Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Olivier Druet

Inégalités de Sobolev optimales et inégalités isopérimétriques sur les variétés

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 20 (2001-2002), p. 23-100
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_2001-2002__20__23_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
Volume **20** (2002) 23–100

INÉGALITÉS DE SOBOLEV OPTIMALES ET INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES SUR LES VARIÉTÉS

Olivier DRUET

Ces notes, que l'on a voulues informelles, correspondent à un cours post-doctoral de 8 heures donné à l'École Normale Supérieure de Lyon en mars 2001. On y traite d'inégalités de Sobolev optimales et d'inégalités isopérimétriques sur les variétés riemanniennes compactes. On a voulu appuyer sur le rôle que jouent la dimension et la géométrie de la variété dans l'étude de telles inégalités. Les preuves, dont on ne fera que dessiner de rapides esquisses, mettent en jeu pour l'essentiel des techniques d'analyse non-linéaire que l'on a essayé de présenter le plus simplement possible. Une section leur est d'ailleurs consacrée. Un texte plus complet et plus rigoureux sur le programme d'étude des meilleures constantes dans les inégalités de Sobolev sur les variétés riemanniennes compactes est disponible [38].

Ce texte s'articule autour des sections 2, 4 et 7, les deux pôles d'attraction du programme que l'on présente dans ces notes. Les sections 2 et 4 traitent des inégalités de Sobolev H_1^2, la section 7 s'intéresse à un problème classique : l'obtention d'inégalités isopérimétriques optimales sur les variétés. La section 3 expose les techniques utilisées pour démontrer les résultats des sections 2 et 4. La section 5 présente l'ensemble des phénomènes rencontrés aux sections 2 et 4 sur une seule et même question, celle de la validité des inégalités de Sobolev-Poincaré, et donne donc un aperçu rapide du rôle de la géométrie de la variété dans l'étude d'inégalités de type Sobolev optimales. La section 6 est plus anecdotique; elle est là par souci de complétude. Enfin, la section 1 présente très rapidement quelques bases nécessaires et outils utiles pour la suite du texte.

Je tiens à remercier Emmanuel Hebey, Frédéric Robert et Cédric Villani pour leurs commentaires pertinents sur ce texte et les nombreuses discussions que j'ai eues avec eux pendant la préparation de ces notes. Je tiens à remercier une deuxième fois Cédric Villani, pour m'avoir invité, et donc permis de présenter ce cours, à l'E.N.S. Lyon (je n'y étais pas encore à l'époque). La partie sur l'isopérimétrie a été légèrement augmentée suite à une série de conférences donnée sur le sujet à l'Institut Fourier de Grenoble en

Classification math. : 53C21, 58J05, 35B33, 35B40, 35J60, 35J70.

novembre 2001. Je remercie Gérard Besson de m'avoir invité à Grenoble et d'avoir également permis la publication de ces notes.

Table des matières

1. Introduction

1.1. Bases euclidiennes

On considère $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, muni de la métrique euclidienne ξ. On note l'élément de volume euclidien dv_ξ ou dx. Les espaces $L^q(\mathbb{R}^n)$, $q \geqslant 1$ un réel, sont la complétion de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, l'ensemble des fonctions régulières à support compact dans $\mathbb{R}^n$, pour la norme suivante :

$$\|u\|_q = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^q dv_\xi\right)^{\frac{1}{q}}$$

On appelle $H_1^p(\mathbb{R}^n)$, $p \geqslant 1$, la complétion de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ pour la norme

$$\|u\|_{H_1^p} = \|\nabla u\|_p .$$

Sobolev [95], en 1938, montrait que, pour $1 \leqslant p < n$, l'espace $H_1^p(\mathbb{R}^n)$ s'injecte continûment dans $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ avec $p^* = \frac{np}{n-p}$. De cette injection, on obtient un contrôle de la norme L^{p^*} d'une fonction par sa norme H_1^p. Plus précisément, il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\|u\|_{p^*} \leqslant K\|\nabla u\|_p .$$

Remarque : Pour retrouver la valeur de p^*, on peut noter que la norme L^p du gradient d'une fonction u est invariante par le changement d'échelle suivant : $v(x) = \lambda^{\frac{n}{p}-1} u(\lambda x)$. La seule norme L^q également invariante par ce changement d'échelle est la norme L^{p^*}. Cette invariance jouera un rôle fondamental dans le type de problèmes que l'on va étudier.

Une preuve de cette inégalité plus simple que celle de Sobolev a été trouvée dans les années 50 par Gagliardo [48] et Nirenberg [85]. On démontre tout d'abord à la main que pour tout $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}} dv_\xi\right)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u| dv_\xi .$$

La constante $\frac{1}{2}$ n'est pas optimale. Pour en déduire toutes les inégalités de Sobolev pour $1 \leqslant p < n$, on applique cette inégalité à $u^{\frac{p(n-1)}{n-p}}$: une inégalité de Hölder suffit ensuite pour conclure. Ainsi, l'inégalité de Sobolev pour $p = 1$ entraîne toutes les inégalités de Sobolev pour $1 \leqslant p < n$. On va voir que ceci reste vrai lorsqu'on recherche la forme optimale de celles-ci.

On va donc naturellement commencer par s'intéresser à l'inégalité H_1^1 optimale. En d'autres termes, on cherche la plus petite constante $K > 0$ telle que pour tout $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}} dv_\xi\right)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant K \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u| dv_\xi .$$

On notera cette constante optimale $K(n,1)$. Sa valeur fut obtenue en 1960 par Federer-Fleming [46] et Fleming-Rishel [47]. On a

$$K(n,1) = \frac{\mathrm{Vol}_\xi(B)^{\frac{n-1}{n}}}{\mathrm{Vol}_\xi(\partial B)} = \frac{1}{n}\left(\frac{n}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n}}$$

où B est la boule unité de $\mathbb{R}^n$, ∂B son bord et $\omega_{n-1} = \mathrm{Vol}_\xi(\partial B)$ est le volume de la sphère unité de dimension $n-1$. Pour obtenir cette constante, il faut remarquer que l'inégalité H_1^1 est équivalente à l'inégalité isopérimétrique dans $\mathbb{R}^n$. Cette dernière stipule que pour tout domaine lisse Ω de $\mathbb{R}^n$,

$$\frac{\mathrm{Vol}_\xi(\partial\Omega)}{\mathrm{Vol}_\xi(\Omega)^{\frac{n-1}{n}}} \geqslant \frac{\mathrm{Vol}_\xi(\partial B)}{\mathrm{Vol}_\xi(B)^{\frac{n-1}{n}}}$$

où B est toujours la boule unité de $\mathbb{R}^n$. L'inégalité H_1^1, appliquée à une suite de fonctions régulières u_k tendant vers la fonction caractéristique de Ω, entraîne l'inégalité isopérimétrique pour Ω. La réciproque est basée sur la formule de la co-aire (cf. par exemple [24], voir aussi section 7.1).

Intéressons-nous maintenant aux constantes optimales dans les inégalités H_1^p, $1 < p < n$. On cherche donc la plus petite constante $K_p > 0$ pour laquelle toute fonction $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ vérifie

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^\star} dv_\xi\right)^{\frac{1}{p^\star}} \leqslant K_p \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dv_\xi\right)^{\frac{1}{p}} .$$

On note ces constantes optimales $K(n,p)$. Leurs valeurs furent obtenues indépendamment par Aubin [7] et Talenti [98] en 1976. On a

$$K(n,p) = \frac{1}{n}\left(\frac{n(p-1)}{n-p}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right)\Gamma\left(n+1-\frac{n}{p}\right)\omega_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n}}$$

où Γ est la fonction d'Euler. Pour $p = 2$, cette formule se simplifie grandement pour donner

$$K(n,2)^2 = \frac{4}{n(n-2)}\omega_n^{-\frac{2}{n}} .$$

À titre de remarque, on vérifie que $K(n, p)$ est continue en p et tend vers $K(n, 1)$ lorsque p tend vers 1. Aubin et Talenti utilisent tous les deux la même approche pour trouver la valeur de $K(n, p)$: elle est basée sur un processus de symétrisatiòn permettant de se ramener à des travaux de Bliss [16] qui permettent de calculer cette constante lorsqu'on se restreint aux fonctions radiales. Le processus de symétrisation est basé quant à lui sur la formule de la co-aire et utilise de manière fondamentale l'inégalité isopérimétrique dans $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire, cela revient au même, la forme optimale de l'inégalité H_1^1. On a là affaire au premier versant du double jeu entre inégalités isopérimétriques et inégalités de Sobolev H_1^p pour $p > 1$. Une inégalité isopérimétrique (optimale) entraîne des inégalités H_1^p (optimales). Nous verrons section 7 comment des inégalités H_1^p (optimales) sont un moyen pour récupérer des inégalités isopérimétriques (optimales). Récemment, une nouvelle approche, basée sur le transport de mesure, a permis de retrouver les inégalités optimales H_1^p euclidiennes sans passer par l'inégalité isopérimétrique (voir [26]).

Pour résumer, on a, pour tout $p \geqslant 1$, l'inégalité de Sobolev euclidienne suivante :

$$\|u\|_{p^*} \leqslant K(n, p)\|\nabla u\|_p .$$

De plus, pour $p > 1$, le cas d'égalité est atteint par une fonction u si et seulement si elle est de la forme

$$u = \lambda\left(\mu + |x - x_0|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{1-\frac{n}{p}}$$

avec $x_0 \in \mathbb{R}^n$, μ un réel positif et λ un réel. On dira qu'une telle fonction u, excepté la fonction nulle, est une fonction extrémale pour l'inégalité H_1^p euclidienne optimale.

Pour $p = 1$, le cas d'égalité est atteint, à un facteur multiplicatif près, uniquement par les fonctions caractéristiques des boules de $\mathbb{R}^n$, à condition de donner un sens à la norme L^1 du gradient d'une telle fonction, ce que nous ferons plus tard dans ces notes (section 7).

RÉFÉRENCES. Nombreux sont les ouvrages traitant d'inégalités de Sobolev dans $\mathbb{R}^n$. Nous ne citerons ici que [1] et [82].

1.2. Espaces de Sobolev sur une variété riemannienne

Dans toutes ces notes, nous ne considérerons que des variétés riemanniennes notées (M, g) compactes et sans bord. Elles seront également toutes C^∞. Une variété est un ensemble de morceaux de $\mathbb{R}^n$ recollés ensemble. Plus précisément, tout point de la variété possède un voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$: pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert de x, V_x, un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^n$, V, et $\varphi\colon V_x \to V$ un homéomorphisme de V_x sur V. Ce couple (V_x, φ) est appelé une carte locale de M au point x. Pour tout $y \in V_x$, les coordonnées de $\varphi(y)$ dans $\mathbb{R}^n$ sont les coordonnées de y dans la carte (V_x, φ). Une carte locale est aussi appelée un système local de coordonnées. Une variété se doit de posséder un atlas, c'est-à-dire un ensemble de cartes la recouvrant entièrement : étant données deux cartes (V_1, φ_1) et (V_2, φ_2) telles que $V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$, on dit que $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une application de changement de cartes. Dire que la variété est C^∞, c'est dire que toutes ces applications de changement de cartes sont des C^∞-difféomorphismes. Une métrique riemannienne sur M est un C^∞-champ de tenseurs deux fois covariants sur M qui définit en tout point x de M un produit scalaire sur $T_x(M)$, l'espace tangent à M en x. Dans une carte, la métrique g peut être vue comme la donnée en tout point d'une matrice $n \times n$ symétrique définie positive, et ce de manière C^∞. Une fois que l'on a une métrique g sur M, on peut définir un élément de volume dv_g sur M de manière canonique. Dans une carte, $dv_g = \sqrt{\det g}\, dx$: il faut faire attention au fait que $\det g$ n'a pas de signification intrinsèque, cela n'a de sens que dans une carte. Par contre, dv_g est une mesure sur M, définie de façon intrinsèque. Bien souvent, nous omettrons, sans confusion possible, de dire dans quelle carte $\det g$ est à entendre. On notera $L^q(M)$ l'espace de Lebesgue dont la norme est

$$\|u\|_q = \left(\int_M |u|^q dv_g\right)^{\frac{1}{q}} .$$

On définit $H_1^p(M)$ comme étant la complétion de $C^\infty(M)$ pour la norme

$$\|u\|_{H_1^p}^p = \|\nabla u\|_p^p + \|u\|_p^p$$

où

$$\|\nabla u\|_p^p = \int_M |\nabla u|_g^p dv_g$$

avec $|\nabla u|_g$ la norme de ∇u comme forme linéaire agissant sur T_xM. Dans une carte, on a $|\nabla u|_g^2 = g^{ij}\partial_i u \partial_j u$, les g^{ij} étant les composantes de g^{-1}, l'inverse de la matrice des composantes de g.

Remarque : Par définition, $C^\infty(M)$ est dense dans tous les $H_1^p(M)$. Nous nous en servirons dans toute la suite.

Pour $1 \leqslant p < n$, le théorème d'injection de Sobolev nous donne que $H_1^p(M) \subset L^q(M)$ pour tout $a \leqslant p^\star = \frac{np}{n-p}$. Cette injection n'est plus vraie dès que $q > p^\star$. C'est pourquoi on appellera $p^\star$ l'exposant critique (sous-entendu pour les injections de Sobolev). De plus, l'inclusion de $H_1^p(M)$ dans $L^q(M)$ est compacte pour $q < p^\star$ (théorème de Rellich-Kondrakov) mais ne l'est plus pour $q = p^\star$. De l'injection de $H_1^p(M)$ dans $L^{p^\star}(M)$, on tire l'existence de deux constantes A et B telles que pour tout $u \in H_1^p(M)$,

$$\|u\|_{p^\star} \leqslant A\|\nabla u\|_p + B\|u\|_p . \qquad (I_p^1)$$

Cette inégalité sera dite générique d'ordre p et de puissance 1. Une inégalité équivalente, beaucoup plus naturelle d'un point de vue EDPiste est la suivante : pour tout $u \in H_1^p(M)$,

$$\|u\|_{p^\star}^p \leqslant A\|\nabla u\|_p^p + B\|u\|_p^p \qquad (I_p^p)$$

où A et B sont deux constantes distinctes des précédentes. Cette seconde inégalité sera appelée générique d'ordre p et de puissance p.

Remarque : Pourquoi est-on obligé de rajouter une constante B qui n'avait pas lieu d'être dans $\mathbb{R}^n$? Simplement parce que les fonctions constantes sont dans $H_1^p(M)$ car M est compacte. Ceci impose d'ajouter une constante B non nulle.

Étant données les inégalités (I_p^1) et (I_p^p), on peut commencer à poser les premières questions du programme AB, programme formalisé par Emmanuel Hebey [58] au milieu des années 90. On s'intéressera ici uniquement à la partie A de ce programme. On définit la meilleure première constante $\alpha_p(M)$ dans (I_p^1) comme suit :

$$\alpha_p(M) = \inf\left\{A \text{ t.q. } \exists B \text{ t.q. } (I_p^1) \text{ soit valide avec } A \text{ et } B\right\} .$$

Par (I_p^1) valide avec A et B, on entend qu'elle est vraie avec les constantes A et B pour tout u dans $H_1^p(M)$. On dira que $\alpha_p(M)$ est la meilleure première constante dans (I_p^1). D'une manière parallèle, on peut définir la meilleure seconde constante dans (I_p^1) par

$$\beta_p(M) = \inf\left\{B \text{ t.q. } \exists A \text{ t.q. } (I_p^1) \text{ soit valide avec } A \text{ et } B\right\} .$$

La partie A du programme AB concerne les questions que l'on peut se poser lorsque la priorité est donnée à la première constante, la partie B donnant quant à elle la priorité à la seconde constante. Nous nous intéresserons ici à la partie A du programme. La partie B met en jeu pour l'essentiel de toutes autres techniques et a été développée par, entre autres, D. Bakry, S. Ilias, M. Ledoux (cf. [10], [11] et [75]; voir aussi les travaux de E. Hebey et l'auteur dans [61]).

La première question du programme est bien entendu la suivante :

Q1 – Que vaut $\alpha_p(M)$?

Revenons un instant à la définition de $\alpha_p(M)$. Celle-ci signifie deux choses : premièrement, pour tout $A < \alpha_p(M)$ donné, on pourra trouver pour toute constante $B > 0$ une fonction u dans $H_1^p(M)$ qui ne vérifiera pas (I_p^1) avec A et B. Deuxièmement, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante B_ε telle que pour tout $u \in H_1^p(M)$,

$$\|u\|_{p^*} \leqslant \left(\alpha_p(M) + \varepsilon\right) \|\nabla u\|_p + B_\varepsilon \|u\|_p .$$

La deuxième question du programme consiste à demander si l'infimum de la définition de $\alpha_p(M)$ est en fait un minimum. En d'autres termes, peut-on prendre $\varepsilon = 0$ dans l'inégalité ci-dessus ? Ou encore, cela revient à se demander s'il existe une constante $B > 0$ telle que pour tout u dans $H_1^p(M)$,

$$\|u\|_{p^*} \leqslant \alpha_p(M) \|\nabla u\|_p + B \|u\|_p . \qquad (I_{p,\mathrm{opt}}^1)$$

Cette inégalité sera dite optimale d'ordre p et de puissance 1. La deuxième question revient donc à étudier la validité d'une telle inégalité optimale :

Q2 – L'inégalité $(I_{p,\mathrm{opt}}^1)$ est-elle valide ?

Si on fait le même travail sur l'inégalité (I_p^p), on vérifie facilement que

$$\alpha_p(M)^p = \inf\left\{A \text{ t.q. } \exists B \text{ t.q. } (I_p^p) \text{ soit valide avec } A \text{ et } B\right\}$$

et on s'intéressera à la validité de l'inégalité optimale d'ordre p et de puissance p qui stipule l'existence d'une constante $B > 0$ telle que pour tout u dans $H_1^p(M)$,

$$\|u\|_{p^*}^p \leqslant \alpha_p(M)^p \|\nabla u\|_p^p + B\|u\|_p^p . \qquad (I_{p,\text{opt}}^p)$$

La troisième question du programme sera donc :

Q3 – L'inégalité $(I_{p,\text{opt}}^p)$ est-elle valide ?

Remarque : La validité de $(I_{p,\text{opt}}^p)$ entraîne celle de $(I_{p,opt}^1)$ grâce à l'inégalité standard : pour tous $x, y \geqslant 0$ et tout $p \geqslant 1$, $(x+y)^{1/p} \leqslant x^{1/p} + y^{1/p}$. En particulier, une question intéressante devient de savoir si la réciproque est vraie ou pas. En d'autres termes, s'il existe des variétés pour lesquelles $(I_{p,opt}^1)$ serait valide et $(I_{p,opt}^p)$ ne le serait pas.

Nous poserons les questions suivantes de ce programme une fois répondu aux premières. Dans toute l'étude de ce programme, nous serons attirés par deux pôles : le cas $p = 1$ et le cas $p = 2$. Le cas $p = 1$ nous intéressera tout particulièrement de par sa liaison avec un problème géométrique important, à savoir l'obtention d'inégalités isopérimétriques sur des variétés. Le cas $p = 2$ est intéressant pour deux raisons : une première historique (il possède quelques liens, plus ou moins lâches, avec le problème de Yamabe, cf. par exemple [6], [68], [91]), la deuxième technique (les problèmes traités quand $p = 2$ sont purement elliptiques, ce qui permet de pousser beaucoup plus avant le programme dans ce cas). Par souci de complétude, nous donnerons quand même section 6 les résultats concernant les autres cas.

