de l, on peut relever l de façon unique en un chemin horizontal – c'est-à-dire le long duquel ω s'annule – partant de p. Contrairement à l, ce chemin n'est en général pas un lacet, mais il aboutit dans la fibre au-dessus de la base de l, en un point qui peut s'écrire $p.g$ pour un unique élément g de G. S'il est vrai que g dépend du choix de p et de celui de ω dans son orbite sous $\mathcal{G}$, il n'en dépend qu'à conjugaison près. Ainsi, on peut associer à l la fonction H_l de $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ dans G/Ad qui à $[\omega]$ associe la classe de conjugaison de l'holonomie le long de l, pour n'importe quelle connexion dans la classe $[\omega]$.

On peut même faire un peu mieux si on remarque que, sous l'action du groupe de jauge $\mathcal{G}$, l'holonomie le long de plusieurs lacets basés au même point est conjuguée par le même élément de G. Ainsi, on peut associer à toute famille finie $l_1, \ldots, l_n$ de lacets basés au même point une fonction

$$H_{l_1,\ldots,l_n} : \mathcal{A}/\mathcal{G} \longrightarrow G^n/Ad,$$

où l'espace d'arrivée est le quotient de G^n par l'action diagonale de G par conjugaison. Ces fonctions constituent un ensemble complet d'observables dans le sens suivant.

PROPOSITION 3.1. — *Les fonctions $H_{l_1,\ldots,l_n}$, où n est un entier et $l_1, \ldots, l_n$ des lacets de classe C^1 par morceaux basés au même point, séparent les points sur $\mathcal{A}/\mathcal{G}$.*

Remarques.

1 – La classe des lacets ne joue presque aucun rôle dans ce résultat. Il suffit d'avoir une classe assez vaste pour contenir, pour chaque paire de points de M, un lacet passant par ces deux points. On pourrait donc prendre (et cela peut avoir des avantages dans certaines situations) des lacets C^∞ par morceaux, analytiques réels par morceaux, géodésiques par morceaux... Parmi ces trois classes, celle des lacets lisses par morceaux se distingue cependant par le fait qu'elle est invariante par difféomorphismes (qui préservent σ ou non), contrairement aux deux autres.

2 – Pour une grande classe de groupes, on peut se restreindre aux fonctions pour lesquelles $n = 1$. C'est vrai en particulier pour les groupes classiques (orthogonaux, unitaires, symplectiques), leurs produits, et leurs revêtements (voir [7, 4]). Ceci n'est cependant pas élémentaire, et c'est de plus une propriété qui ne dépend pas d'une façon simple de G. Par exemple, je ne sais pas s'il vrai que si cette propriété est vraie pour un certain G, elle l'est pour un quotient de G par un sous-groupe central.

3 – Les physiciens tendent en général à se contenter des fonctions pour lesquelles $n = 1$ et dans ce cas, il est commode de les composer avec une fonction complexe sur G,

invariante par conjugaison. Ainsi, pour toute représentation α de G dans un groupe de matrice, on peut construire la *boucle de Wilson* $W_{\alpha,l} = \mathrm{tr}\,\alpha(H_l)$.

La remarque la plus importante à propos de la proposition précédente est peut-être finalement celle-ci : on peut, pourvu que M soit connexe, se restreindre à l'ensemble des lacets basés en un unique point, choisi arbitrairement. En effet, soit m un tel point de référence et L_mM l'ensemble des lacets de la classe voulue (disons lisses par morceaux) basés en m. Si $l_1,\ldots,l_n$ sont des lacets basés en un point m' de M, alors on a, dès que c est un chemin lisse sur M reliant m à m', l'égalité de fonctions

$$H_{l_1,\ldots,l_n} = H_{cl_1c^{-1},\ldots,cl_nc^{-1}}$$

et il n'apparaît dans le membre de droite que des lacets de L_mM. Ainsi, on peut construire une fonction à valeurs dans un espace de dimension infinie

$$H_{\{l:l\in L_mM\}} : \mathscr{A}/\mathscr{J} \longrightarrow G^{L_mM}/\mathrm{Ad}$$

et la proposition précédente nous dit que cette fonction est injective.

