Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Nader Yeganefar

# Formes harmoniques $L^2$ sur les variétés asymptotiquement hyperboliques complexes

*Séminaire de Théorie spectrale et géométrie*, tome 21 (2002-2003), p. 55-59

<http://www.numdam.org/item?id=TSG_2002-2003__21__55_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
Volume **21** (2003) 55–59

# FORMES HARMONIQUES $L^2$ SUR LES VARIÉTÉS ASYMPTOTIQUEMENT HYPERBOLIQUES COMPLEXES

*Nader YEGANEFAR*

## 1. Introduction

Le théorème classique de Hodge-de Rham pour une variété riemannienne $(M,g)$ compacte identifie l'espace $\mathcal{H}^*(M,g)$ des formes harmoniques $L^2$ à la cohomologie de cette variété. Lorsque $M$ n'est plus compacte, $\mathcal{H}^*(M,g)$ est encore intéressant à étudier, même s'il n'existe aucun résultat général qui en donne une interprétation topologique. Cependant, pour certaines géométries particulières, on dispose de résultats à la Hodge-de Rham : voir par exemple les travaux d'Atiyah, Patodi et Singer [APS] sur les variétés à bouts cylindriques, de Zucker [Z] sur certains produits tordus, de Mazzeo et Mazzeo-Phillips [M, MP] sur les variétés hyperboliques géométriquement finies, de Carron [C] sur les variétés plates à l'infini, etc.

Le but de cette note est de traiter (en partie) le cas des variétés dites asymptotiquement hyperboliques complexes au sens de Biquard et Herzlich [BH] (voir plus loin pour la définition). La méthode employée est tirée de [Y], et s'applique aussi à plusieurs autres cas. Nous allons montrer :

Théorème 1. — *Soit $(M^{2m},g)$ une variété riemannienne de dimension $2m$ portant une métrique asymptotiquement hyperbolique complexe. Alors on a les isomorphismes*

$$\mathcal{H}^k(M) \simeq \begin{cases} H_c^k(M), & si\, k < m-1, \\ H^k(M), & si\, k > m+1. \end{cases}$$

*De plus, $H_c^{m-1}(M)$ s'injecte dans $\mathcal{H}^{m-1}(M)$ et $\mathcal{H}^{m+1}(M)$ se surjecte dans $H^{m+1}(M)$.*

La suite de ce papier est organisée de la façon suivante : dans un premier temps, nous présentons quelques généralités sur les formes harmoniques $L^2$, et leur lien avec la $L^2$-

*2000 Mathematics Subject Classification:* 58J10.

cohomologie. Dans un deuxième temps, nous rappelons des faits sur les variétés asymptotiquement hyperboliques complexes. Enfin, nous finissons par la preuve du théorème 1.

*Remerciements.* Je tiens tout d'abord à remercier G. Carron pour son aide. Je remercie également V. Bayle de m'avoir invité et accueilli à Grenoble.

## 2. Formes harmoniques $L^2$ et $L^2$-cohomologie

Nous rappelons dans cette partie des faits bien connus sur le laplacien et la $L^2$-cohomologie (voir par exemple le papier de Lott [L] ou celui de Carron [C]). Soit $(M,g)$ une variété riemannienne complète. On note $C_0^\infty(\Lambda^k T^*M)$ (respectivement $L^2(\Lambda^k T^*M)$, etc.) l'ensemble des $k$-formes lisses à support compact (respectivement de carré intégrable, etc.) dans $M$. Le $k$-ème espace de $L^2$-cohomologie (réduite) de $M$ est défini par

$$H_2^k(M) = \left\{\alpha \in L^2(\Lambda^k T^*M) /\ d\alpha = 0\right\} \Big/ \overline{dC_0^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M)}^{L^2}.$$

Un autre espace très proche souvent considéré est l'espace de $L^2$-cohomologie non réduite, qui est le quotient de $\left\{\alpha \in L^2(\Lambda^k T^*M) /\ d\alpha = 0\right\}$ par $\{d\alpha /\ \alpha \in L^2(\Lambda^{k-1}T^*M),\ d\alpha \in L^2\}$, sans prendre d'adhérence. En général, $L^2$-cohomologie réduite et non réduite ne sont pas égales. Il y a néanmoins égalité en degré $k$ lorsque 0 n'est pas dans le spectre essentiel du laplacien $\Delta_k$ agissant sur les $k$-formes $L^2$. Dans la suite, "$L^2$-cohomologie" voudra dire "$L^2$-cohomologie réduite".