RÉFÉRENCES. Un ouvrage de base traitant des espaces de Sobolev sur les variétés riemanniennes est [59], transcription d'un cours de DEA donné par E. Hebey à l'Université de Cergy-Pontoise ces dernières années. Pour ce qui concerne les débuts du programme AB, on peut consulter [58]. La partie B du programme, dont nous ne parlerons pas dans ces notes, est traitée dans [38] et [61].

1.3. Un peu de géométrie riemannienne (pour analystes)

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte. Il y a une notion de distance liée à la métrique g. Si $\gamma\colon [a;b] \to M$ est un chemin de classe C^1, on définit la longueur de γ par

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g(\gamma(t)).\left(\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_t, \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_t\right)}\, dt .$$

Pour $x, y \in M$; on définit la distance de x à y par

$$d_g(x,y) = \inf L(\gamma)$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des chemins de classe C^1 allant de x à y. On vérifie que d_g est bien une distance. Une géodésique sur M est un chemin paramétré proportionnellement à la longueur de l'arc qui minimise localement la distance.

Si une variété est constituée de bouts de $\mathbb{R}^n$ recollés ensemble, on peut dire qu'une variété riemannienne est constituée de morceaux euclidiens, infinitésimalement parlant. Plus précisément, étant donnée une variété riemannienne (M, g) de dimension n, pour tout x de M, on peut construire une carte un peu spéciale au voisinage de x : la carte exponentielle. L'application exp_x est un difféomorphisme de $B(0, \delta)$, la boule de centre 0 et de rayon δ dans $\mathbb{R}^n$, dans $B_g(x, \delta)$, la boule riemannienne de centre x et de rayon δ de M. Le rayon δ est pris suffisamment petit. Sur une variété riemannienne compacte, il peut être pris indépendant de x et le plus grand de ces δ est alors appelé rayon d'injectivité de (M, g). Un difféomorphisme permet de transporter la métrique qu'on a sur l'espace d'arrivée dans l'espace de départ. Ici, l'application $\exp_x$ transporte la métrique g sur $B(0, \delta)$: on note cette métrique $\exp_x^\star\, g$, le "pull-back" de g par l'exponentielle. Et

$$\exp_x : \ (B(0, \delta), \exp_x^\star\, g) \longrightarrow \big(B_g(x, \delta), g\big)$$

est une isométrie. Une propriété essentielle de l'application exponentielle est qu'elle redresse les géodésiques issues de x – c'est comme cela qu'on la construit – c'est-à-dire que toutes les géodésiques issues de 0 dans $(B(0, \delta), \exp_x^\star\, g)$ sont les demi-droites de $\mathbb{R}^n$ issues de 0. Il faut noter que les géodésiques dans $(B(0, \delta), \exp_x^\star\, g)$ ont pour image par $\exp_x$ les géodésiques de $\big(B_g(x, \delta), g\big)$. Une deuxième propriété essentielle de cette application est que

$$(\exp_x^\star\, g(0))_{ij} = \delta_{ij}$$

et

$$\partial_k \left((\exp_x^\star\, g)_{ij}\right)(0) = 0$$

pour tous i, j, k entre 1 et n. Dit autrement, la métrique $\exp_x^\star\, g$ est euclidienne jusqu'au premier ordre autour de 0. Bien souvent, vu que $\exp_x$ est une isométrie, nous continuerons à noter g la métrique $\exp_x^\star\, g$.

Étant donné un point x de M, on peut faire un développement limité de $\exp_x^\star\, g$ autour de 0 ou, par abus de langage, de g autour de x. Ce développement limité, dû à Cartan, fait intervenir diverses courbures de g au point x. Toutes ces courbures, de ce point de vue, vont coder l'écart qu'il y a entre g et la métrique euclidienne autour du point x. Par exemple, au second ordre, on a

$$(\exp_x^\star\, g)_{ij}(y) = \delta_{ij} + \frac{1}{3} Rm_{\exp_x^\star\, g}(0)_{i\alpha\beta j} y^\alpha y^\beta + O\left(|y|^3\right) ,$$

ce qu'on écrira abusivement

$$g_{ij}(y) = \delta_{ij} + \frac{1}{3} Rm_g(x)_{i\alpha\beta j} y^\alpha y^\beta + O\left(|y|^3\right) ,$$

cette dernière ligne étant à entendre dans la carte exponentielle en x. Ici, les δ_{ij} sont les symboles de Kronecker et représentent les composantes de la matrice de la métrique euclidienne et $Rm_g(x)$ désigne la courbure de Riemann de la métrique g au point x. La courbure de Riemann est un C^∞-champ de tenseurs quatre fois covariants sur M. Cette courbure mesure donc l'écart local au second ordre entre la métrique riemannienne et la métrique euclidienne. C'est la plus forte des courbures associées à une métrique g

dans le sens qu'elle détermine toutes les autres. Des hypothèses sur la courbure de Riemann donnent par conséquent énormément d'informations sur (M, g). Celle-ci ne nous intéressera pas vraiment ici, au moins dans un premier temps.

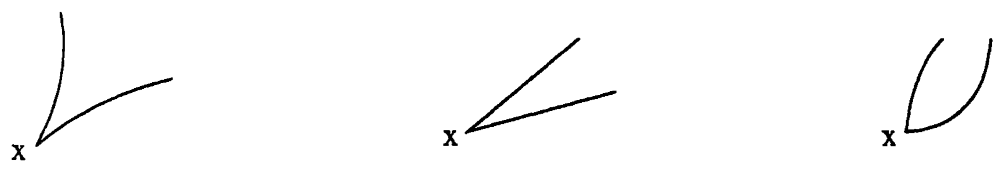
Nous allons maintenant donner un développement limité de l'élément de volume dv_g autour de x. On a, toujours à abus de notation près,

$$dv_g(y) = \left(1 - \frac{1}{6}\operatorname{Ric}_g(x)_{ij}y^iy^j + O\left(|y|^3\right)\right) dv_\xi(y)$$

où Ric_g désigne la courbure de Ricci de g. Enfin, en intégrant, on obtient :

$$\operatorname{Vol}_g\left(B_g(x,r)\right) = \operatorname{Vol}_\xi\left(B_\xi(0,r)\right)\left(1 - \frac{S_g(x)}{6(n+2)}r^2 + O\left(r^4\right)\right)$$

où S_g désigne la courbure scalaire de g et $B_g(x,r)$ (resp. $B_\xi(0,r)$) désigne la boule de centre x (resp. 0) et de rayon r dans (M,g) (resp. $(\mathbb{R}^n, \xi)$). La courbure scalaire va se révéler être, dans notre cadre, la courbure locale par excellence. Par exemple, si on veut comparer infinitésimalement le volume des boules riemanniennes au volume des boules euclidiennes, c'est elle qui va jouer un rôle. Par exemple, si $S_g(x) > 0$, quitte à prendre r suffisamment petit, $\operatorname{Vol}_g\left(B_g(x,r)\right) < \operatorname{Vol}_\xi\left(B_\xi(0,r)\right)$. Par contre, la courbure scalaire ne donne quasiment aucune information géométrique globale (cette assertion mériterait d'être nuancée; cf. par exemple [54], [55] et [93]). Par exemple, la résolution du problème de Yamabe, sur lequel on reviendra dans la partie suivante, nous dit que dans la classe conforme de toute métrique g sur une variété M, on peut trouver une métrique $\tilde{g}$ à courbure scalaire constante. On dit que $\tilde{g}$ est conforme à g si $\tilde{g} = e^\varphi g$ avec $\varphi \in C^\infty(M)$. Vu sous cet angle, ce résultat est un résultat négatif : il est extrêmement peu contraignant (géométriquement parlant) de supposer que la courbure scalaire est constante. Se donner des informations sur (M,g) d'ordre global reviendra donc à se donner des informations sur d'autres courbures : sur la courbure de Ricci par exemple ou sur la courbure sectionnelle. Cette dernière, notée K_g, associe un réel à tous les plans (sous-espaces 2-dimensionnels) des espaces tangents T_xM. Elle possède une interprétation géométrique simple : elle donne des informations sur la vitesse d'éloignement des géodésiques issues d'un même point. Si $K_g \equiv 0$ autour d'un point x, toutes les géodésiques issues de x s'éloignent les unes des autres à la même vitesse que dans $\mathbb{R}^n$. Si $K_g \leqslant 0$ (resp. $\geqslant 0$), cette vitesse d'éloignement est plus grande (resp. plus petite) que dans le cas euclidien. Cela peut se résumer ainsi :



$K_g \leqslant 0$ $\qquad$ $K_g \equiv 0$ $\qquad$ $K_g \geqslant 0$

Une dernière courbure très intéressante est la courbure de Weyl, notée W_g. En effet, si $W_g \equiv 0$ autour de x, alors il existe $\tilde{g} = e^{\varphi} g$ dans la classe conforme de g qui est euclidienne autour de x. Si $W_g \equiv 0$ sur M, on dit que (M, g) est conformément plate : pour tout $x \in M$, il existe $\delta_x > 0$ et $\varphi_x \in C^\infty(M)$ tels que $e^{\varphi_x} g = \xi$ sur $B(x, \delta_x)$. Dans la suite, quasiment seules la courbure sectionnelle K_g, la courbure scalaire S_g et la courbure de Weyl W_g vont nous intéresser.

Les courbures d'une variété peuvent donner des informations topologiques très fortes sur la variété : par exemple, la caractéristique d'Euler-Poincaré (un invariant topologique) est donnée par l'intégrale d'un polynôme en les courbures sur (M, g). Un autre exemple est fourni par le théorème de la sphère $\frac{1}{4}$-pincée : si (M, g) est une variété riemannienne simplement connexe de dimension n telle que $0 < \delta \leqslant K_g \leqslant \Delta$ avec $\frac{\delta}{\Delta} > \frac{1}{4}$, alors M est homéomorphe à S^n, la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$. Obtenir des propriétés différentielles ou topologiques sur une variété à partir de propriétés de la courbure constitue une des questions majeures de la géométrie riemannienne (on pourra consulter sur ce sujet l'excellent [15]). Dans les sections suivantes, nous verrons plutôt la courbure jouer un rôle dans des problèmes d'analyse sur les variétés.

RÉFÉRENCES. Nous nous sommes largement inspirés, dans cette section aussi bien que dans la précédente, de [59]. Les ouvrages de base en géométrie riemannienne sont nombreux : on pourra consulter par exemple [22], [24], [50] ou [88].

1.4. Analyse non-linéaire, EDP sur les variétés

1.4.1. Le laplacien.

Soit $u \in C^2(M)$, on peut définir le laplacien riemannien de u. En coordonnées locales, c'est-à-dire dans une carte, on a

$$\Delta_g u = -\frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i \left(\sqrt{|g|} g^{ij} \partial_j u \right)$$

où l'on a adopté la convention de sommation des indices d'Einstein; quand un indice se trouve dans la même expression une fois en bas et une fois en haut, cela signifie que l'on somme sur toutes les valeurs admissibles de cet indice. En particulier, la formule ci-dessus doit être comprise ainsi :

$$\Delta_g u = -\frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i \left(\sqrt{|g|} g^{ij} \partial_j u \right) .$$

Dans l'espace euclidien, on retrouve le laplacien usuel avec une convention de signe inhabituelle :

$$\Delta_\xi u = -\partial_i^i u .$$

On peut construire le laplacien de manière intrinsèque sur (M, g). Nous l'admettrons ici comme nous admettrons la propriété essentielle du laplacien : pour tous $u, v \in C^2(M)$,

$$\int_M \left(\Delta_g u \right) v \, dv_g = \int_M (\nabla u, \nabla v)_g \, dv_g = \int_M u \Delta_g v \, dv_g$$

où $(.,.)_g$ désigne le produit scalaire riemannien. Cette formule d'intégration par parties permet de définir le laplacien d'une fonction u dans $H_1^2(M)$ de façon "faible". Le laplacien $\Delta_g u$ de $u \in H_1^2(M)$ sera tel que pour toute fonction v dans $C^\infty(M)$,

$$\int_M \left(\Delta_g u\right) v \, dv_g = \int_M (\nabla u, \nabla v)_g \, dv_g \, .$$

1.4.2. Problèmes de minimisation – Méthode variationnelle.

Tout d'abord, nous allons regarder un problème simple pour introduire la méthode variationnelle par minimisation. Étudions l'équation de Laplace sur une variété (M, g). On cherche à résoudre

$$\Delta_g u = f$$

pour $f \in C^\infty(M)$. En intégrant cette équation sur M et en utilisant la formule d'intégration par parties ci-dessus avec $v \equiv 1$, on voit qu'une condition nécessaire à l'existence d'une solution est que

$$\int_M f \, dv_g = 0 \, .$$

En fait, cette condition est également suffisante. Pour le montrer, on considère le problème de minimisation suivant :

$$\lambda = \inf_{\varphi \in \Lambda} \int_M |\nabla \varphi|_g^2 \, dv_g$$

où

$$\Lambda = \left\{ \varphi \in H_1^2(M) \, , \int_M \varphi \, dv_g = 0, \int_M f \varphi \, dv_g = 1 \right\} \, .$$

Clairement, $\frac{f}{\|f\|_2^2} \in \Lambda$ donc $\Lambda \neq \emptyset$. Bien entendu, il faut ici supposer que $f \not\equiv 0$. Si $f \equiv 0$, les fonctions constantes sont trivialement solutions de l'équation de Laplace ci-dessus. Soit $(\varphi_i)_{i \geq 1}$ une suite de fonctions appartenant à Λ telle que

$$\lim_{i \to +\infty} \int_M |\nabla \varphi_i|_g^2 \, dv_g = \inf_{\varphi \in \Lambda} \int_M |\nabla \varphi|_g^2 \, dv_g = \lambda \, .$$

Si on note λ_1 la première valeur propre non-nulle de Δ_g sur (M, g), on a l'inégalité de Poincaré suivante : pour tout $u \in H_1^2(M)$,

$$\lambda_1 \int_M (u - \overline{u})^2 \, dv_g \leqslant \int_M |\nabla u|_g^2 \, dv_g$$

où $\overline{u} = \mathrm{Vol}_g(M)^{-1} \int_M u \, dv_g$ est la moyenne de u sur M. On en déduit que notre suite (φ_i) est bornée dans $H_1^2(M)$. Par réflexivité de $H_1^2(M)$, il s'ensuit, qu'à extraction d'une sous-suite près, φ_i converge faiblement vers φ dans $H_1^2(M)$. Par propriété classique de la convergence faible, $\varphi \in \Lambda$ et

$$\int_M |\nabla \varphi|_g^2 \, dv_g + \int_M \varphi^2 \, dv_g \leqslant \liminf_{i \to +\infty} \left(\int_M |\nabla \varphi_i|_g^2 \, dv_g + \int_M \varphi_i^2 \, dv_g \right) \, .$$

D'après le théorème de Rellich-Kondrakov, l'injection de $H_1^2(M)$ dans $L^2(M)$ est compacte donc φ_i converge fortement vers φ dans $L^2(M)$. Ainsi,

$$\int_M |\nabla\varphi|_g^2\, dv_g \leqslant \liminf_{i\to+\infty} \int_M |\nabla\varphi_i|_g^2\, dv_g = \lambda\ .$$

Clairement, φ est une solution du problème de minimisation ci-dessus. On a bien $\varphi \in \Lambda$ et $\int_M |\nabla\varphi|_g^2\, dv_g = \lambda$. Il suit du théorème des multiplicateurs de Lagrange qu'il existe deux réels α et β tels que φ vérifie l'équation d'Euler associée à notre problème de minimisation : pour tout $\psi \in H_1^2(M)$,

$$\int_M (\nabla\varphi, \nabla\psi)_g\, dv_g = \alpha \int_M \psi\, dv_g + \beta \int_M f\psi\, dv_g\ .$$

En prenant $\psi \equiv 1$, on trouve $\alpha = 0$ et en prenant $\psi = \varphi$, on trouve $\beta = \lambda$. Ainsi, φ est une solution faible de

$$\Delta_g\varphi = \lambda f$$

donc $u = \frac{\varphi}{\lambda}$ est une solution faible de $\Delta_g u = f$. Il suit des résultats de régularité que l'on verra plus tard (section 1.4.4) que $u \in C^\infty(M)$ et vérifie donc $\Delta_g u = f$ en un sens fort.

On va maintenant s'attaquer à un problème de minimisation plus difficile. Le but est de résoudre le problème de Yamabe. Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension $n \geqslant 3$. Si $\tilde{g} = \varphi^{\frac{4}{n-2}} g$ est une métrique conforme à g, c'est-à-dire $\varphi \in C^\infty(M)$, $\varphi > 0$, alors les courbures scalaires de g et $\tilde{g}$ sont reliées par

$$\Delta_g\varphi + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g\varphi = \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\tilde{g}}\varphi^{2^\star-1}$$

où $2^\star = \frac{2n}{n-2}$ est l'exposant critique dans les injections de Sobolev $H_1^2(M) \subset L^q(M)$. Le problème de Yamabe consiste en trouver une métrique $\tilde{g}$ conforme à g qui soit à courbure scalaire constante. Le résoudre revient donc à trouver $\varphi \in C^\infty(M)$, $\varphi > 0$, telle que

$$\Delta_g\varphi + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g\varphi = \lambda\varphi^{2^\star-1} \qquad (E)$$

où λ est une constante. Une bonne approche est de tenter de résoudre le problème de minimisation suivant :

$$\lambda := \inf_{\varphi\in\Lambda} \int_M \left(|\nabla\varphi|_g^2 + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g\varphi^2 \right) dv_g$$

où

$$\Lambda = \left\{ \varphi \in H_1^2(M),\ \int_M |\varphi|^{2^\star}\, dv_g = 1 \right\}\ .$$

Si un tel problème de minimisation admet une solution φ strictement positive et régulière, alors φ vérifiera l'équation d'Euler-Lagrange associée (l'équation ci-dessus) et $\tilde{g} = \varphi^{\frac{4}{n-2}} g$ sera à courbure scalaire constante. Soit $(\varphi_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de Λ telle que

$$\lim_{i\to+\infty} \int_M \left(|\nabla\varphi_i|_g^2 + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g\varphi_i^2 \right) dv_g = \lambda\ .$$

Remarque : quitte à changer φ_i en $|\varphi_i|$, on peut supposer que $\varphi_i \geqslant 0$. Il suffit de remarquer que $\int_M |\nabla(|u|)|_g^2 \, dv_g = \int_M |\nabla u|_g^2 \, dv_g$ pour tout $u \in H_1^2(M)$.

Cette suite (φ_i) est clairement bornée dans $H_1^2(M)$. Donc, à extraction près,

$$\lim_{i\to+\infty} \varphi_i = \varphi \text{ faiblement dans } H_1^2(M) .$$

On a, comme dans le cas précédent, par injection compacte de $H_1^2(M)$ dans $L^2(M)$:

$$\lim_{i\to+\infty} \int_M S_g \varphi_i^2 \, dv_g = \int_M S_g \varphi^2 \, dv_g$$

et, par propriété de la limite faible,

$$\int_M |\nabla\varphi|_g^2 \, dv_g \leqslant \liminf_{i\to+\infty} \int_M |\nabla\varphi_i|_g^2 \, dv_g .$$

Donc

$$\int_M |\nabla\varphi|_g^2 \, dv_g + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M S_g \varphi^2 \, dv_g \leqslant \lambda .$$

Le problème est que, ici, nous n'avons aucun moyen d'assurer a priori que $\varphi \in \Lambda$. En effet, l'injection de $H_1^2(M)$ dans $L^{2^*}(M)$ n'est pas compacte donc $\int_M \varphi^{2^*} \, dv_g$ peut très bien être strictement plus petit que 1.