Nous avons presque atteint notre but de plonger $\mathscr{A}/\mathscr{J}$ dans un espace de fonctions. L'action de $\mathscr{J}$ nous a contraint à quotienter cet espace par l'action d'un groupe de dimension finie, mais il se trouve que ce n'est pas trop gênant[8]. Nous allons même oublier ce quotient pendant un moment, il sera toujours temps d'y repenser plus tard. Nous allons donc procéder comme si nous pouvions plonger $\mathscr{A}/\mathscr{J}$ dans $\mathscr{F}(LM,G)$, où LM est l'ensemble des lacets sur M. Nous allons même parfois faire pire et travailler dans l'espace $\mathscr{F}(CM,G)$ des fonctions de CM, l'espace des chemins sur M, à valeurs dans G.

4. Théorie de jauge sur réseau

Lorsqu'on veut construire une mesure μ sur un ensemble du type $\mathscr{F}(X,E)$, la donnée essentielle est celle d'une famille cohérente de mesures marginales de dimension finie. Pour toute famille finie $(x_1,\ldots,x_n)$ d'éléments de X, il faut donner une mesure sur E^n, qui sera finalement la mesure image de μ par l'application $(ev_{x_1},\ldots,ev_{x_n}) : \mathscr{F}(X,E) \longrightarrow E^n$. Divers théorèmes, dont le prototype est dû à Kolmogorov, assurent que, sous les conditions de compatibilité nécessaires les plus simples, et sous quelques hypothèses topologiques, la donnée d'une telle famille de marges permet de construire μ.

Dans notre cas, il s'agit, étant donné n lacets, de décrire une mesure sur G^n, que nous interprétons comme la distribution de l'holonomie aléatoire le long de nos n lacets[9]. Une façon commode de décrire cette mesure marginale est de supposer que nos n lacets peuvent être réalisés comme circuits dans un graphe sur M. Nous allons donc en fait décrire d'un coup l'holonomie aléatoire le long de tous les circuits (et même tous les chemins !) dans un tel graphe.

8. C'est en fait heureux, car cela contribue de façon essentielle à la différence qu'il y a entre les cas où G est abélien et ceux où il ne l'est pas.

9. Nous oublions donc temporairement l'action du groupe de jauge et les problèmes d'équivariance dans les fibres. Ce dernier point serait légitime si P était supposé trivial.

Un graphe sur M sera pour nous la donnée d'un ensemble Γ de r arêtes $a_1,\dots,a_r$, des chemins orientés plongés par morceaux dans M qui ne se rencontrent qu'en leurs extrémités. Une connexion discrète sur Γ sera une fonction de Γ dans G, c'est-à-dire un élément de G^Γ. Pour tout chemin c dans Γ, nous pouvons définir une fonction $h_c : G^\Gamma \longrightarrow G$ en multipliant (en ordre inverse mais cela ne change rien) les éléments de G que nous rencontrons sur Γ en parcourant c. Par exemple, si $c = a_3 a_5^{-1} a_2$, nous posons $h_c(g_1,\dots,g_r) = g_2 g_5^{-1} g_3$.

Pour décrire une connexion discrète aléatoire, nous allons construire une mesure de probabilités μ_Γ sur G^Γ. Sous cette mesure, les fonctions h_c seront des variables aléatoires à valeurs dans G et nous prendrons leurs distributions [10] comme mesures marginales de la mesure de Yang-Mills.

L'avantage de travailler dans un cadre discret est que nous nous sommes ramenés à des objets de dimension finie. Il y a par exemple une mesure de probabilités de référence sur $G^\Gamma \simeq G^r$, qui est la mesure $dg_1 \dots dg_r$, le produit des mesures de Haar normalisées sur chaque facteur. Nous allons définir μ_Γ sous la forme $D\, dg_1 \dots dg_r$, où D est une certaine densité.

Comme M est une surface, un graphe y découpe des faces, qui sont les composantes connexes de son complémentaire. Nous supposons que Γ est assez fin pour que toutes ses faces soient difféomorphes à des disques [11]. Une face F de Γ a un bord ∂F, qui est un circuit défini à orientation et choix d'une origine près. La fonction $h_{\partial F} : G^\Gamma \longrightarrow G$ est donc définie à conjugaison et inversion près. Si $p : G \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction centrale invariante par inversion, alors $p \circ h_{\partial F}$ est une fonction bien définie sur G^Γ.