Il y a une interprétation de la $L^2$-cohomologie en termes de formes harmoniques. En effet, notons $\mathcal{H}^k(M)$ l'espace des $k$-formes harmoniques $L^2$ de $M$ :

$$\mathcal{H}^k(M) = \left\{\alpha \in L^2(\Lambda^k T^*M) /\ d\alpha = \delta\alpha = 0\right\},$$

où $\delta$ est l'opérateur défini initialement sur les formes lisses à support compact comme l'adjoint de $d$. Comme $M$ est complète, $\mathcal{H}^*(M)$ est aussi le noyau $L^2$ du laplacien $\Delta = (d+\delta)^2$. Un fait important est la décomposition de Hodge-de Rham-Kodaira :

$$L^2(\Lambda^k T^*M) = \mathcal{H}^k(M) \oplus \overline{dC_0^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M)} \oplus \overline{\delta C_0^\infty(\Lambda^{k+1}T^*M)},$$

et de plus,

$$\left\{\alpha \in L^2(\Lambda^k T^*M) /\ d\alpha = 0\right\} = \mathcal{H}^k(M) \oplus \overline{dC_0^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M)}.$$

On en déduit que

$$H_2^k(M) \simeq \mathcal{H}^k(M).$$

Maintenant, si $(M,g)$ est une variété avec un bord compact, et métriquement complète, on peut aussi définir des espaces de $L^2$-cohomologie absolue (ou relative, mais nous n'en aurons pas besoin). On note par $C_b^\infty(\Lambda^k T^*M)$ l'espace des $k$-formes lisses à support borné sur $M$, le support pouvant rencontrer le bord (contrairement à ce qui se passe pour les éléments de $C_0^\infty$). L'espace de $L^2$-cohomologie absolue est alors défini par :

$$H_2^k(M) = (\delta C_0^\infty(\Lambda^{k+1}T^*M))^\perp \Big/ \overline{dC_b^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M)}.$$

Cet espace est isomorphe à un espace de formes harmoniques vérifiant la condition absolue sur le bord $\partial M$ : si $i_\nu\alpha$ désigne le produit intérieur de la forme $\alpha$ par la normale $\nu$ sur $\partial M$, alors

$$H_2^k(M) \simeq \mathcal{H}_A^k(M) := \left\{\alpha \in L^2(\Lambda^k T^*M) / \, d\alpha = \delta\alpha = 0, i_\nu\alpha = 0\right\}.$$

## 3. Variétés asymptotiquement hyperboliques complexes

Nous allons considérer ici des variétés asymptotiquement hyperboliques complexes au sens de Biquard et Herzlich ("ACH" dans la terminologie de [BH]) et rappeler la construction de ces deux auteurs. Soit $\Sigma^{2m-1}$ une variété de dimension (réelle) $2m-1$, pseudo-convexe, munie d'une structure de contact CR. Si $\eta$ est une forme de contact, et $J$ une structure presque-complexe compatible sur l'hyperplan de contact $H$, on dispose sur cet hyperplan de contact de la métrique $\gamma(\cdot,\cdot) = d\eta(\cdot, J\cdot)$, ce qui permet de munir la variété $[0,\infty[\times\Sigma$ de la métrique

$$g = dr^2 + e^{2r}\eta^2 + e^r\gamma, \tag{1}$$

et on dit que $g$ est une métrique asymptotiquement hyperbolique complexe. Les exemples de telles variétés sont les quotients convexes cocompacts de l'espace hyperbolique complexe, ou encore les domaines fortement pseudo-convexes de $\mathbb{C}^m$ munis de leur métrique de Bergmann.