Yamabe [101], en 1960, pensait avoir résolu le problème mais avait "oublié" cette non-compacité de l'injection de Sobolev $H_1^2(M) \subset L^{2^*}(M)$. C'est Trüdinger [99] qui, en 1968, mettait en évidence ce point d'achoppement dans la preuve de Yamabe. Trüdinger lui-même la réparait dans quelques cas "simples" ($\lambda \leqslant 0$). Le problème de Yamabe a alors une longue histoire et a été le moteur d'un large pan de l'analyse non-linéaire sur les variétés. Sa résolution finale s'est faite en deux temps : par Aubin [6] en 1976 et par Schoen [91] en 1984.

Examinons de plus près ce problème. Lorsqu'une suite $(\varphi_i)_{i\geqslant 1}$ bornée dans $H_1^2(M)$ vérifie par exemple $\int_M |\varphi_i|^{2^*} \, dv_g = 1$ mais que sa limite faible φ vérifie $\int_M |\varphi|^{2^*} \, dv_g < 1$, on dit que (φ_i) a un défaut de compacité. À quoi peut-il être dû ? Pour l'expliquer, nous n'allons pas suivre l'historique du problème mais directement passer dans les années '80 et aux travaux de P.L. Lions [80, 81].

1.4.3. Défaut de compacité.

Commençons par nous placer dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. Nous allons énoncer dans ce cadre deux lemmes de concentration-compacité de P.L. Lions [80, 81], dont on peut trouver une belle présentation dans le livre de M. Struwe [97]. Le premier est le suivant :

Lemme de concentration-compacité 1 - *Soit (μ_i) une suite de mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire $\mu_i \geqslant 0$ et $\int_{\mathbb{R}^n} d\mu_i = 1$. À extraction d'une sous-suite près, une des trois propositions suivantes a lieu :*

i) (compacité) Il existe une suite (x_i) *de points de* $\mathbb{R}^n$ *telle que pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $R > 0$ *tel que*

$$\int_{B(x_i,R)} d\mu_i \geqslant 1 - \varepsilon .$$

ii) (évanescence) Pour tout $R > 0$,

$$\lim_{i\to+\infty} \left(\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \int_{B(x,R)} d\mu_i \right) = 0 .$$

iii) (dichotomie) Il existe un réel $0 < \lambda < 1$ *tel que pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $R > 0$ *et une suite* (x_i) *de points de* $\mathbb{R}^n$ *avec la propriété suivante : pour tout* $R' > R$,

$$\limsup_{i\to+\infty} \left(|\lambda - \int_{B(x_i,R)} d\mu_i| + |(1-\lambda) - \int_{\mathbb{R}^n\setminus B(x_i,R')} d\mu_i| \right) \leqslant \varepsilon .$$

Les dénominations de ces trois cas parlent d'elles-mêmes : soit toute la masse de (μ_i) reste autour d'une suite de points (compacité), soit la masse s'évanouit complètement dans $\mathbb{R}^n$ (évanescence), soit elle se coupe en deux (au minimum), c'est-à-dire qu'il n'en reste qu'un peu (pas tout) autour d'une suite de points et que le reste s'en va de plus en plus loin de cette suite de points (dichotomie). Ce lemme, lorsque nous l'utiliserons, sera tout le temps appliqué avec $\mu_i = |\varphi_i|^p dx$ où $\varphi_i \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_i|^p dx = 1$.

Exemple d'application typique : soit (φ_i) une suite de fonctions de $L^p(\mathbb{R}^n)$ telle que φ_i converge vers φ faiblement dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ et fortement dans $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$. On suppose que les (φ_i) sont normalisées ainsi : pour tout i, $\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_i|^p dx = 1$. Pour éliminer l'évanescence, on démontre souvent qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que la masse L^p de φ_i ne disparaisse pas autour de x_0. Ceci entraîne en particulier que $\varphi \not\equiv 0$. Si l'on arrive ensuite à interdire la dichotomie de $(|\varphi_i|^p dx)$, alors la compacité nous dit tout simplement que φ_i converge en fait fortement dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ vers φ.

C'est pourquoi l'on dit qu'on a affaire au lemme de concentration-compacité dans le cas localement compact. Aussi, si ce n'est plus, intéressant pour nous sera le cas non-localement compact. On l'énonce sous la forme suivante :

Lemme de concentration-compacité 2 - *Soit* $1 < p < n$ *et soit* $u_i \to u$ *faiblement dans* $H_1^p(\mathbb{R}^n)$. *Supposons que* $|\nabla u_i|^p dx \to \mu$ *et* $|u_i|^{p^*} dx \to \nu$ *faiblement au sens des mesures où* μ *et* ν *sont deux mesures positives et de masse finie sur* $\mathbb{R}^n$. *Ici,* $p^* = \frac{np}{n-p}$ *est l'exposant critique pour les injections de Sobolev de* $H_1^p(\mathbb{R}^n)$ *dans* $L^q(\mathbb{R}^n)$. *Alors il existe un ensemble* J *dénombrable, une famille de points* $(x_i)_{i\in J}$ *de points distincts de* $\mathbb{R}^n$, *deux familles de réels strictement positifs* $(\mu_i)_{i\in J}$ *et* $(\nu_i)_{i\in J}$ *tels que*

$$\nu = |u|^{p^*} dx + \sum_{i\in J} \nu_i \delta_{x_i}$$

et

$$\mu = |\nabla u|^p dx + \sum_{i \in J} \mu_i \delta_{x_i}$$

où δ_x désigne la masse de Dirac en $x \in \mathbb{R}^n$. De plus, les masses de Dirac "vérifient" l'inégalité de Sobolev euclidienne, c'est-à-dire, pour tout $i \in J$,

$$(\nu_i)^{\frac{p}{p^*}} \leqslant K(n,p)^p \mu_i .$$

Dans ce cadre, on n'a pas la compacité de l'injection de $H_1^p(\mathbb{R}^n)$ dans $L_{loc}^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ donc on n'a pas a priori $u_i \to u$ fortement dans $L_{loc}^{p^*}(\mathbb{R}^n)$. Nous sommes dans le cas non localement compact.

Revenons à notre question de départ : à quoi peut être dû un défaut de compacité d'une suite (φ_i) qui converge faiblement dans L^q ? En combinant ces deux lemmes, on voit que, dans $\mathbb{R}^n$, il y a trois causes possibles : évanescence, dichotomie et concentration (en masse de Dirac). Les deux premières sont de nature globale, la troisième est un phénomène purement local.

Ces deux lemmes se transposent aisément sur une variété riemannienne, compacte ou non, en remplaçant $K(n,p)$ par $\alpha_p(M)$, la meilleure première constante dans les inégalités de Sobolev, dans le lemme 2. Mais, sur une variété compacte, l'évanescence et la dichotomie n'ont aucun sens. Si l'on revient donc à notre problème de minimisation posé pour résoudre la question de Yamabe et à notre suite minimisante (φ_i), deux cas peuvent se présenter : soit elle ne présente pas de défaut de compacité, c'est-à-dire $\varphi_i \to \varphi$ fortement dans $L^{2^*}(M)$, soit on a affaire à un phénomène de concentration. Si $\varphi_i \to \varphi$ fortement dans $L^{2^*}(M)$, alors $\varphi \in \Lambda$ et donc φ est une solution de notre problème de minimisation. D'un autre côté, si on a affaire à un phénomène de concentration, il existe un ensemble dénombrable J et deux familles de réels positifs $(\mu_i)_{i\in J}$ et $(\nu_i)_{i\in J}$ tels que

$$1 = \|\varphi\|_{2^*}^{2^*} + \sum_{i\in J} \nu_i$$

et

$$\lim_{i\to+\infty} \|\nabla\varphi_i\|_2^2 = \|\nabla\varphi\|_2^2 + \sum_{i\in J} \mu_i$$

avec, pour tout $i \in J$,

$$\alpha_2(M)^2 \mu_i \geqslant \nu_i^{\frac{2}{2^*}}$$

où $\alpha_2(M)^2$ est la meilleure première constante dans l'inégalité de Sobolev $\left(I_2^2\right)$ (cf. section 2). On a alors

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{2^*}^2 &= \left(1 - \sum_{i\in J}\nu_i\right)^{\frac{2}{2^*}} \geqslant 1 - \left(\sum_{i\in J}\nu_i\right)^{\frac{2}{2^*}} \\ &\geqslant 1 - \sum_{i\in J}\nu_i^{\frac{2}{2^*}} \geqslant 1 - \alpha_2(M)^2 \sum_{i\in J}\mu_i . \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_M \left(|\nabla\varphi|_g^2 + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g \varphi^2 \right) dv_g &= \lambda - \sum_{i\in J} \mu_i \\ &\leqslant \left(\lambda - \alpha_2(M)^{-2}\right)\left(1 - \|\varphi\|_{2^*}^2\right) + \lambda\|\varphi\|_{2^*}^2\end{aligned}$$

ce qui n'est possible d'après la définition de λ que si $\lambda \geqslant \alpha_2(M)^{-2}$. En effet, s'il y a concentration, $\|\varphi\|_{2^*} < 1$.

Pour éliminer le phénomène de concentration, il suffit donc de montrer que

$$\lambda < \alpha_2(M)^{-2} .$$

C'est ce qu'ont fait Aubin [6] et Schoen [91] : la technique ici est de trouver une fonction $\varphi \in \Lambda$ telle que

$$\int_M \left(|\nabla\varphi|_g^2 + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g \varphi^2 \right) dv_g < \alpha_2(M)^{-2} ,$$

ce qui est possible dès que (M, g) n'est pas conformément difféomorphe à (S^n, h), la sphère standard. Conclure vraiment nécessiterait de connaître la valeur de $\alpha_2(M)$, ce qui sera l'objet de la section suivante.

Reste également à montrer que notre solution $\varphi \in H_1^2(M)$ qui vérifie l'équation (E) en un sens faible et que l'on a pu choisir positive ou nulle est en fait régulière et strictement positive.

1.4.4. Résultats de régularité et principes du maximum.

Comme la régularité est une notion purement locale, on retrouve bien entendu tous les résultats que l'on possède dans un cadre euclidien. Pour ce type de résultats, une référence très complète est [51]. En particulier, une solution faible de

$$\Delta_g u + au = f u^{2^*-1}$$

avec a et f dans $C^\infty(M)$ est en fait $C^\infty(M)$.

En ce qui concerne les principes du maximum, on peut dire qu'en général, on retrouve les résultats euclidiens. En particulier, si $u \in C^2(M)$ est une solution positive ou nulle de

$$\Delta_g u(x) = f(x, u(x))$$

avec $f \in C^0(M \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$, alors u est soit nulle, soit strictement positive partout.

Références. Encore une fois l'incontournable [59] pour les sections 1.4.1, 1.4.2. Pour la section 1.4.3, sans aucun doute [97]. Pour la section 1.4.4, on peut consulter la "bible" [51].

2. Inégalités de Sobolev H_1^2

Dans cette section, on s'attaque à la partie A du programme AB dans le cas $p = 2$.

2.1. Meilleure première constante

2.1.1. Valeur.

On rappelle que α_2^2 est la meilleure première constante dans l'inégalité (I_2^2) qui stipule que pour tout $u \in H_1^2(M)$,

$$\|u\|_{2^\star}^2 \leqslant A\|\nabla u\|_2^2 + B\|u\|_2^2 \,, \tag{I_2^2}$$

c'est-à-dire

$$\alpha_2^2 = \inf\left\{A \text{ t.q. } \exists B \text{ t.q. } (I_2^2) \text{ soit valide avec } A \text{ et } B\right\} \,.$$

La valeur de α_2 n'est en fait pas difficile à trouver : on a

$$\alpha_2 = K(n,2)$$

où $K(n,2)$ est la meilleure constante dans l'inégalité de Sobolev H_1^2 euclidienne. Ceci est dû au fait que, localement, métrique riemannienne et métrique euclidienne sont proches l'une de l'autre. En particulier, pour tout $x \in M$ et pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\delta > 0$ suffisamment petit tel que pour tout $u \in C_c^\infty\left(B_g(x,\delta)\right)$,

$$\left(\int_{B_g(x,\delta)} |u|^{2^\star}\, dv_g\right)^{\frac{2}{2^\star}} \leqslant \left(K(n,2)^2 + \varepsilon\right)\int_{B_g(x,\delta)} |\nabla u|_g^2\, dv_g \,,$$

des inégalités locales que l'on peut recoller ensuite sur toute la variété à l'aide d'une partition de l'unité pour donner l'existence d'un $B_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $u \in H_1^2(M)$,

$$\|u\|_{2^\star}^2 \leqslant \left(K(n,2)^2 + \varepsilon\right)\|\nabla u\|_2^2 + B_\varepsilon\|u\|_2^2 \,. \tag{I_ε}$$

Ceci nous dit que $\alpha_2^2 \leqslant K(n,2)^2$. Pour montrer l'inégalité inverse, on prend un point $x_0 \in M$, un réel $\delta > 0$ petit et on pose pour $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) &= \left(\varepsilon^2 + d_g(x_0,x)^2\right)^{1-\frac{n}{2}} - \left(\varepsilon^2 + \delta^2\right)^{1-\frac{n}{2}} \,, && x \in B_g(x_0,\delta) \,; \\ u_\varepsilon(x) &= 0 \,, && x \in M \backslash B_g(x_0,\delta) \,. \end{aligned}$$

Remarque : ces fonctions tests sont tout juste les fonctions extrémales de l'inégalité de Sobolev euclidienne que l'on a amené à zéro sur le bord de $B_g(x_0,\delta)$ et qui se concentrent en x_0 quand $\varepsilon \to 0$.

Un simple calcul dans la carte exponentielle donne alors

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2}{\|u_\varepsilon\|_{2^\star}^2} = K(n,2)^{-2}$$

et

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\|u_\varepsilon\|_2^2}{\|u_\varepsilon\|_{2^*}^2} = 0 ,$$

ce qui entraîne $\alpha_2^2 \geqslant K(n,2)^2$.

On va maintenant s'attaquer aux deuxième et troisième questions du programme.

2.1.2. Inégalité optimale.

La question Q3 concerne la validité de l'inégalité optimale

$$\|u\|_{2^*}^2 \leqslant K(n,2)^2 \|\nabla u\|_2^2 + B\|u\|_2^2 . \qquad (I_{2,\mathrm{opt}}^2)$$

On dit que $(I_{2,\mathrm{opt}}^2)$ est valide s'il existe une constante $B > 0$ telle que l'inégalité ait lieu avec cette constante B pour toute fonction u dans $H_1^2(M)$. En d'autres termes, la question est de savoir si on peut prendre $\varepsilon = 0$ dans l'inégalité (I_ε) ci-dessus. Tout d'abord, si l'on regarde d'un peu plus près la construction de (I_ε), on se rend compte que lorsque $\varepsilon \to 0$, $B_\varepsilon \to +\infty$. Ainsi, la question n'admet pas une réponse triviale. Aubin avait conjecturé dans [7] en 1976 que $(I_{2,\mathrm{opt}}^2)$ était valide. Il a fallu attendre 20 ans et les travaux de Hebey et Vaugon [69, 70] pour avoir une réponse positive à cette conjecture.

Théorème 2.1 (Hebey-Vaugon [70], 1995) – *Sur toute variété riemannienne compacte (M,g) de dimension $n \geqslant 3$, $(I_{2,\mathrm{opt}}^2)$ est valide. En d'autres termes, il existe $B > 0$ telle que pour tout $u \in H_1^2(M)$,*

$$\|u\|_{2^*}^2 \leqslant K(n,2)^2 \left[\|\nabla u\|_2^2 + B\|u\|_2^2\right] . \qquad (I_{2,\mathrm{opt}}^2)$$

La preuve de ce résultat, qui a été simplifiée depuis, constitue la première étude de profil asymptotique de suites de solutions d'E.D.P. elliptiques d'énergie minimale qui développent un phénomène de concentration dans un cadre riemannien (cf. section 3). Passée cette première étape, que sait-on ? On connaît la valeur de α_2 et on sait que l'inégalité $(I_{2,\mathrm{opt}}^2)$ est valide, et par voie de conséquence, que $(I_{2,\mathrm{opt}}^1)$ l'est. On a ainsi répondu aux trois premières questions du programme. Une chose importante à remarquer est que la géométrie de la variété n'intervient pas du tout dans les réponses à ces trois premières questions : la valeur de α_2 est indépendante de la variété et les inégalités optimales associées $(I_{2,\mathrm{opt}}^2)$ et $(I_{2,\mathrm{opt}}^1)$ sont valides quelle que soit la variété.

2.1.3. Quatrième question du programme AB.

Dans l'inégalité $(I_{2,\mathrm{opt}}^2)$, on note $B_0(g)$ le meilleur B que l'on puisse prendre. On a alors pour tout $u \in H_1^2(M)$,

$$\|u\|_{2^*}^2 \leqslant K(n,2)^2 \left[\|\nabla u\|_2^2 + B_0(g)\|u\|_2^2\right] . \qquad (I_{g,\mathrm{opt}})$$

Cette inégalité est totalement optimale (avec priorité donnée à la première constante). On a fait apparaître la métrique explicitement dans la notation $B_0(g)$ car cette seconde constante va dépendre de la géométrie de la variété. La quatrième question du programme est alors la suivante :

Q4 - Que peut-on dire sur $B_0(g)$? Peut-on la calculer ? En donner des bornes inférieures et supérieures, implicites ou explicites ?

Peu de réponses à cette quatrième question sont disponibles aujourd'hui. En particulier, calculer $B_0(g)$ est extrêmement difficile. La seule variété où $B_0(g)$ est connu est la sphère standard (et sa classe conforme si $n \geqslant 4$, cf. théorème 2.2 ci-dessous). Même obtenir des bornes supérieures explicites sur $B_0(g)$ pour de larges classes de variétés est une question qui semble difficile. On en possède quelques unes sur les quotients de la sphère standard et sur le tore plat (variétés où les nombreuses symétries permettent d'obtenir des résultats de ce type). Par contre, on peut obtenir des bornes supérieures implicites sur $B_0(g)$ dépendant de bornes sur les courbures et le rayon d'injectivité de la variété.

En ce qui concerne les bornes inférieures, deux principales sont disponibles. Il est en effet beaucoup plus facile d'obtenir des minorations du $B_0(g)$. Il suffit de rentrer des fonctions tests bien choisies dans $(I_{g,\text{opt}})$ pour en avoir. En premier lieu, si on rentre $u \equiv 1$ dans $(I_{g,\text{opt}})$, on récupère la borne inférieure suivante :

$$B_0(g) \geqslant K(n,2)^{-2}\,\text{Vol}_g(M)^{-\frac{2}{n}} \ .$$

La deuxième minoration est un peu plus subtile. On prend $x_0 \in M$ et $\delta > 0$ suffisamment petit. Et on pose pour $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) &= \left(\varepsilon^2 + d_g(x_0,x)^2\right)^{1-\frac{n}{2}} - \left(\varepsilon^2+\delta^2\right)^{1-\frac{n}{2}} \quad &, x \in B_g(x_0,\delta) \ ; \\ u_\varepsilon(x) &= 0 &, x \in M\backslash B_g(x_0,\delta) \ . \end{aligned}$$

On rentre ces fonctions-là dans $(I_{g,\text{opt}})$ et on fait un développement limité lorsque $\varepsilon \to 0$ en utilisant le développement limité de la métrique g dans la carte exponentielle en x_0. Ceci donne pour $n \geqslant 4$

$$\left(B_0(g) - \frac{n-2}{4(n-1)}S_g(x_0)\right)\varepsilon^2 + o\left(\varepsilon^2\right) \geqslant 0 \ .$$

ATTENTION ! Ce développement limité n'est plus valable si $n = 3$. Comme ceci est vrai pour tout $x_0 \in M$, on en déduit aisément

$$B_0(g) \geqslant B_0(g)_{\text{extr}} = \frac{n-2}{4(n-1)} \max_{x \in M} S_g(x) \quad \text{si } n \geqslant 4 \ .$$

Remarque : Cette constante $B_0(g)_{\text{extr}}$ est dite extrémale dans le sens suivant : c'est le $B_0(g)$ minimal que l'on puisse espérer avoir dans $(I_{g,\text{opt}})$. Attention ! $B_0(g)_{\text{extr}}$ n'a plus rien d'extrémale si $n = 3$!!!

