Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

PHILIPPE CASTILLON

Un problème spectral inverse sur les surfaces

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 20 (2001-2002), p. 139-142
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_2001-2002__20__139_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
Volume **20** (2002) 139–142

UN PROBLÈME SPECTRAL INVERSE SUR LES SURFACES

Philippe CASTILLON

Introduction

Les sous-variétés minimales sont solutions d'un problème variationnel : elles sont points critiques de la fonctionnelle volume pour toute déformation à support compact. La dérivée seconde de la fonctionnelle est donnée par une forme quadratique associée à un opérateur auto-adjoint (l'opérateur de stabilité). Une immersion minimale est dite stable lorsque son opérateur de stabilité est positif ; cela revient à dire que la sous-variété, en plus d'être un point critique de la fonctionnelle volume, est un minimum local. Pour une surface minimale M de $\mathbb{R}^3$, l'opérateur de stabilité est $S = \Delta + 2\mathcal{K}$ où $\mathcal{K}$ est la courbure (intrinsèque) de M. Lorsque la surface M est stable cet opérateur est positif. Pour une surface minimale stable dans une variété à courbure scalaire positive ou nulle, on déduit de l'équation de Gauss et de la positivité de l'opérateur de stabilité que l'opérateur $L = \Delta + \mathcal{K}$ est positif.

Dans le cadre de l'étude des surfaces minimales stables, cela a amené les auteurs de [FC-Sc] à s'intéresser à la théorie spectrale des opérateurs de la forme $L_\lambda = \Delta + \lambda\mathcal{K}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, sur les surfaces, et plus particulièrement à relier la positivité de tels opérateurs à la géométrie de la surface.

Soit (M, h) une surface riemannienne complète, non compacte, et soit $\mathcal{K}$ sa courbure. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, notons $L_\lambda = \Delta + \lambda\mathcal{K}$ et q_λ la forme quadratique associée à cet opérateur. Il est facile de voir (cf. [FC-Sc]) que l'ensemble $I_h = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid q_\lambda \text{ positive}\}$ est un intervalle fermé : $I_h = [a_h, b_h]$ avec $-\infty \leqslant a_h \leqslant 0 \leqslant b_h \leqslant +\infty$. Le problème général est d'étudier les relations entre les invariants a_h et b_h et la géométrie de M.

Dans [FC-Sc] les auteurs posaient la question suivante : *Quelles valeurs peut prendre b_h si h est une métrique complète et conforme à la métrique euclidienne sur le disque unité $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$?* Comme premiers éléments de réponse, ils remarquent que $b_h = \frac{1}{4}$ si h est la métrique de Poincaré sur D, et ils montrent que $b_h < 1$ pour toute métrique complète conforme sur D (cf. [FC-Sc] remarque 1 et théorème 2).

Classification math. : 58J50, 53A30, 53A10.

Dans cet exposé, on répond à leur question en montrant le résultat suivant :

THEOREM A. — *Soit* $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

- *Pour tout* $\lambda \in [0, \frac{1}{4}]$ *il existe une métrique complète et conforme à la métrique euclidienne sur D telle que* $b_h = \lambda$;
- *Si h est une métrique complète et conforme à la métrique euclidienne sur D alors* $b_h \leqslant \frac{1}{4}$.

Calcul de b_h pour certaines métriques

Considérons une métrique complète et conforme à la métrique euclidienne sur D : $h = \mu(z)^2|dz|^2$. Il est facile d'exprimer la courbure de h en fonction du facteur conforme μ, et en utilisant l'invariance conforme de l'intégrale de Dirichlet en dimension 2, on peut écrire la forme quadratique q_λ en fonction de la métrique euclidienne et de μ :

$$q_{h,\lambda}(u) = \int_D (|du|_e^2 + \lambda(\Delta \log \mu)u^2)dv_e \tag{1}$$

où la norme de du est prise pour la métrique euclidienne, et où dv_e est la forme volume euclidienne. Considérons à présent la métrique $h_\alpha = \mu(z)^{2\alpha}|dz|^2$, l'équation 1 donne $q_{h_\alpha,\lambda}(u) = q_{h,\alpha\lambda}(u)$. De cette égalité, on déduit que $b_{h_\alpha} = \frac{1}{\alpha}b_h$.