La fonction p que nous allons considérer est le noyau de la chaleur sur G. Il s'agit de l'unique fonction $p : \mathbb{R}_+^* \times G \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ qui à (t,g) associe $p_t(g)$ telle que

(i) $\left(\frac{\Delta}{2} - \partial_t\right) p = 0$,

(ii) pour toute fonction f continue sur G,

$$\lim_{t\to 0} \int_G f(g)\, p_t(g)\, dg = f(e),$$

où e désigne l'élément neutre de G.

Rappelons que σ est une densité, qui nous permet de mesurer l'aire d'une partie de M, par exemple d'une face de Γ. Nous pouvons maintenant définir la mesure μ_Γ sur G^Γ :

$$d\mu_\Gamma = \frac{1}{Z} \prod_F p_{\sigma(F)} \circ h_{\partial F}\, dg_1 \dots dg_r,$$

où le produit est pris sur toutes les faces de Γ. La constante Z (la fonction de partition) assure que μ_Γ soit de masse totale égale à 1.

10. La distribution d'une application mesurable H d'un espace mesuré $(\mathcal{F},\mathcal{C},\mu)$ dans un espace mesurable $(G,\mathcal{B}(G))$ est sa mesure image $H_*\mu$.

11. Ceci équivaut à demander la surjectivité de l'application $i_* : H_1(\Gamma,\mathbb{Z}) \to H_1(M,\mathbb{Z})$ induite par l'inclusion.

On peut comprendre un lien entre cette définition et l'expression (3) de la façon suivante. La mesure de Yang-Mills attribue à une connexion un poids d'autant plus faible qu'elle a une grande courbure, en norme L^2. Lorsqu'on fixe un graphe sur M, l'holonomie le long du bord d'une face est liée à la courbure totale le long de cette face. En particulier, si la face a une petite aire, il est peu probable, sous la mesure de Yang-Mills, que l'holonomie le long du bord soit très différente de e, l'élément neutre de G. C'est précisément le rôle du facteur $p_{\sigma(F)} \circ h_{\partial F}$ que d'attribuer un poids très faible à une configuration dans laquelle l'holonomie le long du bord d'une petite face serait éloignée de e. Bien entendu, cette explication sommaire ne justifie pas le choix particulier du noyau de la chaleur. C'est A. Migdal [6] qui a le premier indiqué que c'était, physiquement parlant, le bon choix [12]. Du point de vue mathématique; la propriété essentielle de p est d'être un semigroupe de convolution, c'est-à-dire de satisfaire, pour tous $s,t > 0$ et $x \in G$,

$$\int_G p_t(y)\, p_s(y^{-1}x)\; dy = p_{t+s}(x).$$

C'est en effet ce qui assure la propriété fondamentale de la théorie discrète, son invariance par subdivision : si Γ_1 est un raffinement [13] de Γ, il y a une application naturelle de G^{Γ_1} dans G^{Γ} et cette application envoie la mesure μ_{Γ_1} sur μ_Γ. Ceci est exactement équivalent à la condition de compatibilité entre les mesures marginales qui permet d'appliquer un théorème de Kolmogorov.

Il y a bien entendu d'autres semigroupes de convolution sur G que le noyau de la chaleur, et on pourrait construire une théorie discrète parfaitement cohérente en les utilisant à la place de p. Ceci avait déjà été remarqué par S. Albeverio *et al.* [1].

Voici maintenant où nous en sommes : nous avons construit une mesure de probabilités sur G^Γ et si noue revenons à nos n lacets du début de cette section, nous savons maintenant définir la mesure marginale qui leur est associée, c'est la mesure image sur G^n de μ_Γ par l'application $(h_{l_1}, \ldots, h_{l_n})$.

Comme de plus la théorie discrète est invariante par subdivision, ces mesures marginales sont cohérentes et le travail est presque fini.

5. Mesure de Yang-Mills

Il y a malheureusement un problème, qui rend la construction bien plus lourde que ce qu'on pouvait espérer. Si nous prenons sur M des lacets, même lisses par morceaux, en nombre fini, rien ne nous assure qu'il existe un graphe avec un nombre fini de faces tel que ces chemins soient des circuits dans ce graphe. Autrement dit, la théorie discrète ne nous permet de décrire qu'une partie des mesures marginales de la mesure de Yang-Mills.