Munis de ces deux bornes inférieures sur $B_0(g)$, nous allons pouvoir attaquer la cinquième et dernière question du programme. Cinquième question qui, on va le voir, n'est pas sans lien avec la quatrième.

2.2. Fonctions extrémales

2.2.1. Cinquième question du programme AB.

Au vu de l'optimalité de l'inégalité ($I_{g,\mathrm{opt}}$), une question se pose très naturellement : le cas d'égalité est-il atteint ? On dira que $u \in H_1^2(M)$, non identiquement nulle, est une fonction extrémale pour ($I_{g,\mathrm{opt}}$) si u vérifie l'égalité dans ($I_{g,\mathrm{opt}}$). La cinquième question du programme est donc la suivante :

Q5 – Existe-t-il des fonctions extrémales pour ($I_{g,\mathrm{opt}}$) ?

2.2.2. Le cas de la sphère.

La première réponse, simple mais intéressante, à cette cinquième question fut obtenue par Hebey [60] en 1998. On note (S^n, h), $n \geqslant 3$, la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ munie de sa métrique standard (c'est-à-dire la métrique induite par la métrique euclidienne). On note de plus $[h]$ sa classe conforme :

$$[h] = \left\{ u^{\frac{4}{n-2}} h,\ u > 0,\ u \in C^\infty(S^n) \right\} .$$

On a alors le résultat suivant qui est une réponse, complète en dimensions $n \geqslant 4$, aux questions 4 et 5 du programme dans la classe conforme de la sphère standard.

Théorème 2.2 (Hebey [60], 1998) – *Soit (S^n, h) la sphère standard de dimension n.*

Si $n \geqslant 4$, alors pour tout $g \in [h]$,

$$B_0(g) = B_0(g)_{\mathrm{extr}} = \frac{n-2}{4(n-1)} \max_{S^n} S_g$$

et il existe des fonctions extrémales pour ($I_{g,\mathrm{opt}}$) si et seulement si g est isométrique à λh, λ une constante strictement positive.

Si $n = 3$, alors pour tout $g \in [h]$,

$$B_0(g) \leqslant B_0(g)_{\mathrm{extr}} = \frac{1}{8} \max_{S^3} S_g$$

mais il existe maintenant $g \in [h]$ telle que l'inégalité soit stricte. En cas d'égalité, il existe des fonctions extrémales pour ($I_{g,\mathrm{opt}}$) si et seulement si g est isométrique à λh, λ une constante strictement positive.

Les extrémales de ($I_{h,\mathrm{opt}}$) sont toutes connues. Elles s'écrivent sous la forme

$$u = \lambda\,(\beta - (x_0, x))^{1-\frac{n}{2}}$$

où $x_0 \in S^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\beta > 1$ et (x_0, x) est le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

Preuve (pour $n \geqslant 4$) – La preuve de ce théorème découle de l'inégalité suivante : pour tout $g \in [h]$ et pour toute fonction $u \in C^\infty(S^n)$,

$$\left(\int_{S^n} |u|^{2^*}\, dv_g\right)^{\frac{2}{2^*}} \leqslant K(n,2)^2 \left[\int_{S^n} |\nabla u|_g^2\, dv_g + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_{S^n} S_g u^2\, dv_g\right] .$$

Pour l'obtenir, il suffit de remarquer que cette inégalité est conformément invariante et qu'elle est vraie sur la sphère standard (S^n, h) puisqu'elle n'est que la traduction, après projection stéréographique, de l'inégalité de Sobolev H_1^2 euclidienne. Ceci montre clairement que $B_0(g) \leqslant B_0(g)_{\text{extr}}$ pour tout $g \in [h]$. Pour $n \geqslant 4$, on avait obtenu l'inégalité inverse dans la section 2.1.3. Donc $B_0(g) = B_0(g)_{\text{extr}}$. Imaginons un instant qu'il y ait une fonction extrémale u pour $(I_{g,\text{opt}})$. Cette fonction peut être choisie strictement positive et régulière : ceci est une conséquence de l'équation d'Euler-Lagrange qu'elle vérifie, des résultats de régularité et des principes du maximum énoncés section 1.4.4. En appliquant l'inégalité ci-dessus à u, on se rend compte que

$$\int_{S^n} \left(\max_{S^n} S_g - S_g(x)\right) u(x)^2\, dv_g(x) \leqslant 0 ,$$

ce qui entraîne $S_g \equiv$ Cte. Par le théorème d'Obata [86], g est alors isométrique à h, à un facteur multiplicatif λ près. ◆

Ce qui manque en dimension 3 pour avoir la même conclusion est bien entendu l'inégalité $B_0(g) \geqslant B_0(g)_{\text{extr}}$. Que cette inégalité puisse être violée en dimension 3 est d'ailleurs l'objet de la deuxième partie du théorème dont la preuve est beaucoup plus subtile que celle de la première partie. Mais nous n'en parlerons pas ici : la dimension 3 sera l'objet de la section 4. Nous y verrons en particulier que l'énoncé : “il existe $g \in [h]$ telle que $B_0(g) < B_0(g)_{\text{extr}}$ en dimension 3” peut être étendu pour devenir : en dimension 3, pour toute métrique $g \in [h]$ non isométrique à λh, $\lambda \in \mathbb{R}_\star^+$, $B_0(g) < B_0(g)_{\text{extr}}$.

Au vu de ce résultat, l'existence de fonctions extrémales pour $(I_{g,\text{opt}})$ paraît avoir un coût géométrique certain : si $(I_{g,\text{opt}})$ en possède sur (S^n, g), g conforme à h, $n \geqslant 4$, alors g est à un facteur multiplicatif près isométrique à la métrique standard. Nous allons voir que, de manière assez surprenante, c'est tout le contraire qui se produit : l'existence de fonctions extrémales n'est en fait pas “chère”, c'est plutôt la non-existence de fonctions extrémales qui est contraignante. Nous allons également voir que les questions 4 et 5 du programme sont complètement intriquées.

2.2.3. Le cas général.

Concernant l'existence de fonctions extrémales dans le cas général, on a le résultat suivant :

Théorème 2.3 (Djadli-Druet [28], 1999) – *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geqslant 4$. Au moins l'une des deux propositions suivantes a lieu :*

1) $B_0(g) = B_0(g)_{\text{extr}}$.

2) Il existe des fonctions extrémales pour $(I_{g,\mathrm{opt}})$.

Avant d'esquisser la preuve de ce théorème, donnons-en un corollaire qui montre que l'existence de fonctions extrémales est courante :

Corollaire 2.4 (Djadli-Druet [28], 1999) – *Soit* (M, g) *une variété riemannienne compacte de dimension* $n \geqslant 4$. *L'inégalité optimale* $(I_{g,\mathrm{opt}})$ *possède des fonctions extrémales dans les deux cas suivants :*

1) $S_g \leqslant 0$ *sur* M.

2) $S_g \equiv \mathrm{Cte}$ *sur* M.

En effet, si $S_g \leqslant 0$, comme $B_0(g) \geqslant K(n,2)^{-2}\,\mathrm{Vol}_g(M)^{-\frac{2}{n}}$, on a $B_0(g) > 0 \geqslant B_0(g)_{\mathrm{extr}}$ donc, d'après le théorème ci-dessus, il existe des fonctions extrémales pour $(I_{g,\mathrm{opt}})$. Maintenant, si $S_g \equiv \mathrm{Cte}$, c'est une conséquence de la résolution du problème de Yamabe par Aubin [6] et Schoen [91] que $B_0(g) > B_0(g)_{\mathrm{extr}}$ si (M, g) n'est pas isométrique à (S^n, h). D'où l'existence de fonctions extrémales pour $(I_{g,\mathrm{opt}})$, le cas de la sphère standard ayant déjà été traité dans la section précédente.

Esquisse de preuve du théorème – Nous allons donner les grandes lignes de cette preuve et en détailler quelques points particuliers. Tout d'abord, par définition même de $B_0(g)$, pour tout $\varepsilon > 0$, si on pose

$$\lambda_\varepsilon := \inf_{u \in \Lambda} \left(\|\nabla u\|_2^2 + (B_0(g) - \varepsilon)\, \|u\|_2^2 \right)$$

où

$$\Lambda = \left\{ u \in H_1^2(M),\ \|u\|_{2^*} = 1 \right\}\ ,$$

on a

$$\lambda_\varepsilon < K(n,2)^{-2}\ .$$

On a vu section 1.1.4 que cette inégalité assure l'existence d'une solution $u_\varepsilon \in C^\infty(M)$, $u_\varepsilon > 0$, à ce problème de minimisation. Elle vérifie alors l'équation

$$\Delta_g u_\varepsilon + (B_0(g) - \varepsilon)\, u_\varepsilon = \lambda_\varepsilon u_\varepsilon^{2^*-1}$$

avec $\|u_\varepsilon\|_{2^*} = 1$.

L'objectif ensuite est d'étudier cette suite (u_ε) quand $\varepsilon \to 0$. Tout d'abord, (u_ε) est bornée dans $H_1^2(M)$ donc, à extraction d'une sous-suite près, $u_\varepsilon \rightharpoonup u_0$ faiblement dans $H_1^2(M)$. En passant à la limite dans l'équation vérifiée par u_ε, on voit que

$$\Delta_g u_0 + B_0(g) u_0 = \lambda_0 u_0^{2^*-1}$$

où $\lim_{\varepsilon\to 0} \lambda_\varepsilon = \lambda_0$ à extraction près. On applique maintenant $(I_{g,\mathrm{opt}})$ à u_0 pour obtenir

$$\|u_0\|_{2^*}^2 \leqslant \lambda_0 K(n,2)^2 \|u_0\|_{2^*}^{2^*}\ .$$

Par propriété de la limite faible, $\|u_0\|_{2^*} \leqslant 1$ et comme $\lambda_\varepsilon < K(n,2)^{-2}$, on a également $\lambda_0 K(n,2)^2 \leqslant 1$. Ainsi ceci n'est possible que si $u_0 \equiv 0$ ou si $\|u_0\|_{2^*} = 1$ et $\lambda_0 = K(n,2)^{-2}$. Dans ce deuxième cas, u_0 est une fonction extrémale pour $(I_{g,\mathrm{opt}})$.

Supposons maintenant que $u_0 \equiv 0$. Par compacité de l'injection de $H_1^2(M)$ dans $L^2(M)$, on a alors

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|u_\varepsilon\|_2^2 = 0 \,.$$

Soit maintenant un point x_ε de M où u_ε atteint son maximum. On note

$$u_\varepsilon(x_\varepsilon) = \|u_\varepsilon\|_\infty = \mu_\varepsilon^{1-\frac{n}{2}} \,.$$

On a alors

$$1 = \|u_\varepsilon\|_{2^*}^{2^*} \leqslant \mu_\varepsilon^{-2} \|u_\varepsilon\|_2^2$$

donc $\mu_\varepsilon \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$. Soit $\delta > 0$ petit, on pose pour $x \in B_0\left(\delta\mu_\varepsilon^{-1}\right)$, la boule euclidienne de centre 0 et de rayon $\delta\mu_\varepsilon^{-1}$,

$$\begin{aligned} g_\varepsilon(x) &= \exp_{x_\varepsilon}^* g(\mu_\varepsilon x)\,, \quad x \in \Omega_\varepsilon \text{ et} \\ \tilde{u}_\varepsilon(x) &= \mu_\varepsilon^{\frac{n}{2}-1} u_\varepsilon\left(\exp_{x_\varepsilon}(\mu_\varepsilon x)\right), \quad x \in \Omega_\varepsilon \,. \end{aligned}$$

Clairement, $\tilde{u}_\varepsilon$ vérifie

$$\Delta_{g_\varepsilon} \tilde{u}_\varepsilon + (B_0(g) - \varepsilon)\,\mu_\varepsilon^2 \tilde{u}_\varepsilon = \lambda_\varepsilon \tilde{u}_\varepsilon^{2^*-1} \tag{2.1}$$

dans $B_0\left(\delta\mu_\varepsilon^{-1}\right)$ et

$$\tilde{u}_\varepsilon(0) = \|\tilde{u}_\varepsilon\|_\infty = 1 \,.$$

Comme $\mu_\varepsilon \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$, on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} g_\varepsilon = \xi \quad \text{dans } C^2_{loc}(\mathbb{R}^n) \,.$$

Ainsi, il est clair qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $v \in C_c^\infty(B_0(1))$,

$$\left(\int_{B_0(1)} |v|^{2^*} \, dv_{g_\varepsilon}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leqslant C \int_{B_0(1)} |\nabla v|_{g_\varepsilon}^2 \, dv_{g_\varepsilon} \,. \tag{2.2}$$

On va maintenant appliquer le schème itératif de Moser à (2.1). L'objectif est d'obtenir l'existence d'une constante $C > 0$ indépendante de ε telle que

$$\sup_{B_0(1/2)} \tilde{u}_\varepsilon \leqslant C \left(\int_{B_0(1)} \tilde{u}_\varepsilon^{2^*} \, dv_{g_\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2^*}} \,.$$

Soit $\eta_\varepsilon \in C_c^\infty(B_0(r_0))$ telle que $\eta_\varepsilon = 1$ sur $B_0(r_1)$ où $0 < r_1 < r_0 \leqslant 1$. On peut toujours choisir η_ε telle que $0 \leqslant \eta_\varepsilon \leqslant 1$, $|\Delta_{g_\varepsilon}\eta_\varepsilon| \leqslant \frac{C}{(r_0-r_1)^2}$ et $|\nabla\eta_\varepsilon|_{g_\varepsilon} \leqslant \frac{C}{r_0-r_1}$. Soit $k > 2$. On multiplie l'équation (2.1) par $\eta_\varepsilon^2 \tilde{u}_\varepsilon^{k-1}$ et on intègre sur $B_0(r_0)$. On obtient

$$\int \eta_\varepsilon^2 \tilde{u}_\varepsilon^{k-1} \Delta_{g_\varepsilon} \tilde{u}_\varepsilon \, dv_{g_\varepsilon} \leqslant \lambda_\varepsilon \int \eta_\varepsilon^2 \tilde{u}_\varepsilon^{k+2^*-2} \, dv_{g_\varepsilon}$$

où les intégrales sont prises, à partir de maintenant, sur $B_0(r_0)$. En intégrant par parties, on a alors

$$\int \eta_\varepsilon^2 \tilde{u}_\varepsilon^{k-2} |\nabla \tilde{u}_\varepsilon|_{g_\varepsilon}^2 \, dv_{g_\varepsilon} \leqslant \frac{C}{k-1} \int \eta_\varepsilon^2 \tilde{u}_\varepsilon^{k+2^*-2} \, dv_{g_\varepsilon} + \frac{C}{(r_0 - r_1)^2 k(k-1)} \int \tilde{u}_\varepsilon^k \, dv_{g_\varepsilon}$$

où, comme ci-dessous, C désigne une constante indépendante de ε, r_0, r_1 et k. D'un autre côté, en intégrant par parties, on a

$$\int |\nabla \left(\eta_\varepsilon \tilde{u}_\varepsilon^{\frac{k}{2}}\right)|_{g_\varepsilon}^2 \, dv_{g_\varepsilon} \leqslant \frac{C}{(r_0 - r_1)^2} \int \tilde{u}_\varepsilon^k \, dv_{g_\varepsilon} + \frac{k^2}{4} \int \eta_\varepsilon^2 \tilde{u}_\varepsilon^k |\nabla \tilde{u}_\varepsilon|_{g_\varepsilon}^2 \, dv_{g_\varepsilon} .$$

D'où

$$\int |\nabla \left(\eta_\varepsilon \tilde{u}_\varepsilon^{\frac{k}{2}}\right)|_{g_\varepsilon}^2 \, dv_{g_\varepsilon} \leqslant Ck \int \eta_\varepsilon^2 \tilde{u}_\varepsilon^{k+2^*-2} \, dv_{g_\varepsilon} + \frac{C}{(r_0 - r_1)^2} \int \tilde{u}_\varepsilon^k \, dv_{g_\varepsilon} .$$

En utilisant maintenant (2.2), on obtient donc

$$\left(\int \left(\eta_\varepsilon \tilde{u}_\varepsilon^{\frac{k}{2}}\right)^{2^*} dv_{g_\varepsilon}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leqslant Ck \int \eta_\varepsilon^2 \tilde{u}_\varepsilon^{k+2^*-2} \, dv_{g_\varepsilon} + \frac{C}{(r_0 - r_1)^2} \int \tilde{u}_\varepsilon^k \, dv_{g_\varepsilon} .$$

Comme $\tilde{u}_\varepsilon \leqslant 1$ sur $B_0(r_0)$, ceci donne

$$\left(\int_{B_0(r_1)} \tilde{u}_\varepsilon^{\frac{2^* k}{2}} \, dv_{g_\varepsilon}\right)^{\frac{2}{2^* k}} \leqslant \left(\frac{Ck}{(r_0 - r_1)^2}\right)^{\frac{1}{k}} \left(\int_{B_0(r_0)} \tilde{u}_\varepsilon^k \, dv_{g_\varepsilon}\right)^{\frac{1}{k}} . \tag{2.3}$$

On pose pour $i \geqslant 0$,

$$r_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^i}$$

et

$$k_0 = 2^* , \ k_{i+1} = \frac{2^*}{2} k_i .$$

On obtient alors par récurrence sur (2.3) que pour tout $l \geqslant 1$,

$$\left(\int_{B_0(r_l)} \tilde{u}_\varepsilon^{k_l} \, dv_{g_\varepsilon}\right)^{\frac{1}{k_l}} \leqslant \prod_{i=0}^{l-1} \left(\frac{Ck_i}{(r_i - r_{i+1})^2}\right)^{\frac{1}{k_i}} \left(\int_{B_0(1)} \tilde{u}_\varepsilon^{2^*} \, dv_{g_\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2^*}} .$$

En passant à la limite quand $l \to +\infty$, on obtient bien

$$\sup_{B_0(1/2)} \tilde{u}_\varepsilon \leqslant C \left(\int_{B_0(1)} \tilde{u}_\varepsilon^{2^*} \, dv_{g_\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2^*}} \tag{2.4}$$

où C est indépendant de ε.