Si on prend maintenant pour h la métrique de Poincaré (ie. $\mu(z) = \frac{2}{1-|z|^2}$), la métrique h_α est complète pour tout $\alpha \geqslant 1$, et on a $b_{h_\alpha} = \frac{1}{4\alpha}$.

Par ailleurs, pour la métrique $h_\infty = e^{\mu(z)}|dz|^2$, il est facile de voir que $b_{h_\infty} = 0$.

Les exemples ci-dessus permettent de démontrer la première partie du théorème A.

Les surfaces satisfaisant $b_h > \frac{1}{4}$

La seconde partie du théorème A est une conséquence du résultat plus général suivant :

THÉORÈME 1. — *Soit* (M, h) *une surface riemannienne complète et non-compacte. Si* $b_h > \frac{1}{4}$ *alors M est conformément équivalente à* $\mathbb{C}$ *ou à* $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Comme corollaire immédiat, on obtient que $b_h \leqslant \frac{1}{4}$ pour toute métrique h complète et conforme à la métrique euclidienne sur D.

Schéma de la preuve

Soit x_0 un point de M fixé. Dans la suite, on notera $r(x) = d_M(x_0, x)$ la fonction distance à x_0 sur M, $B_s = \{x \in M \mid r(x) < s\}$ la boule de rayon s, et $C_s^t = \{x \in M \mid s < r(x) < t\}$.

D'autre part, on notera $V(s)$ le volume de la boule B_s, $\ell(s)$ la longueur du cercle géodésique de rayon s (*i.e.* $\ell(s) = \mathrm{vol}(\partial B_s)$) et $G(s)$ la courbure totale de la boule de rayon s (*i.e.* $G(s) = \int_{B_s} \mathcal{K} dv_h$).

La preuve du théorème 1 consiste à utiliser la positivité de q_λ pour un certain $\lambda > \frac{1}{4}$ en estimant $q_\lambda(f)$ pour des certaines fonctions f à support compact et de la forme $f = \xi(r)$. Pour cela, il faut estimer des termes de la forme $\int_M \mathcal{K} \xi(r)^2 dv_h$, ce qui est fait grâce au lemme suivant :

LEMME 2. — *Soient $R < Q$, et soit $\xi : [R, Q] \to \mathbb{R}$ telle que $\xi(Q) = 0$, $\xi \geqslant 0$, $\xi' \leqslant 0$ et $\xi'' \geqslant 0$. S'il existe une constante A telle que $\chi(B_s) \leqslant A$ pour tout $s \in [R, Q]$, alors*

$$\int_{C_R^Q} \mathcal{K} \xi(r)^2 dv_h \leqslant -\xi(R)^2 G(R) - 2\xi(R)\xi'(R)\ell(R) + 2\pi A \xi(R)^2 - \int_{C_R^Q} (\xi^2)''(r) dv_h.$$

La preuve de ce lemme est basée sur la méthode utilisée par T. Colding et W. Minicozzi dans [Co-Mi]; elle utilise en particulier les propriétés de la fonction $\ell(s)$ démontrées par K. Shiohama et M. Tanaka (cf. [Sh-Ta1] et [Sh-Ta2]) : La fonction ℓ est dérivable presque partout, pour presque tout $s \in \mathbb{R}$, $\ell'(s) \leqslant 2\pi\chi(B_s) - G(s)$, et pour tout $a < b$, $\ell(b) - \ell(a) \leqslant \int_a^b \ell'(s) ds$.