Dans la suite, on supposera que $\Sigma$ est compacte sans bord. Nous voulons déterminer les espaces de $L^2$-cohomologie d'une variété ayant des bouts asymptotiquement hyperboliques complexes. Pour des raisons qui deviendront claires plus tard, nous avons besoin de diagonaliser le hessien $\mathrm{Hess}(r)$ de la fonction $r$ dans une bonne base. Tout d'abord, notons par $R$ le champ de Reeb associé à la forme de contact $\eta$ :

$$i_R\eta = 1, \; i_R d\eta = 0.$$

La structure presque-complexe $J$ sur l'hyperplan de contact $H$ se prolonge en une structure presque-complexe sur $[0,\infty[\times\Sigma$ en posant $J\partial_r = e^{-r}R$. On considère alors un repère $g$-orthonormal adapté à $J$ : si $h_1, Jh_1, \ldots, h_{m-1}, Jh_{m-1}$ est un repère orthonormal de $H$ pour $\gamma$, on pose $e_1 = \partial_r$, $e_2 = J\partial_r = e^{-r}R$, $e_3 = e^{-r/2}h_1$, $e_4 = e^{-r/2}Jh_1, \ldots, e_{2m-1} = e^{-r/2}h_{m-1}$, $e_{2m} = e^{-r/2}Jh_{m-1}$. Un calcul analogue à celui de [BH, lemme 2.1] montre alors

LEMME 2. — *Le hessien $\mathrm{Hess}(r)$ se diagonalise dans cette base $e_1, \ldots e_{2m}$, avec les valeurs propres $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = \ldots = \lambda_{2m} = 1/2$.*

## 4. Preuve du résultat principal

Nous présentons ici la démonstration du théorème 1. Soit $(M,g)$ une variété riemannienne qui en dehors d'un compact $K$ est difféomorphe à une variété de la forme $[0,\infty[\times\Sigma$ portant la métrique asymptotiquement hyperbolique complexe (1). Par dualité, il suffit de traiter les degrés $k < m$.

Première étape : nous montrons d'abord que zéro n'est pas dans le spectre essentiel du laplacien $\Delta_k$, pour $k < m-1$, ce qui équivaut (voir par exemple les travaux d'Anghel [A]) à voir qu'on a une inégalité de Poincaré à l'infini : il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall\, \alpha \in C_0^\infty(\Lambda^k T^*(M\setminus K)), C\|\alpha\|_{L^2} \leqslant \|d\alpha\|_{L^2} + \|\delta\alpha\|_{L^2}.$$

Nous utilisons pour cela la formule d'intégration par parties de Donnelly et Xavier [DX] (la version donnée ici est plutôt tirée des articles d'Escobar et Freire [EF], et Ballmann et Brüning [BB]). Notons par $\nu = -\partial_r$ la normale unitaire sortante sur le bord $\{0\}\times\Sigma$ de $M\setminus K$, et par $e_1,\dots e_{2m}$ un repère local $g$-orthonormal sur $M\setminus K$ qui diagonalise le hessien $\mathrm{Hess}(r)$, avec les valeurs propres $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = \ldots = \lambda_{2m} = 1/2$ (voir le lemme 2). Si $\alpha$ est une $k$-forme définie sur $M\setminus K$, la formule de Donnelly et Xavier est la suivante :

$$\int_{M\setminus K}\Big[2\sum_j \lambda_j|i_{e_j}\alpha|^2 - \Big(\sum_j\lambda_j\Big)|\alpha|^2\Big]\mathrm{d}v_g =$$
$$2\int_{M\setminus K}[\langle i_{\partial_r}d\alpha,\alpha\rangle + \langle i_{\partial_r}\alpha,\delta\alpha\rangle]\,\mathrm{d}v_g + \int_\Sigma\Big[-|\alpha|^2\frac{\partial r}{\partial\nu} + 2\langle i_{\partial_r}\alpha, i_\nu\alpha\rangle\Big]\,\mathrm{d}\sigma, \quad (2)$$

où $i_X\alpha$ désigne le produit intérieur de la forme $\alpha$ par le champ de vecteurs $X$, $\mathrm{d}v_g$ est la mesure riemannienne associée à $g$, et $\mathrm{d}\sigma$ est la mesure riemannienne induite sur $\{0\}\times\Sigma$. Mais en raisonnant comme dans [BB, partie 5], on a

$$2\sum_j\lambda_j|i_{e_j}\alpha|^2 - \Big(\sum_j\lambda_j\Big)|\alpha|^2 \leqslant (k+1-m)|\alpha|^2. \quad (3)$$

En utilisant l'inégalité $|i_X\alpha| \leqslant |X||\alpha|$, valable pour tout champ de vecteurs $X$ et toute forme $\alpha$, des inégalités de Cauchy-Schwarz, et le fait que $|\partial_r| = 1$, on déduit de (2) et (3) :

$$(m-1-k)\|\alpha\|^2_{L^2} \leqslant \|\alpha\|_{L^2}\,[\|d\alpha\|_{L^2} + \|\delta\alpha\|_{L^2}] + \int_\Sigma\Big[-|\alpha|^2 + 2|i_\nu\alpha|^2\Big]\,\mathrm{d}\sigma \quad (4)$$

Si maintenant $\alpha$ est une $k$-forme à support compact dans l'intérieur de $M\setminus K$, alors le terme de bord dans l'inégalité précédente est nul, d'où l'on obtient facilement une inégalité de Poincaré à l'infini si $k < m-1$.