Appliquons maintenant le principe de concentration-compacité de P.L. Lions à $\tilde{u}_\varepsilon^{2^*} \, dv_{g_\varepsilon}$ (cf. section 1.4.3). L'évanescence est interdite par (2.4). La concentration (en masse de Dirac) est interdite car $\tilde{u}_\varepsilon(x) \leqslant \tilde{u}_\varepsilon(0) = 1$. Quant à la dichotomie, elle ne peut jamais se produire lorsqu'on est sur une suite de minimiseurs, ce qui est le cas des $\tilde{u}_\varepsilon$. En gros, s'il y avait dichotomie, on aurait mieux fait pour minimiser notre fonctionnelle de ne prendre qu'une partie des $\tilde{u}_\varepsilon$ et "d'oublier l'autre" (voir par exemple [97], pp. 46-49, pour la preuve d'une telle assertion). Il ne nous reste donc que la compacité : celle-ci nous dit exactement que

$$\lim_{R\to+\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{B_0(R)} \tilde{u}_\varepsilon^{2^*}\, dv_{g_\varepsilon} = 1\ . \tag{2.5}$$

Remarque : nous avons utilisé ici une technique très souple pour arriver à nos fins. Mais, dans le cas présent, il existait un "marteau" qui permettait d'obtenir ce résultat très rapidement. Les opérateurs Δ_{g_ε} étant uniformément elliptiques et g_ε tendant vers la métrique euclidienne dans $C^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$, des résultats classiques de régularité elliptique (théorème 8.24 de [51]) donnaient directement que

$$\tilde{u}_\varepsilon \to u_0 \quad \text{dans } C^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$$

avec $u_0(0) = \max u_0 = 1$ et où u_0 vérifie

$$\Delta_\xi u_0 = K(n,2)^{-2} u_0^{2^*-1}\ .$$

D'après les travaux de [21], on a alors

$$u_0(x) = \left(1 + \frac{\omega_n^{\frac{2}{n}}}{4}|x|^2\right)^{1-\frac{n}{2}}$$

ce qui donne ensuite l'estimée intégrale (2.5) ci-dessus, avec même des informations supplémentaires. Si j'ai présenté une méthode plus souple, ce n'est pas parce que je déteste les marteaux que l'on a à portée de main, au contraire, mais plutôt parce que la souplesse de cette technique nous sera bien utile sections 6 et 7.

L'estimée intégrale (2.5) traduite en terme de u_ε est exactement :

$$\lim_{R\to+\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{B_g(x_\varepsilon, R\mu_\varepsilon)} u_\varepsilon^{2^*}\, dv_g = 1\ . \tag{2.6}$$

Dans [30], pour prouver la conjecture d'Aubin (cf. section 6), on avait démontré que cette estimée intégrale se transforme de manière très générale en l'estimée ponctuelle suivante : il existe $C > 0$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $x \in M$,

$$d_g(x_\varepsilon, x)^{\frac{n}{2}-1}\, u_\varepsilon(x) \leqslant C\ . \tag{2.7}$$

Comment démontre-t-on une telle estimée ponctuelle ? On pose

$$w_\varepsilon(x) = d_g(x_\varepsilon, x)^{\frac{n}{2}-1}\, u_\varepsilon(x)$$

et on suppose que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|w_\varepsilon\|_\infty = +\infty\ .$$

Soit y_ε un point de M où w_ε atteint son maximum. On note alors

$$u_\varepsilon(y_\varepsilon) = \nu_\varepsilon^{1-\frac{n}{2}} .$$

Comme $w_\varepsilon(y_\varepsilon) \to +\infty$, on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{d_g(x_\varepsilon, y_\varepsilon)}{\nu_\varepsilon} = +\infty . \tag{2.8}$$

D'un autre côté,

$$w_\varepsilon(y_\varepsilon) \leqslant d_g(x_\varepsilon, y_\varepsilon)^{\frac{n}{2}-1} \mu_\varepsilon^{1-\frac{n}{2}}$$

donc

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{d_g(x_\varepsilon, y_\varepsilon)}{\mu_\varepsilon} = +\infty . \tag{2.9}$$

On pose maintenant pour $x \in B_0\left(\delta\nu_\varepsilon^{-1}\right) \subset \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} h_\varepsilon &= \exp_{y_\varepsilon}^* g(\nu_\varepsilon x) \text{ et} \\ v_\varepsilon &= \nu_\varepsilon^{\frac{n}{2}-1} u_\varepsilon\left(\exp_{y_\varepsilon}(\nu_\varepsilon x)\right) . \end{aligned}$$

Soit $x \in B_0(1)$, on écrit que

$$d_g\left(x_\varepsilon, \exp_{y_\varepsilon}(\nu_\varepsilon x)\right)^{\frac{n}{2}-1} v_\varepsilon(x) = \nu_\varepsilon^{\frac{n}{2}-1} w_\varepsilon\left(\exp_{y_\varepsilon}(\nu_\varepsilon x)\right) .$$

Or, d'après (2.8),

$$d_g\left(x_\varepsilon, \exp_{y_\varepsilon}(\nu_\varepsilon x)\right) \geqslant d_g(x_\varepsilon, y_\varepsilon) - \nu_\varepsilon |x| \geqslant \frac{1}{2} d_g(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$$

pour $\varepsilon > 0$ petit. Ainsi,

$$\begin{aligned} v_\varepsilon(x) &\leqslant 2^{\frac{n}{2}-1} d_g(x_\varepsilon, y_\varepsilon)^{1-\frac{n}{2}} \nu_\varepsilon^{\frac{n}{2}-1} w_\varepsilon\left(\exp_{y_\varepsilon}(\nu_\varepsilon x)\right) \\ &\leqslant 2^{\frac{n}{2}-1} d_g(x_\varepsilon, y_\varepsilon)^{1-\frac{n}{2}} \nu_\varepsilon^{\frac{n}{2}-1} w_\varepsilon(y_\varepsilon) \\ &\leqslant 2^{\frac{n}{2}-1} . \end{aligned}$$

Donc, pour $\varepsilon > 0$ petit,

$$\sup_{B_0(1)} v_\varepsilon \leqslant 2^{\frac{n}{2}-1} .$$

Maintenant, v_ε vérifie

$$\Delta_{h_\varepsilon} v_\varepsilon \leqslant \lambda_\varepsilon v_\varepsilon^{2^*-1}$$

dans $B_0(1)$. Le schème itératif de Moser donne alors l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$v_\varepsilon(0) = 1 \leqslant \sup_{B_0(1/2)} v_\varepsilon \leqslant C \| v_\varepsilon \|_{L^{2^*}(B_0(1))} .$$

Donc

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\int_{B_g(y_\varepsilon,\nu_\varepsilon)} u_\varepsilon^{2^*}\,dv_g \geqslant \frac{1}{C}\,.$$

D'après (2.6), (2.8), (2.9) et cette dernière relation, on obtient

$$\begin{aligned} 1=\int_M u_\varepsilon^{2^*}\,dv_g &\geqslant \liminf_{\varepsilon\to 0}\int_{B_g(y_\varepsilon,\nu_\varepsilon)} u_\varepsilon^{2^*}\,dv_g+\liminf_{\varepsilon\to 0}\int_{B_g(x_\varepsilon,R\mu_\varepsilon)} u_\varepsilon^{2^*}\,dv_g\\ &\geqslant \frac{1}{C}+1-\varepsilon(R)\end{aligned}$$

avec $\varepsilon(R)\to 0$ quand $R\to+\infty$, une contradiction. L'estimée (2.7) est ainsi démontrée.

De la même façon, on peut montrer que

$$\lim_{R\to+\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{x\in M\setminus B_g(x_\varepsilon,R\mu_\varepsilon)} d_g(x_\varepsilon,x)^{\frac{n}{2}-1}u_\varepsilon(x)=0\,. \tag{2.10}$$

Avant de conclure, on a besoin de montrer que la norme L^2 de u_ε se concentre autour de x_0. Soit $\delta>0$, on veut montrer que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\int_{M\setminus B_g(x_0,\delta)} u_\varepsilon^2\,dv_g}{\int_M u_\varepsilon^2\,dv_g}=0\,.$$

Pour ce faire, on écrit que

$$\begin{aligned}\int_{M\setminus B_g(x_0,\delta)} u_\varepsilon^2\,dv_g &\leqslant \left(\sup_{M\setminus B_g(x_0,\delta)} u_\varepsilon\right)\int_M u_\varepsilon\,dv_g\\ &\leqslant C\left(\int_M u_\varepsilon\,dv_g\right)^2\end{aligned}$$

en utilisant le schème itératif de Moser. Or, en intégrant l'équation vérifiée par u_ε sur M, on obtient

$$\|u_\varepsilon\|_1^2\leqslant C\|u_\varepsilon\|_{2^*-1}^{2(2^*-1)}\,,$$

ce qui donne par inégalité de Hölder

$$\|u_\varepsilon\|_1^2=o\left(\|u_\varepsilon\|_2^2\right)$$

pour $n\geqslant 5$. Ici, on a également utilisé que $\|u_\varepsilon\|_2\to 0$ quand $\varepsilon\to 0$. Pour conclure quand $n=4$, il faut être un peu plus subtil. Et si $n=3$, la concentration L^2 n'a plus lieu comme nous le verrons dans les deux sections suivantes.

Il est maintenant temps de conclure. Soit $\eta\in C_c^\infty\left(B_g(x_0,2\delta)\right)$ telle que $\eta\equiv 1$ sur $B_g(x_0,\delta)$. On applique à ηu_ε l'inégalité de Sobolev euclidienne :

$$\left(\int_{B_g(x_0,2\delta)}(\eta u_\varepsilon)^{2^*}\,dv_\xi\right)^{\frac{2}{2^*}}\leqslant K(n,2)^2\int_{B_g(x_0,2\delta)}|\nabla(\eta u_\varepsilon)|_\xi^2\,dv_\xi\,. \tag{2.11}$$

Bien entendu, cette inégalité est à entendre dans la carte exponentielle. Nous continuerons à l'écrire sur la variété même pour ne pas alourdir les notations. D'après le développement limité de Cartan de g autour de x_ε (dans la carte exponentielle), on a par exemple

$$\begin{aligned}\int_{B_g(x_0,2\delta)} (\eta u_\varepsilon)^{2^*}\, dv_\xi = & \int_{B_g(x_0,2\delta)} (\eta u_\varepsilon)^{2^*}\, dv_g \\ & + \frac{1}{6}\mathrm{Ric}_g(x_\varepsilon)_{ij} \int_{B_g(x_0,2\delta)} x^i x^j (\eta u_\varepsilon)^{2^*}\, dv_g \\ & + o\left(\int_{B_g(x_0,2\delta)} |x|^2 (\eta u_\varepsilon)^{2^*}\, dv_g\right) .\end{aligned}$$

Tout d'abord, comme $u_\varepsilon \to 0$ dans $C^0_{loc}(M\backslash\{x_0\})$,

$$\int_{B_g(x_0,2\delta)} (\eta u_\varepsilon)^{2^*}\, dv_g = 1 + o\left(\|u_\varepsilon\|_2^2\right) .$$

Grâce à l'estimée faible (2.7),

$$\int_{B_g(x_0,2\delta)} |x|^2 (\eta u_\varepsilon)^{2^*}\, dv_g = O\left(\|u_\varepsilon\|_2^2\right) .$$

Enfin, pour tout $R > 0$,

$$\begin{aligned}\int_{B_g(x_0,2\delta)} x^i x^j (\eta u_\varepsilon)^{2^*}\, dv_g \quad = \quad & \int_{B_g(x_\varepsilon,R\mu_\varepsilon)} x^i x^j (\eta u_\varepsilon)^{2^*}\, dv_g \\ & + \int_{B_g(x_0,2\delta)\backslash B_g(x_\varepsilon,R\mu_\varepsilon)} x^i x^j (\eta u_\varepsilon)^{2^*}\, dv_g \\ = \quad & \mu_\varepsilon^2 \int_{B(0,R)} x^i x^j u_0^{2^*}\, dv_\xi + o\left(\mu_\varepsilon^2\right) \\ & + \varepsilon(R) \int_{B_g(x_0,2\delta)\backslash B_g(x_\varepsilon,R\mu_\varepsilon)} u_\varepsilon^2\, dv_g\end{aligned}$$

où $u_0 = \left(1 + \frac{\omega_n^{\frac{2}{n}}}{4}|x|^2\right)^{1-\frac{n}{2}}$ et $\varepsilon(R) \to 0$ quand $R \to +\infty$. Pour obtenir l'estimée de la première intégrale, on a utilisé le blow-up de la première étape de la preuve. La deuxième intégrale s'estime grâce au contrôle ponctuel (2.10) de u_ε. En faisant tendre R vers $+\infty$, on obtient en remarquant que u_0 est radiale :

$$\int_{B_g(x_0,2\delta)} x^i x^j (\eta u_\varepsilon)^{2^*}\, dv_g = \frac{\delta^{ij}}{n}\mu_\varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 u_0^{2^*}\, dv_\xi + o\left(\mu_\varepsilon^2\right) + o\left(\|u_\varepsilon\|_2^2\right) .$$

D'où, finalement,

$$\left(\int_{B_g(x_0,2\delta)} (\eta u_\varepsilon)^{2^*}\, dv_\xi\right)^{\frac{2}{2^*}} = 1 + \frac{n-2}{6n^2} S_g(x_0)\mu_\varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 u_0^{2^*}\, dv_\xi + o\left(\mu_\varepsilon^2\right) + o\left(\|u_\varepsilon\|_2^2\right) .$$

En effet, $\delta^{ij}\,\mathrm{Ric}_g(x_\varepsilon)_{ij}$ est la contraction de la courbure de Ricci (on est dans la carte exponentielle en x_ε), c'est-à-dire la courbure scalaire.

On peut traiter de même, bien que les calculs soient beaucoup plus délicats, l'autre terme de (2.11) : on a alors besoin de la concentration L^2 de u_ε et de l'équation vérifiée par u_ε. On obtient

$$K(n,2)^2\int_{B_g(x_0,2\delta)} |\nabla(\eta u_\varepsilon)|_\xi^2\,dv_\xi \leqslant 1 - B_0(g)K(n,2)^2\|u_\varepsilon\|_2^2 + \frac{1}{6}S_g(x_0)K(n,2)^2\|u_\varepsilon\|_2^2$$
$$+ \frac{1}{6n}S_g(x_0)\mu_\varepsilon^2\int_{\mathbb{R}^n}|x|^2u_0^{2^*}\,dv_\xi + o\left(\mu_\varepsilon^2\right) + o\left(\|u_\varepsilon\|_2^2\right).$$

En revenant à (2.11), on a finalement

$$\begin{aligned} B_0(g)K(n,2)^2\|u_\varepsilon\|_2^2 \leqslant\; & \frac{1}{6}K(n,2)^2S_g(x_0)\,\|u_\varepsilon\|_2^2 + o\left(\|u_\varepsilon\|_2^2\right) \\ & + \frac{1}{3n^2}S_g(x_0)\mu_\varepsilon^2\int_{\mathbb{R}^n}|x|^2u_0^{2^*}\,dv_\xi + o\left(\mu_\varepsilon^2\right). \end{aligned}$$

Si $S_g(x_0) < 0$, on a directement une contradiction donc, dans ce cas, il y a une extrémale pour $\left(I_{2,\mathrm{opt}}^2\right)$. Sinon, on écrit, par blow-up,

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\frac{\|u_\varepsilon\|_2^2}{\mu_\varepsilon^2} \geqslant \lim_{R\to+\infty}\int_{B(0,R)} u_0^2\,dx\,.$$

D'où, en passant à la limite dans l'inégalité ci-dessus, on obtient avec un simple calcul d'intégrales :

$$B_0(g) \leqslant \frac{n-2}{4(n-1)}S_g(x_0)\,,$$

ce qui termine la preuve du théorème car $B_0(g) \geqslant B_0(g)_{\mathrm{extr}} \geqslant \frac{n-2}{4(n-1)}S_g(x_0)$. ◆

Remarque 1 : Si $\left(I_{g,\mathrm{opt}}\right)$ ne possède pas d'extrémales, alors la suite u_ε de la preuve du théorème se concentre nécessairement en un point x_0 de maximum de la courbure scalaire. Ce qui répond à une question naturelle : y a-t-il un endroit privilégié de concentration pour des suites de fonctions qui explosent ? Bien sûr, la réponse dépendra du type de problème que l'on regarde mais, dans le cadre du programme AB, ce sera souvent fonction de la courbure scalaire de la métrique.

Remarque 2 : Avec la même preuve, on peut montrer également que si $B_0(g) > B_0(g)_{\mathrm{extr}}$, l'ensemble des fonctions extrémales pour $(I_{g,\mathrm{opt}})$, normalisées par $\|u\|_{2^*} = 1$, est compact dans $C^2(M)$.

Revenons maintenant à notre théorème. On est face à une alternative non exclusive : en effet, sur (S^n, h), la sphère standard, on a d'après le théorème 2.2 à la fois $B_0(h) =$

$B_0(h)_{\text{extr}}$ et l'existence de fonctions extrémales pour $(I_{h,\text{opt}})$. On se place bien entendu dans toute cette discussion en dimensions $n \geqslant 4$. D'un autre côté, le théorème est assez fin : en effet, il existe des variétés pour lesquelles $B_0(g) = B_0(g)_{\text{extr}}$ et il n'existe pas de fonctions extrémales pour $(I_{g,\text{opt}})$. C'est le cas dans la classe conforme de la sphère standard dès qu'on n'est plus sur la sphère standard elle-même (cf. théorème 2.2). Deux questions viennent alors à l'esprit : existe-t-il des variétés non isométriques à la sphère standard pour lesquelles $B_0(g) = B_0(g)_{\text{extr}}$ et telles qu'il existe des fonctions extrémales pour $(I_{g,\text{opt}})$? Existe-t-il des variétés non conformément difféomorphes à la sphère standard pour lesquelles $(I_{g,\text{opt}})$ ne possède pas de fonctions extrémales ?

2.2.4. Les fonctions critiques.

Dans cette partie, nous allons répondre aux deux questions juste soulevées. Le théorème suivant est dû à E.Hebey et M.Vaugon :

Théorème 2.5 (Hebey-Vaugon [72], 2000) – *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension n. On suppose que la courbure de Weyl de (M, g) s'annule autour d'un point $x_0 \in M$. Alors,*

i) Si $n \geqslant 4$, il existe $g_1 \in [g]$ telle que $B_0(g_1) = B_0(g_1)_{\text{extr}}$ et $(I_{g_1,\text{opt}})$ n'admet aucune extrémale.

ii) Si $n \geqslant 7$, il existe $g_2 \in [g]$ telle que

$$B_0(g_2) = B_0(g_2)_{\text{extr}} = K(n,2)^{-2}\,\mathrm{Vol}_{g_2}(M)^{-\frac{2}{n}}$$

et, dans ce cas, $(I_{g_2,\text{opt}})$ admet les fonctions constantes comme fonctions extrémales.

En particulier, les réponses aux deux questions posées précédemment sont négatives (tout du moins en "grandes" dimensions). La preuve de ce théorème est basée sur des techniques similaires à celles développées dans la section précédente. Plus intéressante pour nous que cette preuve est la nouvelle notion qu'ils ont introduite pour les besoins de la cause : la notion de fonction critique.

Définition 2.6 – *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geqslant 3$. On dit qu'une fonction $\alpha \in C^\infty(M)$ est faiblement critique si pour tout $u \in H_1^2(M)$,*

$$\left(\int_M |u|^{2^*}\,dv_g\right)^{\frac{2}{2^*}} \leqslant K(n,2)^2\left[\int_M |\nabla u|_g^2\,dv_g + \int_M \alpha u^2\,dv_g\right]. \qquad (I_\alpha)$$

On dit que α est une fonction critique si $\forall\, \tilde\alpha \leqslant \alpha$, $\tilde\alpha \not\equiv \alpha$, $\tilde\alpha$ n'est plus une fonction faiblement critique.