A l'aide de ce lemme, et en utilisant des fonctions ξ adequates, la première étape de la preuve du théorème 1 consiste à contrôler la topologie de la surface : on montre que M est de topologie finie et que $\chi(M) \geqslant 0$. La seconde étape consiste, à l'aide de fonctions ξ différentes, à contrôler la croissance du volume : on montre que $V(s) \leqslant c_M s^2$ pour une certaine constante c_M. C'est ensuite un résultat standard en theorie du potentiel qu'une surface à croissance du volume quadratique est parabolique (ie. chaque bout est conforme au disque pointé).

Remarque sur les métriques vérifiant $b_h = \frac{1}{4}$

Une question naturelle est de savoir si la valeur $b_h = \frac{1}{4}$ caractérise la métrique de Poincaré parmis les métriques conformes à la métrique euclidienne sur D. La réponse est donnée par la proposition suivante :

PROPOSITION 3. — *Il existe une constante universelle ε telle que pour toute métrique h complète et conforme à la métrique euclidienne sur D vérifiant $\mathcal{K} \leqslant -1$ et $\int_D |\mathcal{K} + 1|^{\frac{3}{2}} dv_h \leqslant \varepsilon$ on ait $b_h = \frac{1}{4}$.*

Démonstration. — La surface étant simplement connexe, la majoration de la courbure permet de majorer, via un théorème de comparaison, le noyau de la chaleur p_h de (D, h) par le noyau de la chaleur du plan hyperbolique, en particulier il existe une constante universelle A_0 telle que $p_h(t, x, x) \leqslant A_0 t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{t}{4}}$

On peut alors utiliser le théorème de Lieb (cf. par exemple [Ca] théorème 1.3) : il existe une constante universelle A telle que pour tout opérateur de la forme $R = \Delta - \frac{1}{4} + \phi$, le nombre de valeurs propres négatives de R vérifie $\mathcal{N}_0(R) \leqslant A \int_D |\phi|^{\frac{3}{2}} dv_h$.

Soit $\varepsilon = \frac{1}{A}$, et supposons que $\int_D |\mathcal{K} + 1|^{\frac{3}{2}} dv_h \leqslant \varepsilon$. L'opérateur $L_{\frac{1}{4}}$ s'écrit $L_{\frac{1}{4}} = \Delta + \frac{1}{4}\mathcal{K} = \Delta - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(\mathcal{K} + 1)$ d'où

$$\mathcal{N}_0(L_{\frac{1}{4}}) \leqslant \frac{A}{8} \int_D |\mathcal{K} + 1|^{\frac{3}{2}} dv_h \leqslant \frac{1}{8}$$

On en déduit que $\mathcal{N}_0(L_{\frac{1}{4}}) = 0$, et que $q_{\frac{1}{4}}$ est positive. On a donc $b_h \geqslant \frac{1}{4}$, et par le théorème A on en déduit que $b_h = \frac{1}{4}$. □

Bibliographie

[Ca] P. Castillon, *Problèmes de petites valeurs propres sur les surfaces de courbure moyenne constante*, Proc. Amer. Math. Soc., **130** (2001), 1153–1163.

[Co-Mi] T. Colding, W. Minicozzi, *Estimates for parametric elliptic integrands*, Int. Math. Res. Not., **6** (2002), 291–297.

[FC-Sc] D. Fischer-Colbrie, R. Schoen, *The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of non-negative scalar curvature*, Commun. Pure Appl. Math. **33** (1980), 199–211.

[Sh-Ta1] K. Shiohama, M. Tanaka, *An isoperimetric problem for infinitely connected complete open surfaces*, in: Geometry of manifolds, Coll. Pap. 35th Symp. Differ. Geom., Matsumoto/Japan 1988, Perspect. Math. **8** (1989), 317–343.

[Sh-Ta2] K. Shiohama, M. Tanaka, *The length function of geodesic paralel circle*, in: Progress in differential geometry, K. Shiohama Ed., Adv. Stud. Pure Math. **22** (1993), 299–308.

Philippe CASTILLON
G.T.A. (U.M.R. 5030)
Dépt. des Sciences Mathématiques, CC 51
Univ. Montpellier 2
34095 MONTPELLIER Cedex (France)
cast@math.univ-montp2.fr