Pour contourner ce problème, on peut par exemple fixer une métrique sur M et considérer les chemins géodésiques par morceaux. Alors le problème disparaît tempo-

12. Il a en fait défini p comme somme d'une série, sans l'identifier comme le noyau de la chaleur.
13. C'est-à-dire, si toute arête de Γ est un chemin de Γ_1.

rairement et on peut construire un processus à valeurs dans G, mais indexé par les seuls lacets géodésiques par morceaux. L'inconvénient est que cette classe n'est pas invariante par les difféomorphismes de M qui préservent la densité σ, alors que l'énergie de Yang-Mills, elle, l'est.

Il est toutefois possible, avec un peu d'efforts, en approchant des lacets lisses par morceaux par des lacets géodésiques par morceaux, d'étendre le processus à toute la classe des lacets lisses par morceaux et de montrer que le processus ainsi défini ne dépend pas de la métrique qu'on a choisie.

Le résultat d'existence et d'unicité de la mesure de Yang-Mills est le suivant.

THÉORÈME 5.1. — *Soit M une surface compacte*[14]. *Soit CM l'ensemble des chemins plongés par morceaux sur M. Pour tout $c \in CM$, notons H_c l'évaluation en c, qui applique $\mathscr{F}(CM,G)$ sur G. Considérons l'espace mesurable $(\mathscr{F}(CM,G),\mathscr{C})$ muni de la tribu cylindrique*[15]. *Il existe une unique mesure de probabilités μ sur $(\mathscr{F}(CM,G),\mathscr{C})$ telle que les propriétés suivantes soient vérifiées.*

1. Soit $(c_1,\dots,c_n)$ une famille finie de chemins. S'il existe un graphe Γ sur M tel que $c_1,\dots,c_n$ soient des chemins dans Γ, alors la distribution de $(H_{c_1},\dots,H_{c_n})$ sous μ est égale à celle de $(h_{c_1},\dots,h_{c_n})$ sous μ_Γ.

2. Pour tout chemin c et toute suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$ de chemins qui convergent en longueur[16] *vers c, les variables H_{c_n} convergent en probabilité*[17] *vers c.*

Ces deux propriétés caractérisent μ, qui satisfait de plus les deux suivantes.

3. Si c_1 et c_2 sont deux chemins qu'il est possible de concaténer, alors $H_{c_1c_2} = H_{c_2}H_{c_1}$ μ-presque partout.

4. Si $\psi : M \longrightarrow M$ est un difféomorphisme tel que $\psi^*\sigma = \sigma$, alors ψ préserve CM et, pour toute famille $c_1,\dots,c_n$ de lacets, $(H_{c_1},\dots,H_{c_n})$ et $(H_{\psi(c_1)},\dots,H_{\psi(c_n)})$ ont même distribution sous μ.

Remarques. — Cet énoncé n'est pas tout à fait satisfaisant pour plusieurs raisons.

1 – Tout d'abord, l'action du groupe de jauge a disparu : on a défini un transport aléatoire le long de chemins ouverts, alors qu'il n'y a aucune quantité invariante par transformation de jauge associée à un tel chemin. Il y a manifestement une partie de l'information qui n'est pas pertinente dans le processus qu'on a construit[18]. Pour élimi-

14. M peut avoir un bord, mais nous n'en parlerons pas ici.

15. C'est la plus petite tribu telle que toute les applications H_c soient mesurables. Comme CM est non-dénombrable, cette tribu est strictement plus petite que la tribu borélienne de la topologie produit sur $\mathscr{F}(CM,G)$.

16. On dit que $c_n \to c$ en longueur si, une métrique étant choisie sur M, on peut paramétrer les c_n de telle façon qu'ils convergent uniformément vers c et si la longueur de c_n converge vers celle de c. La topologie ainsi définie est indépendante du choix de la métrique sur M.

17. Notons d la distance riemannienne biinvariante sur G. On dit que $H_n \to H$ en probabilité si, pour tout $\epsilon > 0$, $\mu(\{d(H_n,H) > \epsilon\})$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

18. On peut par exemple facilement montrer que l'holonomie aléatoire le long d'un chemin ouvert est distribuée selon la mesure invariante sur G.

ner ce trop-plein d'information, on peut étudier la sous-tribu, notée $\mathcal{I}$, de $\mathcal{C}$ formée des ensembles mesurables invariants sous l'action du "groupe de jauge" $\mathcal{F}(M,G)$ et montrer qu'elle est engendrée par les fonction $H_{l_1,\dots,l_n}$ définies plus haut. On se place alors sur l'espace de probabilités plus petit $(\mathcal{F}(LM,G),\mathcal{I})$, qui est le bon espace de probabilités pour définir des quantité s aléatoires invariantes par transformations de jauge.