Par exemple, $B_0(g)$ est toujours une fonction faiblement critique. De plus, si $(I_{g,\text{opt}})$ admet des fonctions extrémales, alors $B_0(g)$ est une fonction critique. Pour montrer que $(I_{g,\text{opt}})$ n'admet pas d'extrémales, il suffit (dans le sens mathématique du terme) donc de montrer que $B_0(g)$ n'est pas une fonction critique. C'est la façon dont ont procédé Hebey et Vaugon pour démontrer le point i) de leur théorème. La force de la notion de fonction (faiblement) critique réside dans la possibilité d'en construire facilement énormément grâce à la propriété suivante : si α_g est une fonction (faiblement) critique sur (M, g) et si $\tilde{g} = \varphi^{\frac{4}{n-2}} g$ est une métrique conforme à g, alors

$$\alpha_{\tilde{g}} = \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\tilde{g}} + \left(\alpha - \frac{n-2}{4(n-1)} S_g \right) \varphi^{2-2^*}$$

est une fonction (faiblement) critique sur $(M, \tilde{g})$. En quelque sorte, la notion de fonction (faiblement) critique est conformément invariante.

Armés de cette notion de fonctions critiques, Hebey et Vaugon ont étendu la cinquième question du programme AB :

Q5 bis – Soit $\alpha \in C^\infty(M)$ une fonction critique sur (M, g), le cas d'égalité est-il toujours atteint dans (I_α) ?

Une première réponse à cette question est donnée par l'extension du théorème 2.3 aux fonctions critiques :

Théorème 2.7 (Hebey-Vaugon [72], 2000) – *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geqslant 4$. Soit $\alpha \in C^\infty(M)$ une fonction critique sur M. Alors,*

$$\forall\, x \in M,\ \alpha(x) \geqslant \frac{n-2}{4(n-1)} S_g(x)$$

et au moins l'une des deux propositions suivantes a lieu :

1) Il existe $x \in M$ tel que $\alpha(x) = \frac{n-2}{4(n-1)} S_g(x)$.

2) Le cas d'égalité est atteint dans (I_α).

C'est une réponse partielle à la question Q5 bis. Une réponse complète à cette question n'est toujours pas disponible en dimensions $n \geqslant 4$ (voir sections 4.2 et 4.3 pour plus de précisions sur cette question).

La grande absente de toute cette section aura été la dimension 3. La preuve du théorème 2.3 présentée échoue pour $n = 3$ car on n'arrive pas à démontrer la concentration L^2 de u_ε autour du point de concentration. Nous verrons qu'il y a de bonnes raisons à cela. La section suivante va nous fournir non seulement les explications de cet échec (provisoire) mais également les armes pour le surmonter. La notion de fonction critique se révèlera être très intéressante également en dimension 3.

3. Analyse asymptotique en énergie minimale

Dans cette section, nous allons mener une étude asymptotique fine du profil d'explosion d'une suite (u_ε) de solutions d'équations elliptiques non-linéaires qui se concentrent en un point. Et ceci avec deux objectifs en tête : le premier de répondre aux questions du programme AB dans le cas de la dimension 3, le second de voir jusqu'à quel point le comportement de telles suites peut être décrit dans un cadre général.

Toute cette section est consacrée à un travail en collaboration avec F. Robert [42], travail qui trouve son origine dans les travaux de Hebey-Vaugon [69, 70] et dans une très belle étude asymptotique euclidienne de Robert [90]. Dans le cas euclidien (et pour celui de la sphère), on pourra également consulter [5, 19, 43, 56, 57, 62, 79, 89, 94].

3.1. Présentation du problème

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geqslant 3$. On suppose qu'on a une suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ de fonctions $C^{2,\alpha}(M)$ strictement positives qui vérifient

$$\Delta_g u_\varepsilon + h_\varepsilon u_\varepsilon = \lambda_\varepsilon u_\varepsilon^{2^\star-1} \tag{3.1}$$

avec $\|u_\varepsilon\|_{2^\star} = 1$. Ici, $h_\varepsilon \in C^{0,\alpha}(M)$ et λ_ε est un réel strictement positif. On fera l'hypothèse suivante sur λ_ε :

$(HME) - \lambda_\varepsilon \leqslant K(n,2)^{-2}$.

C'est une hypothèse d'énergie minimale. En particulier, on est dans une situation de ce type dès que le problème de minimisation suivant a une solution :

$$\lambda_\varepsilon := \inf_{u \in H_1^2(M),\, u \not\equiv 0} \frac{\int_M \left(|\nabla u|_g^2 + h_\varepsilon u^2\right) dv_g}{\left(\int_M |u|^{2^\star} dv_g\right)^{\frac{2}{2^\star}}} .$$

En effet, on a toujours dans ce cas $\lambda_\varepsilon \leqslant K(n,2)^{-2}$ et si u_ε est une solution de ce problème de minimisation, alors, à normalisation près, u_ε vérifie (3.1). Mais on n'est pas obligé dans la suite de supposer que u_ε est obtenue ainsi.

On va également supposer que $u_\varepsilon \rightharpoonup 0$ faiblement dans $H_1^2(M)$ de façon à ce qu'un phénomène de concentration apparaisse. Le but est d'étudier précisément ce phénomène de concentration. Plus précis nous voudrons être, plus nous aurons à supposer sur h_ε.

3.2. Estimée intégrale, estimées ponctuelles faibles

Moyennant l'hypothèse suivante sur h_ε :

$(H1)$ – Il existe $r > \frac{n}{2}$ tel que $\limsup_{\varepsilon\to 0} \|h_\varepsilon^-\|_r < +\infty$

où $h_\varepsilon^- = \max(0, -h_\varepsilon)$, on a l'estimée intégrale :

$$\lim_{R\to+\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{B_g(x_\varepsilon, R\mu_\varepsilon)} u_\varepsilon^{2^\star} dv_g = 1$$

où x_ε est un point de M où u_ε atteint son maximum et $u_\varepsilon(x_\varepsilon) = \mu_\varepsilon^{1-\frac{n}{2}} \to +\infty$ quand $\varepsilon \to 0$. L'hypothèse $(H1)$ nous assure, premièrement que (u_ε) est bornée dans $H_1^2(M)$, deuxièmement que $\int_M h_\varepsilon u_\varepsilon^2 \, dv_g \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$ (rappel : on a supposé que u_ε tendait faiblement vers 0 dans $H_1^2(M)$). Cette estimée est obtenue comme dans la preuve du théorème 2.3 par blow-up en x_ε. Comme dans [30], on transforme ensuite cette estimée intégrale en une estimée ponctuelle :

$$\begin{aligned} &\exists\, C > 0 \text{ tq } \forall\, \varepsilon > 0,\ \forall\, x \in M,\ d_g(x_\varepsilon, x)^{\frac{n}{2}-1} u_\varepsilon(x) \leqslant C \text{ et} \\ &\lim_{R\to+\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{M\setminus B_g(x_\varepsilon, R\mu_\varepsilon)} d_g(x_\varepsilon, x)^{\frac{n}{2}-1} u_\varepsilon(x) = 0 \,. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Cette estimée ponctuelle, certes extrêmement faible, a néanmoins l'avantage de ne rien demander (ou quasiment) sur h_ε. Elle avait été introduite dans [30] dans un cadre où il est délicat d'obtenir mieux. Qui plus est, elle est le point de départ obligatoire pour tout ce qui suit.

Remarque : ce qui fait fonctionner cette estimée ponctuelle dans un cadre aussi général est son invariance par le changement d'échelle associée à l'équation (3.1) (ou au défaut de compacité des u_ε, ce qui revient au même).

3.3. Estimées ponctuelles fortes

On sait déjà qu'avec $(H1)$, on a l'estimée intégrale

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \| u_\varepsilon - \mu_\varepsilon^{1-\frac{n}{2}} \left(1 + \frac{\omega_n^{\frac{2}{n}}}{4} \frac{d_g(x_\varepsilon, x)^2}{\mu_\varepsilon^2} \right)^{1-\frac{n}{2}} \|_{H_1^2(M)} = 0 \,, \tag{3.3}$$

c'est-à-dire : u_ε tend vers la bulle standard en norme $H_1^2(M)$. L'objectif de cette partie est d'obtenir un contrôle ponctuel de u_ε par cette bulle standard. Pour ce faire, on a besoin de l'hypothèse suivante sur h_ε :

$(H2)$ – Il existe $a \in C^{0,\alpha}(M)$ telle que $h_\varepsilon \geqslant a$ et l'opérateur $\Delta_g + a$ est coercif.

Par $\Delta_g + a$ coercif, on entend qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout $u \in H_1^2(M)$,

$$\int_M \left(|\nabla u|_g^2 + a u^2 \right) dv_g \geqslant C \|u\|_2^2 \,.$$

En faveur de $(H2)$, il est bon de remarquer que $\Delta_g + h_\varepsilon$ est lui-même un opérateur coercif. En effet, si on note ν_ε sa première valeur propre et v_ε une fonction propre strictement positive associée à ν_ε, on a

$$\Delta_g v_\varepsilon + h_\varepsilon v_\varepsilon = \nu_\varepsilon v_\varepsilon \,.$$

En multipliant par u_ε, en intégrant par parties et en utilisant l'équation vérifiée par u_ε, on obtient

$$\lambda_\varepsilon \int_M u_\varepsilon^{2^*-1} \, dv_g = \nu_\varepsilon \int_M u_\varepsilon v_\varepsilon \, dv_g \,,$$

ce qui donne bien $v_\varepsilon > 0$ donc la coercivité de $\Delta_g + h_\varepsilon$.

Soit $\nu > 0$ et soit $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\Delta_g + \frac{a-\varepsilon_0}{1-\nu}$ soit toujours un opéřateur coercif. Pour $\nu > 0$ suffisamment petit, il est toujours possible de trouver un tel ε_0. Soit maintenant l'opérateur L_ε défini par :

$$L_\varepsilon u = \Delta_g u + h_\varepsilon u - \lambda_\varepsilon u_\varepsilon^{2^*-2} u .$$

Il n'est pas difficile de voir que L_ε vérifie le principe du maximum faible sur $M \backslash B_g(x_\varepsilon, R\mu_\varepsilon)$ pour tout $R > 0$ (cf. par exemple [13]). De plus,

$$L_\varepsilon u_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } M .$$

D'un autre côté, on note $G : M \times M \to \mathbb{R}$ la fonction de Green de l'opérateur $\Delta_g + \frac{a-\varepsilon_0}{1-\nu}$. C'est la seule fonction symétrique positive vérifiant pour tout $x \in M$

$$\Delta_{g,y} G(x,y) + \frac{a - \varepsilon_0}{1 - \nu} G(x,y) = \delta_x$$

au sens des distributions. Ici, δ_x représente la masse de Dirac en x. Un simple calcul donne sur $M \backslash \{x_\varepsilon\}$

$$\begin{aligned}
\frac{L_\varepsilon G(x_\varepsilon, x)^{1-\nu}}{G(x_\varepsilon, x)^{1-\nu}} &= (\varepsilon_0 + h_\varepsilon - a) + \nu(1-\nu) \frac{|\nabla G(x_\varepsilon, x)|_g^2}{G(x_\varepsilon, x)^2} - \lambda_\varepsilon u_\varepsilon^{2^*-2} \\
&\geqslant \varepsilon_0 + \nu(1-\nu) \frac{|\nabla G(x_\varepsilon, x)|_g^2}{G(x_\varepsilon, x)^2} - \lambda_\varepsilon u_\varepsilon^{2^*-2}
\end{aligned}$$

en utilisant $(H2)$. Une propriété standard de la fonction de Green est qu'il existe $\rho > 0$, $C > 0$ telles que pour tout $x \in B_g(x_\varepsilon, \rho)$,

$$\frac{|\nabla G(x_\varepsilon, x)|_g^2}{G(x_\varepsilon, x)^2} \geqslant \frac{C}{d_g(x_\varepsilon, x)^2} .$$

Ainsi, sur $B_g(x_\varepsilon, \rho) \backslash B_g(x_\varepsilon, R\mu_\varepsilon)$,

$$\frac{L_\varepsilon G(x_\varepsilon, x)^{1-\nu}}{G(x_\varepsilon, x)^{1-\nu}} \geqslant d_g(x_\varepsilon, x)^{-2} \left(C\nu(1-\nu) - \lambda_\varepsilon d_g(x_\varepsilon, x)^2 u_\varepsilon^{2^*-2} \right) .$$

Grâce à l'estimée faible (3.2), quitte à prendre R suffisamment grand, on obtient pour $\varepsilon > 0$ petit

$$L_\varepsilon G(x_\varepsilon, x)^{1-\nu} \geqslant 0 \quad \text{sur } B_g(x_\varepsilon, \rho) \backslash B_g(x_\varepsilon, R\mu_\varepsilon) .$$

Sur $M \backslash B_g(x_\varepsilon, \rho)$, $u_\varepsilon \to 0$ dans C^0 donc

$$L_\varepsilon G(x_\varepsilon, x)^{1-\nu} \geqslant 0 \quad \text{sur } M \backslash B_g(x_\varepsilon, \rho)$$

pour $\varepsilon > 0$ petit. On a ainsi obtenu

$$L_\varepsilon u_\varepsilon = 0 \leqslant L_\varepsilon G(x_\varepsilon, x)^{1-\nu} \quad \text{sur } M \backslash B_g(x_\varepsilon, R\mu_\varepsilon) .$$

Par propriété standard de la fonction de Green, on a également

$$u_\varepsilon \leqslant C\mu_\varepsilon^{(\frac{n}{2}-1)(1-2\nu)} G(x_\varepsilon, x)^{1-\nu} \quad \text{sur } \partial B_g(x_\varepsilon, R\mu_\varepsilon) \ .$$

En appliquant le principe du maximum et en utilisant que $G(x_\varepsilon, x) \leqslant Cd_g(x_\varepsilon, x)^{2-n}$, on a ainsi obtenu que pour tout $\nu > 0$, il existe $C(\nu) > 0$ telle que pour tout $x \in M$, tout $\varepsilon > 0$,

$$d_g(x_\varepsilon, x)^{(n-2)(1-\nu)} \mu_\varepsilon^{(1-\frac{n}{2})(1-2\nu)} u_\varepsilon(x) \leqslant C(\nu) \ , \tag{3.4}$$

ce qui revient à dire

$$u_\varepsilon \leqslant C\,(\text{bulle standard})^{1-\nu}$$

où

$$\text{bulle standard}\,(x) = \mu_\varepsilon^{1-\frac{n}{2}} \left(1 + \frac{\omega_n^{\frac{2}{n}}}{4} \frac{d_g(x_\varepsilon, x)^2}{\mu_\varepsilon^2}\right)^{1-\frac{n}{2}} \ .$$

L'objectif est maintenant d'obtenir cette même estimée avec $\nu = 0$. On note G_a la fonction de Green de $\Delta_g + a$. Par la formule de représentation de Green, on a en utilisant les hypothèses (HME) et $(H2)$:

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(y_\varepsilon) &= \int_M G_a(x, y_\varepsilon) \left(\Delta_g u_\varepsilon(x) + a(x) u_\varepsilon(x)\right) dv_g(x) \\ &\leqslant K(n,2)^{-2} \int_M G_a(x, y_\varepsilon)\, u_\varepsilon(x)^{2^*-1}\, dv_g(x) \end{aligned}$$

pour toute suite de points (y_ε) de M. On va distinguer trois cas :

Cas 1 – On suppose que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{d_g(x_\varepsilon, y_\varepsilon)}{\mu_\varepsilon} = R \ .$$

Dans ce cas, c'est une conséquence directe des résultats de la section 2 (moyennant l'hypothèse $(H2)$ plus forte que $(H1)$) que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} d_g(x_\varepsilon, y_\varepsilon)^{n-2} \mu_\varepsilon^{1-\frac{n}{2}} u_\varepsilon(y_\varepsilon) = R^{n-2} \left(1 + \frac{\omega_n^{\frac{2}{n}}}{4} R^2\right)^{1-\frac{n}{2}} \ .$$

Cas 2 – On suppose que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} d_g(x_\varepsilon, y_\varepsilon) = 2\delta > 0 \ .$$

On écrit alors

$$\begin{aligned}
\int_M G_a(x,y_\varepsilon)\, u_\varepsilon(x)^{2^*-1}\, dv_g(x) &= \int_{B_g(x_\varepsilon,\delta)} G_a(x,y_\varepsilon)\, u_\varepsilon(x)^{2^*-1}\, dv_g(x) \\
&\quad + \int_{M\setminus B_g(x_\varepsilon,\delta)} G_a(x,y_\varepsilon)\, u_\varepsilon(x)^{2^*-1}\, dv_g(x) \\
&\leqslant C\int_{B_g(x_\varepsilon,\delta)} u_\varepsilon(x)^{2^*-1}\, dv_g(x) \\
&\quad + C\mu_\varepsilon^{\frac{n+2}{2}(1-2\nu)} \int_M G_a(x,y_\varepsilon)\, dv_g(x)
\end{aligned}$$

où on a utilisé (3.4). Un simple calcul donne grâce à (3.3) et (3.4) :

$$\int_{B_g(x_\varepsilon,\delta)} u_\varepsilon(x)^{2^*-1}\, dv_g(x) = O\left(\mu_\varepsilon^{\frac{n}{2}-1}\right) .$$

D'un autre côté,

$$\int_M G_a(x,y_\varepsilon)\, dv_g(x) = O(1) .$$

D'où

$$d_g(x_\varepsilon,y_\varepsilon)^{n-2}\, \mu_\varepsilon^{1-\frac{n}{2}}\, u_\varepsilon(y_\varepsilon) = O(1) + O\left(\mu_\varepsilon^{2-(n+2)\nu}\right) = O(1)$$

en prenant $\nu < \frac{2}{n+2}$.

Cas 3 – On suppose que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} d_g(x_\varepsilon,y_\varepsilon) = 0\,,\ \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{d_g(x_\varepsilon,y_\varepsilon)}{\mu_\varepsilon} = +\infty .$$

C'est de loin le cas le plus délicat. On pose

$$B_1^\varepsilon = \left\{x \in M,\ d_g(y_\varepsilon,x) \geqslant \frac{1}{2} d_g(x_\varepsilon,y_\varepsilon)\right\} .$$

On écrit ensuite

$$\begin{aligned}
u_\varepsilon(y_\varepsilon) &\leqslant C\int_{B_1^\varepsilon} G_a(x,y_\varepsilon)\, u_\varepsilon(x)^{2^*-1}\, dv_g(x) + C\int_{M\setminus B_1^\varepsilon} G_a(x,y_\varepsilon)\, u_\varepsilon(x)^{2^*-1}\, dv_g(x) \\
&\leqslant C d_g(x_\varepsilon,y_\varepsilon)^{2-n} \int_{B_1^\varepsilon} u_\varepsilon(x)^{2^*-1}\, dv_g(x) \\
&\quad + C\int_{M\setminus B_1^\varepsilon} d_g(x_\varepsilon,y_\varepsilon)^{2-n}\, u_\varepsilon(x)^{2^*-1}\, dv_g(x) \\
&\leqslant O\left(d_g(x_\varepsilon,y_\varepsilon)^{2-n}\, \mu_\varepsilon^{\frac{n}{2}-1}\right) \\
&\quad + O\left(\mu_\varepsilon^{\frac{n+2}{2}(1-2\nu)} d_g(x_\varepsilon,y_\varepsilon)^{-(n+2)(1-\nu)}\right) \int_{M\setminus B_1^\varepsilon} d_g(x_\varepsilon,y_\varepsilon)^{2-n}\, dv_g(x) \\
&\leqslant O\left(d_g(x_\varepsilon,y_\varepsilon)^{2-n}\, \mu_\varepsilon^{\frac{n}{2}-1}\right) + O\left(\mu_\varepsilon^{\frac{n+2}{2}(1-2\nu)} d_g(x_\varepsilon,y_\varepsilon)^{-n+\nu(n+2)}\right) .
\end{aligned}$$

Ainsi, dans ce dernier cas,

$$d_g\left(x_\varepsilon, y_\varepsilon\right)^{n-2} \mu_\varepsilon^{1-\frac{n}{2}} u_\varepsilon\left(y_\varepsilon\right) = O(1) + O\left(\left(\frac{\mu_\varepsilon}{d_g\left(x_\varepsilon, y_\varepsilon\right)}\right)^{2-\nu(n+2)}\right) = O(1)$$

dès que $\nu < \frac{2}{n+2}$ car $\frac{d_g(x_\varepsilon, y_\varepsilon)}{\mu_\varepsilon} \to +\infty$ quand $\varepsilon \to 0$.