Deuxième étape : soit $k$ un entier. Considérons la suite suivante

$$H_2^{k-1}(M\setminus K) \xrightarrow{b} H_c^k(K) \xrightarrow{e} H_2^k(M) \xrightarrow{r} H_2^k(M\setminus K),$$

où $b$ est défini de manière analogue à l'homomorphisme cobord en cohomologie de de Rham, $e$ est l'extension par zéro, et $r$ la restriction (voir par exemple [C] ou [Y]). L'analogue de cette suite en $L^2$-cohomologie non réduite est toujours exacte grâce aux travaux de Cheeger. Ici, zéro n'est pas dans le spectre essentiel de $\Delta_k$ pour $k < m-1$, donc d'après [Y, corollaire 1.4], la suite est exacte pour $k \leqslant m-1$ (on notera aussi l'exactitude pour $k = m-1$). Il nous suffit donc de montrer que les espaces $H_2^k(M \setminus K)$ sont nuls pour $k < m-1$, et on aura fini. Soient donc $k < m-1$ un entier, et $[\alpha]$ une classe de $H_2^k(M \setminus K)$. On peut choisir un représentant $\alpha$ de cette classe qui est harmonique et vérifie la condition absolue au bord de $M \setminus K$ : $\alpha$ est dans $L^2(\Lambda^k T^*(M \setminus K))$; vérifie $d\alpha = \delta\alpha = 0$, et $i_v\alpha = 0$ sur $\{0\} \times \Sigma$. D'après l'inégalité (4), on a

$$(m-1-k)\|\alpha\|_{L^2}^2 \leqslant \int_\Sigma -|\alpha|^2 d\sigma \leqslant 0,$$

donc $\alpha = 0$. □

## Bibliographie


[A] N. Anghel, *An abstract index theorem on non-compact Riemannian manifolds*, Houston J. Math., **19-2** (1993), 223–237.

[APS] M. F. Atiyah, V.K. Patodi, I.M. Singer, *Spectral asymmetry and Riemannian geometry. I.*, Math. Proc. Camb. Philos. Soc. **77** (1975), 43–69.

[BB] W. Ballmann, J. Brüning, *On the spectral theory of manifolds with cusps*, J. Math. Pures Appl., **80-6** (2001), 593–625.

[BH] O. Biquard, M. Herzlich, *A Burns-Epstein invariant for ACHE 4-manifolds*, math.DG/0111218 A (2002).

[C] G. Carron, *$L^2$-cohomology of manifolds with flat ends*, prépublication (2001).

[DX] H. Donnelly, F. Xavier, *On the differential form spectrum of negatively curved riemannian manifolds*, Amer. J. Math., **106** (1984), 169–185.

[EF] J.F. Escobar, A. Freire, *The differential form spectrum of manifolds of positive curvature*, Duke Math. J., **69-2** (1993), 1–42.

[L] J. Lott, *The zero-in-the-spectrum question*, Enseign. Math., II Sér. **42-3 & 4** (1996), 341–376.

[M] R. Mazzeo, *The Hodge cohomology of a conformally compact metric*, J. Differential Geom., **28-2** (1988), 309–339.

[MP] R. Mazzeo, R. S. Phillips, *Hodge theory on hyperbolic manifolds*, Duke Math. J., **60-2** (1990), 509–559.

[Y] N. Yeganefar, *Sur la $L^2$-cohomologie des variétés à courbure négative*, prépublication (2002).

[Z] S. Zucker, *$L_2$ Cohomology of Warped Products and Arithmetic Groups*, Inventiones Math., **70** (1982), 169–218.



Nader YEGANEFAR
Département de Mathématiques UMR 6629
Université de Nantes
2, rue de la Houssinière - BP 92208
44322 NANTES Cédex 3

Nader.Yeganefar@math.univ-nantes.fr