2 – D'un point de vue probabiliste, l'espace sur lequel on a construit la mesure est beaucoup trop gros : en effet, on a construit une fonction aléatoire de l'ensemble des chemins (ou des lacets) sur M à valeurs dans G, mais on ne sait rien de la régularité de cette fonction. Cette question n'est pas résolue et le mieux qu'on puisse dire est qu'il est possible de construire le processus de telle sorte que cette fonction soit (avec probabilité 1) multiplicative. Autrement dit, il est possible de garantir qu'avec probabilité 1, pour tous $c_1,c_2 \in CM$ tels que c_1c_2 existe, on a $H_{c_1c_2} = H_{c_2}H_{c_1}$. Ceci est bien plus fort que la propriété 3. ci-dessus, qui affirme que la multiplicativité a lieu pour tout couple de chemins hors d'un ensemble négligeable *qui dépend des chemins.*

3 – Les deux remarques précédentes peuvent sembler incompatibles. En effet, la première rappelle qu'on ne peut associer mieux qu'une classe de conjugaison à un lacet et la seconde affirme qu'on peut multiplier les holonomies le long de lacets basés au même point. Or, comment pourrait-on multiplier des classes de conjugaison ? En fait, on peut multiplier des classes de conjugaison diagonale. Voyons sur des exemples comment cela fonctionne. La multiplication, vue comme application $G \times G \longrightarrow G$, est équivariante sous l'action de G par conjugaison diagonale : $(gxg^{-1})(gyg^{-1}) = g(xy)g^{-1}$. De même, la multiplication des deux premiers facteurs $G^n \longrightarrow G^{n-1}$ est équivariante. On peut donc passer au quotient et définir la multiplication des deux premiers facteurs $G^n/\mathrm{Ad} \longrightarrow G^{n-1}/\mathrm{Ad}$. La propriété de multiplicativité s'énonce simplement en disant qu'avec probabilité 1, cette application envoie $H_{l_1,\dots,l_n}$ sur $H_{l_2l_1,l_3,\dots,l_n}$ lorsque $l_1,\dots,l_n$ sont des lacets basés au même point.

6. Courbure d'une connexion aléatoire

Dans cette dernière section, nous allons énoncer deux résultats qui soulignent l'influence de la nature de G sur la structure de la mesure.

Supposons que G soit abélien. Dans ce cas, la courbure d'une connexion s'identifie à une fonction imaginaire pure sur M. Elle est simplement la différentielle extérieure de la connexion et elle en dépend donc linéairement. Nous pouvons, au prix d'un changement de variables formel[19], réécrire l'expression de μ en fonction de la courbure :

$$d\mu(\Omega) = \frac{1}{Z'}\, e^{-\frac{1}{2}\|\Omega\|^2_{L^2}}\ \mathcal{D}\Omega.$$

Cette expression est celle de la mesure gaussienne sur $L^2(M,\sigma)\otimes i\mathbb{R}$, telle que nous l'avons étudiée dans la première section. On peut donc lui donner un sens et comparer ce qu'on obtient avec la courbure de la connexion aléatoire qu'on a construite. Pour

19. Changement de variables linéaire donc dans lequel le jacobien est constant...

accéder à cette courbure, on calcule les holonomies aléatoires le long des bords de petits disques, en s'inspirant de la relation, valable lorsque $D(x,r)$ est un cercle de rayon r petit autour de x,

$$H_{\partial D(x,r)} \simeq \exp \int_{D(x,r)} \Omega \simeq 1 + i\pi r^2 \Omega(x).$$

On peut alors montrer que la mesure de Yang-Mills μ est très peu différente de la mesure gaussienne sur $L^2(M,\sigma)$: on peut passer de la première à la seconde par un procédé d'approximation simple et de la seconde à la première[20] par une transformation encore plus simple.