On a donc montré qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout $x \in M$, tout $\varepsilon > 0$,

$$d_g\left(x_\varepsilon, x\right)^{n-2} \mu_\varepsilon^{1-\frac{n}{2}} u_\varepsilon(x) \leqslant C,$$

ce qui s'écrit encore

$$u_\varepsilon(x) \leqslant C \times \text{ bulle standard } = C\mu_\varepsilon^{1-\frac{n}{2}}\left(1 + \frac{\omega_n^{\frac{2}{n}}}{4} \frac{d_g\left(x_\varepsilon, x\right)^2}{\mu_\varepsilon^2}\right)^{1-\frac{n}{2}}.$$

3.4. Convergence vers la fonction de Green

Dans cette partie, nous aimerions préciser le comportement de u_ε loin du point de concentration. Nous savons déjà que $u_\varepsilon \to 0$ dans $C^0_{loc}(M \setminus \{x_0\})$: nous aimerions savoir comment. On fait une hypothèse de convergence sur h_ε :

(H3) – $lim_{\varepsilon \to 0} h_\varepsilon = h_0$ dans $C^{0,\alpha}(M)$ avec $\Delta_g + h_0$ coercif.

On note G_ε la fonction de Green de $\Delta_g + h_\varepsilon$. On écrit alors pour toute suite (y_ε) de points de M,

$$\begin{aligned} u_\varepsilon\left(y_\varepsilon\right) &= \int_M G_\varepsilon\left(y_\varepsilon, x\right)\left(\Delta_g u_\varepsilon(x) + h_\varepsilon u_\varepsilon(x)\right) dv_g(x) \\ &= \lambda_\varepsilon \int_M G_\varepsilon\left(y_\varepsilon, x\right) u_\varepsilon(x)^{2^*-1} dv_g(x). \end{aligned}$$

Après des calculs similaires à ceux de la section précédente, on obtient

$$\frac{u_\varepsilon\left(y_\varepsilon\right)}{\text{bulle standard}\left(y_\varepsilon\right)} \to \begin{cases} 1 & \text{si } y_0 = x_0 \\ (n-2)\omega_{n-1} d_g\left(x_0, y_0\right)^{n-2} G_0\left(x_0, y_0\right) & \text{si } y_0 \neq x_0 \end{cases}$$

où $y_0 = \lim_{\varepsilon \to 0} y_\varepsilon$ et G_0 est la fonction de Green de $\Delta_g + h_0$. L'hypothèse $(H3)$ permet de faire "converger" G_ε vers G_0 dans tous ces calculs.

Ce résultat a deux conséquences : la première nous donne le comportement de u_ε en-dehors du point de concentration. On a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mu_\varepsilon^{1-\frac{n}{2}} u_\varepsilon(x) = \left(\frac{4}{\omega_n^{\frac{2}{n}}}\right)^{\frac{n-2}{2}} (n-2)\,\omega_{n-1} G_0\left(x_0, x\right)$$

dans $C^2_{loc}(M\backslash\{x_0\})$. La seconde affine le comportement de u_ε autour du point de concentration. On obtient l'existence d'une constante $C > 1$ telle que pour tout $x \in M$ et tout $\varepsilon > 0$,

$$\frac{1}{C}\,(\text{bulle standard}) \leqslant u_\varepsilon \leqslant C\,(\text{bulle standard})\ .$$

De plus, pour tout $\nu > 0$, il existe $\delta(\nu) > 0$ tel que sur $B_g(x_\varepsilon, \delta(\nu))$,

$$\frac{1}{1+\nu}\,(\text{bulle standard}) \leqslant u_\varepsilon \leqslant (1+\nu)\,(\text{bulle standard})\ .$$

On a donc obtenu tout ce que l'on voulait, ou presque : le comportement exact de u_ε hors et autour du point de concentration. Quand je dis presque, c'est qu'il reste deux choses qui peuvent se révéler intéressantes dans certaines utilisations de ces études asymptotiques : le comportement de $\frac{d_g(x_\varepsilon, x_0)}{\mu_\varepsilon}$ et celui de μ_ε en fonction de h_ε. Ce sont là deux questions difficiles que l'on ne sait traiter que pour des fonctions h_ε particulières. Je renvoie ici à [37], [42] et [43] pour une discussion plus poussée sur ces questions.

3.5. Conclusion – Concentration L^p

Une conséquence de l'étude ci-dessus qui nous intéresse particulièrement au point où nous sommes dans le programme AB est le comportement des différentes normes L^p de u_ε. On suppose ici (HME) et $(H3)$ et on prend $p \geqslant 1$.

Premier cas – $1 \leqslant p < \frac{n}{n-2}$. La norme L^p de u_ε ne se concentre pas autour de x_ε. On a :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mu_\varepsilon^{1-\frac{n}{2}} \|u_\varepsilon\|_p = \left(\frac{4}{\omega_n^{\frac{2}{n}}}\right)^{\frac{n-2}{2}} (n-2)\,\omega_{n-1} \left(\int_M G_0(x_0, x)^p\, dv_g\right)^{\frac{1}{p}}\ .$$

Second cas – $p > \frac{n}{n-2}$. La norme L^p de u_ε se concentre autour de x_ε à la vitesse μ_ε. On a :

$$\lim_{R\to+\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\int_{B_g(x_\varepsilon, R\mu_\varepsilon)} u_\varepsilon^p\, dv_g}{\int_M u_\varepsilon^p\, dv_g} = 1\ ,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mu_\varepsilon^{\frac{n-2}{2}-\frac{n}{p}} \|u_\varepsilon\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} v^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}\ .$$

où $v(x) = \left(1 + \frac{\omega_n^{\frac{2}{n}}}{4}|x|^2\right)^{1-\frac{n}{2}}$.

Troisième cas – $p = \frac{n}{n-2}$. La norme L^p de u_ε se concentre autour de x_ε mais à une vitesse moindre que μ_ε. On a :

$$\forall R > 0,\ \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\int_{B_g(x_\varepsilon, R\mu_\varepsilon)} u_\varepsilon^{\frac{n}{n-2}}\, dv_g}{\int_M u_\varepsilon^{\frac{n}{n-2}}\, dv_g} = 0\ ,$$

$$\forall \delta > 0,\ \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\int_{B_g(x_\varepsilon,\delta)} u_\varepsilon^{\frac{n}{n-2}}\, dv_g}{\int_M u_\varepsilon^{\frac{n}{n-2}}\, dv_g} = 1 .$$

Enfin,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left(\mu_\varepsilon^{\frac{n}{2}} \,|\ln \mu_\varepsilon|\right)^{\frac{2-n}{2}} \|u_\varepsilon\|_{\frac{n}{n-2}} = 2^{n-2} \left(\frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}\right)^{\frac{n-2}{n}} .$$

Pourquoi ce résultat nous intéresse-t-il tant que ça ? Parce qu'il nous permet de comprendre les restrictions de dimension présentes dans les résultats concernant la partie H_1^2 du programme AB. Concernant l'existence de fonctions extrémales (théorèmes 2.3 et 2.7), nous avions besoin d'une concentration L^2 de u_ε : celle-ci n'a lieu que pour $n \geqslant 4$. Si $n = 3$, la norme L^2 garde un poids non négligeable sur toute la variété. C'est pourquoi nous ne pouvions faire fonctionner la preuve du théorème 2.3 pour $n = 3$. J'avais également dit que la concentration L^2 était plus difficile à obtenir en dimension 4 dans la preuve du théorème 2.3 : la raison en est que $\frac{n}{n-2} = 4$ quand $n = 4$ et donc que l'on se retrouve sur le cas limite de la concentration des normes L^p (troisième cas considéré ci-dessus).

Malgré tout, munis de cette étude, nous sommes en mesure de régler le cas $n = 3$, ce qui est l'objet de la section 4 : les phénomènes sont, on le verra, amplement différents de ceux observés en dimensions $n \geqslant 4$.

3.6. Et s'il y a plusieurs points de concentration ?

On considère dans cette sous-section une suite $(h_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ de fonctions dans $C^\infty(M)$ qui vérifie

$$\lim_{\varepsilon\to 0} h_\varepsilon = h_0 \ \text{ dans } C^\infty(M)$$

avec $\Delta_g + h_0$ coercif. On suppose qu'il existe $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, une suite de fonctions régulières strictement positives vérifiant l'équation

$$\Delta_g u_\varepsilon + h_\varepsilon u_\varepsilon = u_\varepsilon^{2^*-1} \ \text{ dans } C^\infty(M)$$

avec

$$\|u_\varepsilon\|_{2^*} \leqslant \Lambda$$

pour un certain $\Lambda > 0$. Si $\Lambda \leqslant K(n,2)^{1-\frac{n}{2}}$, on est dans la situation considérée dans les sous-sections 3.1-3.5. Que se passe-t-il si on abandonne cette hypothèse d'énergie minimale ? Notre suite (u_ε) reste bornée dans $H_1^2(M)$ donc, à extraction près, on peut supposer que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon = u_0 \ \text{ faiblement dans } H_1^2(M) .$$

Si cette convergence n'est pas forte, (u_ε) développe des points de concentration. Dans le cas où l'énergie est de type minimale, i.e. $\Lambda \leqslant K(n,2)^{1-\frac{n}{2}}$, on montre facilement que si la convergence n'est pas forte, $u_0 \equiv 0$ et on se retrouve dans la situation considérée jusqu'ici. Si on abandonne cette hypothèse, il est a priori possible que $u_0 \not\equiv 0$. De plus, (u_ε) peut développer plusieurs points de concentration. Un résultat de Struwe [96] nous dit qu'il existe $N \in \mathbb{N}$, $(x_{i,\varepsilon})_{i=1,\dots,N}$ N suite de points de M et $(\mu_{i,\varepsilon})_{i=1,\dots,N}$ N suite de réels strictement positifs convergeant vers 0 tels que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| u_\varepsilon - u_0 - \sum_{i=1}^{N} \varphi_{i,\varepsilon} \|_{H_1^2(M)} = 0$$

avec

$$\varphi_{i,\varepsilon}(x) = \mu_{i,\varepsilon}^{1-\frac{n}{2}} \left(1 + \frac{1}{n(n-2)} \frac{d_g(x_{i,\varepsilon}, x)^2}{\mu_{i,\varepsilon}^2} \right)^{1-\frac{n}{2}} ,$$

la bulle standard associée à $(x_{i,\varepsilon}, \mu_{i,\varepsilon})$. Bien entendu, si $N = 0$, on retrouve que $u_\varepsilon \to u_0$ fortement dans $H_1^2(M)$. Pour une preuve de ce résultat de Struwe dans un cadre riemannien, on renvoie à [39] ou [67]. La question que nous nous sommes posés avec Emmanuel Hebey et Frédéric Robert dans [39] est la suivante : est-il possible de décrire ponctuellement, et non plus d'une manière H_1^2, u_ε comme u_0 plus une somme de bulles standard, comme cela a été fait en énergie minimale ? En d'autres termes, peut-on obtenir un résultat semblable à celui obtenu à la fin de la section 4 ? La réponse à cette question est positive (c'est l'objet de [39]) : il existe $\eta_\varepsilon \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$ et une constante $C > 1$ indépendante de ε telles que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $x \in M$,

$$\frac{1}{C} \sum_{i=1}^{N} \varphi_{i,\varepsilon}(x) + (1 - \eta_\varepsilon) u_0(x) \leqslant u_\varepsilon(x) \leqslant C \sum_{i=1}^{N} \varphi_{i,\varepsilon}(x) + (1 + \eta_\varepsilon) u_0(x) .$$

En particulier, si $u_0 \equiv 0$, on retrouve exactement le résultat de la section 4 :

$$\frac{1}{C} \sum_{i=1}^{N} (\text{bulle standard})_i \leqslant u_\varepsilon \leqslant C \sum_{i=1}^{N} (\text{bulle standard})_i .$$

On peut ainsi passer d'une description H_1^2 à une description ponctuelle de u_ε en termes de bulles standard. Nul n'est besoin d'expliquer à celui qui a pratiqué l'analyse asymptotique en multi-points que ce passage, de H_1^2 à C^0, est extrêmement délicat. Il faut réussir à contrôler très précisément l'interaction entre les différentes bulles en présence : on peut très bien avoir a priori $d_g\left(x_{i,\varepsilon}, x_{j,\varepsilon}\right) \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$ et même, beaucoup plus gênant, $d_g\left(x_{i,\varepsilon}, x_{j,\varepsilon}\right) = O(\mu_{i,\varepsilon})$, ce qui correspond à un chevauchement des bulles en question. Sans parler de la possibilité d'avoir $u_0 \not\equiv 0$, circonstance aggravante s'il en est. Mais quelque 120 pages de preuve viennent à bout de ces difficultés. Les applications de cette description asymptotique sont prometteuses. En particulier, on peut maintenant espérer étudier l'équation $\Delta_g u + hu = u^{2^*-1}$ d'un point de vue dynamique, c'est-à-dire s'intéresser au comportement de l'ensemble des solutions de cette équation lorsque h varie. Pour l'instant, l'essentiel des résultats sur l'ensemble des solutions de cette équation (résultats de compacité, ...) porte sur une équation avec h fixé, encore plus essentiellement sur l'équation de courbure scalaire (cf. par ex. [92]). Pour une ouverture dans la direction "Études dynamiques", on pourra consulter [63].

4. Le phénomène des petites dimensions

Nous abordons dans cette section les questions 4 et 5 du programme AB dans le cas $n = 3$. Les résultats de référence dans le cas $n \geqslant 4$ sont les théorèmes 2.2, 2.3 et 2.7. Ils nous serviront de bases de comparaison avec ceux de cette section. Les preuves de tous les résultats ci-dessous utilisent de manière fondamentale l'étude asymptotique de la section 3. Tous les résultats qui suivent sont tirés de [31] et de [34]. C'est dans cette section que se révèle l'importance de la notion de fonction critique introduite dans [72] (cf. section 2.2).

4.1. Calcul de fonctions-tests

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n = 3$. Soit $\alpha \in C^\infty(M)$ une fonction faiblement critique (cf. définition 2.6). Pour tout $u \in H_1^2(M)$,

$$\left(\int_M |u|^6 \, dv_g\right)^{\frac{1}{3}} \leqslant K(3,2)^2 \left[\int_M |\nabla u|_g^2 \, dv_g + \int_M \alpha u^2 \, dv_g\right]. \qquad (I_\alpha)$$

Pour que (I_α) ait lieu, il est clair qu'il faut que l'opérateur $\Delta_g + \alpha$ soit coercif. On note $G_\alpha : M \times M \setminus \{(x,x),\ x \in M\} \to \mathbb{R}$ sa fonction de Green. Elle est symétrique, strictement positive et régulière en-dehors de la diagonale. La partie singulière de $G_\alpha(x,y)$ est $\frac{1}{\omega_2 d_g(x,y)}$. Étant donné $x \in M$, on peut écrire un développement limité de $G_\alpha(x,y)$ autour de x :

$$G_\alpha(x,y) = \frac{1}{\omega_2 d_g(x,y)} + M_\alpha(x) + o(1)$$

pour y proche de x. On appelle $M_\alpha(x)$ la masse de G_α en x.

On a vu section 2.1.3 que des fonctions-tests locales (celles utilisées par Aubin [6] pour résoudre le problème de Yamabe en grandes dimensions) sont inopérantes pour $n = 3$. L'objectif est donc de construire une famille de fonctions tests globales spécifiques au cas $n = 3$. Celles que l'on va adopter sont inspirées de celles utilisées par Schoen [91] pour résoudre le problème de Yamabe. On prend un point $x_0 \in M$ et on pose

$$u_\varepsilon(x) = \eta(x)\left(\varepsilon^2 + d_g(x_0,x)\right)^{-\frac{1}{2}} + \beta(x)$$

où $\eta \in C_c^\infty\left(B_g(x_0, 2\delta)\right)$, $\eta \equiv 1$ sur $B_g(x_0,\delta)$, et

$$\beta(x) = \omega_2 G_\alpha(x,y) - \frac{\eta(x)}{d_g(x_0,x)}.$$

Remarque : Autour de x_0, ces fonctions tests se comportent comme les bulles standard se concentrant en x_0. Mais, pour $n = 3$, on les prolonge de façon à ce qu'elles convergent vers la fonction de Green de $\Delta_g + \alpha$ en-dehors de x_0. Ceci est assez naturel comme choix : la première partie de u_ε va donner le premier terme du développement limité, la deuxième partie (globale) est celle qui minimise le mieux la partie droite de (I_α) puisque $\Delta_{g,x} G_\alpha(x_0, x) + \alpha(x) G_\alpha(x_0, x) = 0$ en-dehors de x_0.

Mises à part quelques astuces techniques de changement conforme de métriques pour faciliter les calculs (cf. [34]), on obtient en rentrant la famille (u_ε) dans (I_α) et en faisant tendre ε vers 0 :

Théorème 4.1 (Druet [34], 2000) – *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension 3 et soit $\alpha \in C^\infty(M)$ une fonction faiblement critique sur (M, g). Alors,*

$$M_\alpha(x) \leqslant 0 \quad \textit{pour tout } x \in M$$

et, de plus, pour tout $x \in M$,

$$M_\alpha(x) = 0 \Rightarrow \alpha(x) \leqslant \frac{1}{8} S_g(x) .$$

La condition $M_\alpha(x) \leqslant 0$ joue en dimension 3 le rôle que jouait la condition $\alpha(x) \geqslant \frac{n-2}{4(n-1)} S_g(x)$ en dimensions supérieures. Mais cette condition est cette fois-ci une condition globale sur α, ce qui n'était pas le cas en dimensions $n \geqslant 4$. On entend par globale qu'un changement de α quelque part sur M affecte les $M_\alpha(x)$ pour tout $x \in M$.

4.2. Fonctions extrémales

Étant donnée $\alpha \in C^\infty(M)$ une fonction critique sur (M, g), on peut se demander si le cas d'égalité est atteint dans (I_α) (question 5 bis du programme). On a alors le théorème suivant :

Théorème 4.2 (Druet [34], 2000) – *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension 3 et soit $\alpha \in C^\infty(M)$ une fonction critique sur (M, g). Alors une des deux assertions suivantes a lieu :*

1) Il existe $x \in M$ tel que $M_\alpha(x) = 0$.

2) Le cas d'égalité est atteint dans (I_α).

Ce théorème est le pendant exact du théorème 2.7 en dimension 3. Jusqu'ici, il ne se passe pas grand chose de neuf par rapport à la section 2. Mais sans doute plus intéressant que ce résultat est sa preuve dans laquelle est contenu le théorème suivant, théorème qui met le doigt sur une différence flagrante entre $n = 3$ et $n \geqslant 4$:

Théorème 4.3 (Druet [34], 2000) – *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension 3 et soit $\alpha \in C^\infty(M)$. On définit*

$$B(\alpha) = \inf \left\{ B,\ \alpha + B \textit{ est une fonction faiblement critique sur } (M, g) \right\} .$$

Alors $\alpha + B(\alpha)$ est une fonction critique sur (M, g).