Pour passer de la mesure de Yang-Mills à une mesure gaussienne lorsque G est abélien, on utilise de petits lacets. Pour quantifier leur importance dans la structure de la mesure, on peut définir une certaine tribu asymptotique sur l'espace de probabilités où est définie μ. Munissons M d'une métrique, pour pouvoir parler de la longueur des lacets. Pour tout $\epsilon > 0$, on peut définir

$$\mathscr{I}_\epsilon = \sigma(H_{l_1,\dots,l_n} : \ell(l_i) < \epsilon).$$

Cette tribu mesure l'information qui est accessible lorsqu'on connaît l'holonomie aléatoire le long des lacets de longueur inférieure à ϵ. Lorsque ϵ diminue, cette tribu diminue aussi et on peut regarder la limite

$$\mathscr{I}_{0^+} = \bigcap_{\epsilon>0} \mathscr{I}_\epsilon.$$

Lorsque G est abélien, la mesure gaussienne sur $L^2(M,\sigma)$ qu'on extrait de μ est la mesure image de μ par une application mesurable par rapport à $\mathscr{I}_{0^+}$. Si M est simplement connexe, cette tribu est en fait aussi grosse que la tribu $\mathscr{I}$ elle-même[21].

En revanche, lorsque G est semi-simple, c'est-à-dire dans ce contexte, lorsque son centre est discret, on peut montrer[22] que la tribu $\mathscr{I}_{0^+}$ est dégénérée, c'est-à-dire que tous les ensembles qu'elle contient sont soit de mesure nulle, soit de mesure un : du point de vue probabiliste, elle est sans intérêt.

Ceci montre une différence radicale entre les cas abéliens et semi-simple. La structure locale de la mesure lorsque G est semi-simple n'est pas encore bien comprise, et il est vraisemblable qu'il faille l'explorer non pas avec des petits lacets comme on l'a fait plus haut, mais avec des petits lacets basés en point fixe, des sortes de petits lassos. Cette approche a été proposée par L. Gross [3] mais n'a, malgré un certain nombre de travaux, pas encore été menée à son terme.

---

20. Ceci n'est exact que si M est simplement connexe. En effet, dans le cas contraire, la courbure ne suffit pas tout à fait à reconstituer la connexion.

21. Pour s'en convaincre, il suffit de penser qu'on peut découper le domaine délimité par un lacet en sous-domaine arbitrairement petits. Alors, si on connaît l'holonomie le long de chaque sous-domaine, il suffit de tout ajouter pour trouver l'holonomie le long du lacet. On se doute aussi que, lorsque G n'est plus commutatif et qu'on ne connaît plus que les classes de conjugaison des holonomies, il risque d'y avoir des problèmes.

22. Le résultat que je sais démontrer est en fait moins général mais l'idée est la même.

Bibliographie

[1] Sergio ALBEVERIO, Raphael HØEGH-KROHN, and Helge Holden. Stochastic Lie group-valued measures and their relations to stochastic curve integrals, gauge fields and Markov cosurfaces. In *Stochastic processes—mathematics and physics (Bielefeld, 1984)*, pages 1–24. Springer, Berlin, 1986.

[2] Bruce K. DRIVER. YM_2: continuum expectations, lattice convergence, and lassos. *Comm. Math. Phys.*, 123(4):575–616, 1989.

[3] Leonard GROSS. A Poincaré lemma for connection forms. *J. Funct. Anal.*, 63(1):1–46, 1985.

[4] Thierry LÉVY. Wilson loops in the light of spin networks. *math-ph/0306059*, 2003.

[5] Thierry LÉVY. Yang-mills measure on compact surfaces. *Mem. Amer. Math. Soc.*, To appear.

[6] A. A. MIGDAL. Recursion equations in gauge field theories. *Sov. Phys. JETP*, 42(3):413–418, 1975.

[7] Ambar SENGUPTA. Gauge invariant functions of connections. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 121(3):897–905, 1994.

[8] Ambar SENGUPTA. Gauge theory on compact surfaces. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 126(600):viii+85, 1997.

[9] Edward WITTEN. On quantum gauge theories in two dimensions. *Comm. Math. Phys.*, 141(1):153–209, 1991.

[10] Edward WITTEN. Two-dimensional gauge theories revisited. *J. Geom. Phys.*, 9(4):303–368, 1992.

Thierry LÉVY
CNRS, UMR 7501 – IRMA
7, rue René Descartes
67084 STRASBOURG Cedex (France)
`thierry.levy@math.u-psud.fr`