Ce résultat nous dit donc qu'il existe des fonctions critiques de toutes les formes. Ceci était complètement faux en dimensions $n \geqslant 4$: il y a beaucoup d'exemples de variétés (M, g) de dimensions $n \geqslant 4$ pour lesquelles il n'y a pas de fonctions critiques constantes. C'est le cas par exemple sur (S^n, g), $g \in [h]$, g non isométrique à λh, $\lambda > 0$. Et même, dans la classe conforme de la sphère standard, pour $n \geqslant 4$, on sait qu'il n'existe qu'une et une seule fonction critique : $\alpha = \frac{n-2}{4(n-1)} S_g$. Ces deux assertions sont des conséquences du théorème 2.2.

Esquisse de preuve des théorèmes 4.2 et 4.3 – Soit $\alpha \in C^\infty(M)$. D'après le théorème 2.1, il est clair qu'il existe $B > 0$ telle que $\alpha + B$ soit une fonction faiblement critique. Ainsi, $B(\alpha)$ est finie. Quitte à changer α en $\alpha + B(\alpha)$, on peut supposer que $B(\alpha) = 0$. Pour $\varepsilon \geqslant 0$, on pose

$$\lambda_\varepsilon := \inf_{u \in \Lambda} \left(\int_M |\nabla u|_g^2 \, dv_g + \int_M (\alpha - \varepsilon)\, u^2 \, dv_g \right)$$

où

$$\Lambda = \left\{ u \in H_1^2(M),\ \|u\|_6 = 1 \right\} .$$

De par la définition de $B(\alpha)$, on a pour $\varepsilon > 0$

$$\lambda_\varepsilon < K(3,2)^{-2} \tag{4.1}$$

et

$$\lambda_0 = K(3,2)^{-2} .$$

L'hypothèse (4.1) nous donne l'existence de $(u_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$, fonctions régulières et strictement positives, vérifiant

$$\Delta_g u_\varepsilon + (\alpha - \varepsilon)\, u_\varepsilon = \lambda_\varepsilon u_\varepsilon^5 \tag{4.2}$$

avec $\|u_\varepsilon\|_6 = 1$. Comme (u_ε) est bornée dans $H_1^2(M)$, $u_\varepsilon \rightharpoonup u_0$ faiblement dans $H_1^2(M)$, à extraction d'une sous-suite près. Si $u_0 \not\equiv 0$, alors u_0 atteint le cas d'égalité dans (I_α) (cf. l'esquisse de preuve du théorème 2.3 pour cette assertion). Dans ce cas, il est clair que $\alpha + B(\alpha)$ est une fonction critique.

Supposons maintenant que $u_0 \equiv 0$. Alors, d'après les résultats de la section 3, il existe $x_\varepsilon \in M$, $\mu_\varepsilon > 0$ tels que

$$\|u_\varepsilon\|_\infty = u_\varepsilon(x_\varepsilon) = \mu_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$$

avec $\mu_\varepsilon \to 0$, $x_\varepsilon \to x_0$ quand $\varepsilon \to 0$. De plus, il existe $C > 0$ telle que pour tout $x \in M$, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mu_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} d_g(x_\varepsilon, x)\, u_\varepsilon(x) \leqslant C \tag{4.3}$$

et, par conséquence,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mu_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} u_\varepsilon = 2\omega_3^{-\frac{1}{3}} \omega_2 G_\alpha(x_0, .) \tag{4.4}$$

dans $C^2_{loc}(M\backslash\{x_0\})$.

La conclusion du théorème 2.3 était basée sur l'inégalité de Sobolev euclidienne. Ici, nous allons utiliser l'identité de Pohozãev. Soit $\delta > 0$ suffisamment petit pour que $\exp_{x_\varepsilon}$ soit un difféomorphisme de $B_0(\delta) \subset \mathbb{R}^3$ dans $B_g(x_\varepsilon, \delta) \subset M$. On pose pour $x \in B_0(\delta)$

$$\begin{aligned} g_\varepsilon &= \exp^*_{x_\varepsilon} g , \\ v_\varepsilon(x) &= u_\varepsilon\left(\exp_{x_\varepsilon}(x)\right) \text{ et} \\ \alpha_\varepsilon(x) &= \alpha\left(\exp_{x_\varepsilon}(x)\right) . \end{aligned}$$

L'identité de Pohozãev appliquée à v_ε sur $B_0(\delta)$ stipule que

$$\begin{aligned} \int_{B_0(\delta)} \left(x^k\partial_k v_\varepsilon + \frac{1}{2}v_\varepsilon\right)\Delta_\xi v_\varepsilon \, dv_\xi &= \delta \int_{\partial B_0(\delta)} \left[\frac{1}{2}|\nabla v_\varepsilon|^2_\xi - (\nabla v_\varepsilon, \nu)^2_\xi\right] d\sigma_\xi \\ &\quad - \frac{1}{2}\int_{\partial B_0(\delta)} v_\varepsilon (\nabla v_\varepsilon, \nu)_\xi \, d\sigma_\xi \end{aligned} \tag{4.5}$$

où ν est la normale extérieure à $\partial B_0(\delta)$. D'après (4.4), on peut facilement estimer le terme de droite de (4.5) : on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{\omega_3^{\frac{2}{3}}}{4\omega_2^2} \lim_{\varepsilon\to 0} \mu_\varepsilon^{-1} \int_{B_0(\delta)} \left(x^k\partial_k v_\varepsilon + \frac{1}{2}v_\varepsilon\right)\Delta_\xi v_\varepsilon \, dv_\xi \\ &= \delta \int_{\partial B_0(\delta)} \left[\frac{1}{2}|\nabla \tilde{G}_\alpha|^2_\xi - \left(\nabla \tilde{G}_\alpha, \nu\right)^2_\xi\right] d\sigma_\xi - \frac{1}{2}\int_{\partial B_0(\delta)} \tilde{G}_\alpha \left(\nabla \tilde{G}_\alpha, \nu\right)_\xi d\sigma_\xi \end{aligned}$$

où $\tilde{G}_\alpha = G_\alpha\left(x_0, \exp_{x_0}(x)\right)$. En passant à la limite quand $\delta \to 0$, on obtient ensuite :

$$\frac{\omega_3^{\frac{2}{3}}}{4\omega_2^2} \lim_{\delta\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0} \mu_\varepsilon^{-1} \int_{B_0(\delta)} \left(x^k\partial_k v_\varepsilon + \frac{1}{2}v_\varepsilon\right)\Delta_\xi v_\varepsilon \, dv_\xi = \frac{1}{2}M_\alpha(x_0) .$$

Reste à estimer le terme de gauche de (4.5). Pour ce faire, on écrit un développement limité de g_ε en fonction de ξ et on estime tous les termes un à un grâce à (4.3). On arrive finalement à

$$M_\alpha(x_0) = 0 .$$

Donc, si les (u_ε) développent un point de concentration en x_0, alors $M_\alpha(x_0) = 0$. Maintenant, si il existe $x_0 \in M$ tel que $M_\alpha(x_0) = 0$, alors pour tout $\tilde{\alpha} \leqslant \alpha$, $\tilde{\alpha} \not\equiv \alpha$, on a $M_{\tilde{\alpha}}(x_0) > 0$: ceci est une conséquence du principe du maximum appliqué à $G_{\tilde{\alpha}} - G_\alpha$. Par le théorème 4.1, $\tilde{\alpha}$ ne peut pas être une fonction faiblement critique. Donc α est une fonction critique. On a donc démontré que dans les deux cas (concentration des (u_ε) ou pas de concentration des (u_ε)), $\alpha + B(\alpha)$ est une fonction critique. Le théorème 4.3 est ainsi démontré. De plus, on a bien l'alternative (non exclusive) du théorème 4.2. ◆

Une question que l'on avait posée à la fin de la section 2 était la suivante : si α est une fonction critique sur (M, g), le cas d'égalité est-il toujours atteint dans (I_α) ? Une première réponse, très partielle, est donnée par le corollaire suivant des théorèmes 2.7, 4.1 et 4.2 :

Corollaire 4.4 – *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geqslant 3$. On note $\mu(M, g)$ son invariant de Yamabe, c'est-à-dire*

$$\mu(M,g) = \inf_{u \in C^\infty(M),\, u \not\equiv 0} \frac{\int_M \left(|\nabla u|_g^2 + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g u^2 \right) dv_g}{\left(\int_M |u|^{2^*} dv_g \right)^{\frac{2}{2^*}}} .$$

Soit $\alpha \in C^\infty(M)$ telle que

$$\|\alpha - \frac{n-2}{4(n-1)} S_g\|_\infty \leqslant \frac{1}{2} \left(K(n,2)^{-2} - \mu(M,g) \right) \mathrm{Vol}_g(M)^{-\frac{2}{n}} .$$

Alors $\alpha + B(\alpha)$ est une fonction critique et le cas d'égalité est atteint dans $(I_{\alpha+B(\alpha)})$.

Dans cet énoncé, $B(\alpha)$ est comme défini dans le théorème 4.3. Pour montrer ce corollaire, on remarque que $\alpha + B(\alpha) > \frac{n-2}{4(n-1)} S_g$ partout sur M ce qui donne le résultat en dimensions $n \geqslant 4$ grâce au théorème 2.7 et en dimension 3 grâce aux théorèmes 4.1 et 4.2. Ce résultat est essentiellement intéressant en-dehors de la sphère. En effet, si (M, g) est conformément difféomorphe à la sphère standard, alors $\mu(M, g) = K(n, 2)^{-2}$. Par contre, d'après [6] et [91], dès que (M, g) n'est plus conformément difféomorphe à la sphère standard, l'invariant de Yamabe de (M, g) vérifie $\mu(M, g) < K(n, 2)^{-2}$. Donc, si (M, g) n'est pas conformément difféomorphe à (S^n, h), il existe une infinité de fonctions critiques sur (M, g) pour lesquelles le cas d'égalité dans (I_α) est atteint. Dans la section suivante, nous examinerons plus particulièrement le cas de la classe conforme de la sphère standard.

4.3. Le cas de la sphère

Le théorème suivant peut être vu comme la contrepartie du corollaire 4.4 sur la sphère. Mais il éclaire également la question Q5 bis d'une lumière surprenante.

Théorème 4.5 (Druet-Gursky [34], 2000) – *Soit (S^3, h) la sphère unité de dimension 3 munie de sa métrique standard. Pour toute métrique $g \in [h]$ conforme à h, la seule fonction critique sur (S^3, g) pour laquelle le cas d'égalité est atteint dans (I_α) est la fonction $\alpha \equiv \frac{1}{8} S_g$.*

Ce théorème accompagné du théorème 4.3 montre qu'en dimension 3, il existe des fonctions critiques α pour lesquelles le cas d'égalité dans (I_α) n'est pas atteint. À titre de remarque, ce dernier théorème reste trivialement vrai sur (S^n, g), $g \in [h]$, $n \geqslant 4$, puisque dans ce cas, la seule fonction critique est $\alpha \equiv \frac{n-2}{4(n-1)} S_g$. Par contre, on ne peut pas en déduire en dimensions $n \geqslant 4$ l'existence de fonctions critiques pour lesquelles le cas d'égalité n'est pas atteint dans (I_α). Ceci reste une question ouverte pour l'instant.

Muni de ce dernier théorème, nous pouvons compléter le résultat d'E. Hebey (théorème 2.2). Le résultat suivant est une conséquence des théorèmes 4.2, 4.3 et 4.5 :

Théorème 4.6 (Druet [34], 2000) – *Soit (S^3, h) la sphère unité de dimension* 3 *munie de sa métrique standard et soit $g \in [h]$. Pour toute fonction $\alpha \in C^\infty(M)$,*

$$B(\alpha) = \min\left\{B \text{ t.q. } M_{\alpha+B}(x) \leqslant 0 \text{ pour tout } x \in S^3\right\} .$$

En particulier, pour tout $g \in [h]$, g non isométrique à λh, on a

$$B_0(g) < \frac{1}{8} \max_{S^3} S_g$$

et $(I_{g,\mathrm{opt}})$ ne possède pas d'extrémales.

Preuve du théorème 4.5 – Soit $g \in [h]$, soit $\alpha \in C^\infty\left(S^3\right)$ une fonction critique sur (S^3, g). Supposons qu'il existe $u_0 \in H_1^2\left(S^3\right)$ atteignant le cas d'égalité dans (I_α). Comme on s'en convaincra facilement, quitte à changer u_0 en $|u_0|$, on peut choisir $u_0 \geqslant 0$. De plus, u_0 vérifie après normalisation

$$\Delta_g u_0 + \alpha u_0 = \frac{3}{4} u_0^5 \tag{4.6}$$

avec $\|u_0\|_6^6 = \omega_3$. Par des résultats de régularité et de principe du maximum (cf. section 1.4.4), $u_0 \in C^\infty\left(S^3\right)$ et $u_0 > 0$. On note alors $g_0 = u_0^4 g$, qui est une métrique conforme à g, donc à h. À titre de remarque, u_0 a été normalisée de façon à ce que $\mathrm{Vol}_{g_0}\left(S^3\right) = \omega_3$. Soit $\varphi \in C^\infty\left(S^3\right)$; on écrit

$$\begin{aligned}\left(\int_{S^3} |\varphi|^6 \, dv_{g_0}\right)^{\frac{1}{3}} &= \left(\int_{S^3} |u_0\varphi|^6 \, dv_g\right)^{\frac{1}{3}} \\ &\leqslant K(3,2)^2 \left[\int_{S^3} |\nabla(u_0\varphi)|_g^2 \, dv_g + \int_{S^3} \alpha (u_0\varphi)^2 \, dv_g\right]\end{aligned}$$

où on a utilisé (I_α). En intégrant par parties, on obtient

$$\int_{S^3} |\nabla(u_0\varphi)|_g^2 \, dv_g = \int_{S^3} \varphi^2 u_0 \Delta_g u_0 \, dv_g + \int_{S^3} |\nabla\varphi|_g^2 u_0^2 \, dv_g ,$$

ce qui donne finalement, en utilisant (4.6) et la définition de g_0 :

$$\left(\int_{S^3} |\varphi|^6 \, dv_{g_0}\right)^{\frac{1}{3}} \leqslant K(3,2)^2 \left[\int_{S^3} |\nabla\varphi|_{g_0}^2 \, dv_{g_0} + \frac{3}{4} \int_{S^3} \varphi^2 \, dv_{g_0}\right] . \tag{4.7}$$

Cette inégalité est vraie pour tout $\varphi \in C^\infty\left(S^3\right)$. Soit $\psi \in C^\infty\left(S^3\right)$ telle que $\int_{S^3} \psi \, dv_{g_0} = 0$. On applique (4.7) à $\varphi_\varepsilon = 1 + \varepsilon\psi$ et on fait un développement limité de chaque terme lorsque $\varepsilon \to 0$. Les premiers termes s'en vont, il reste le terme du second ordre en ε. Cette technique consiste donc en calculer la seconde variation de notre fonctionnelle autour de son minimum $\varphi_0 \equiv 1$. On obtient en utilisant la valeur de $K(3,2)$:

$$3\int_{S^3} \psi^2\, dv_{g_0} \leqslant \int_{S^3} |\nabla\psi|^2_{g_0}\, dv_{g_0}$$

pour tout $\psi \in C^\infty\left(S^3\right)$ telle que $\int_{S^3} \psi\, dv_{g_0} = 0$. Ce qui revient à dire que la première valeur propre du laplacien sur (S^3, g_0) est supérieure ou égale à 3. On peut montrer que sur (S^n, g), $n \geqslant 2$, $g \in [h]$, $\mathrm{Vol}_g(S^n) = \omega_n$, la première valeur propre du laplacien est toujours inférieure ou égale à n, avec égalité si et seulement si g est isométrique à h. Ce résultat est connu depuis longtemps en dimension $n = 2$ mais reste introuvable dans la littérature (à ma connaissance) pour $n \geqslant 3$: c'est Matthew Gursky qui m'en a donné une jolie preuve en toutes dimensions basée sur un lemme de Chang et Yang [23] sur l'action du groupe conforme sur le centre de masse des mesures de probabilité sur la sphère. Donc g_0 est isométrique à h. En particulier, $S_{g_0} \equiv 6$. Mais, d'après la relation entre les courbures scalaires de deux métriques conformes,

$$\Delta_g u_0 + \frac{1}{8} S_g u_0 = \frac{1}{8} S_{g_0} u_0^5 \,.$$

D'où, avec l'équation (4.6),

$$\alpha \equiv \frac{1}{8} S_g \,,$$

ce qui termine la preuve du théorème.

Ici s'achève le programme AB dans le cas $H_1^2(M)$, enfin tout du moins dans sa partie A.

4.4. Retour sur le cas euclidien

En faisant cette étude riemannienne des meilleures constantes dans les inégalités de Sobolev en dimension 3, on a en fait retrouvé en route deux questions posées dans [17]. Dans ce papier, Brézis étudie une équation elliptique à croissance de Sobolev critique sur des ouverts bornés de $\mathbb{R}^n$. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$. Pour $a \in C^\infty(\Omega)$, on pose

$$J_a = \inf_{u \in C_c^\infty(\Omega),\, u \not\equiv 0} \frac{\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + a u^2\right) dx}{\left(\int_\Omega |u|^{2^*} dx\right)^{\frac{2}{2^*}}} \,.$$

Si J_a est atteint par $u_a \in H_0^1(\Omega)$, la complétion de $C_c^\infty(\Omega)$ pour la norme $\|u\|_{H_0^1} = \|\nabla u\|_2$, alors, quitte à changer u_a en $|u_a|$ et après normalisation, cette fonction u_a vérifie :

$$(E)\begin{cases} \Delta u + au = u^{2^*-1} & \text{dans } \Omega \\ u > 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

On sait que, pour toute fonction $a \in C^\infty(\Omega)$, $J_a \leqslant K(n,2)^{-2}$. On sait également que, si l'inégalité est stricte, alors J_a est atteint par une fonction régulière vérifiant (E). On dira dans ce cas qu'on a une solution minimisante de (E). Concernant ces solutions minimisantes, Brézis et Nirenberg [18] ont montré que la situation changeait profondément en passant du cas $n \geqslant 4$ au cas $n = 3$. En particulier, en dimensions $n \geqslant 4$, on a le résultat suivant :

Théorème 4.7 (Brézis-Nirenberg [18], 1983) – *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 4$, soit $a \in C^\infty(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

1) Il existe $x \in \Omega$ tel que $a(x) < 0$.

2) $J_a < K(n,2)^{-2}$.

3) J_a est atteint par une fonction u_a, solution minimisante du problème (E).

En dimension 3, la situation est moins claire. Les seuls résultats disponibles concernent le cas particulier $a \equiv \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dans ce cadre, Brézis et Nirenberg ont démontré le

Théorème 4.8 (Brézis-Nirenberg [18], 1983) – *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$. Il existe $\lambda(\Omega) \in]0; \lambda_1(\Omega)[$, $\lambda_1(\Omega)$ étant la première valeur propre du laplacien avec condition de Dirichlet au bord sur Ω, tel que*

$$\begin{aligned} J_\lambda &= K(3,2)^{-2} \quad \textit{pour } \lambda \geqslant -\lambda(\Omega) \ , \\ J_\lambda &< K(3,2)^{-2} \quad \textit{pour } \lambda < -\lambda(\Omega) \ . \end{aligned}$$

De plus, J_λ n'est pas atteint si $\lambda > -\lambda(\Omega)$ et est atteint si $\lambda < -\lambda(\Omega)$.

Si Ω est une boule B, ils ont également prouvé que $\lambda(B) = \frac{1}{4}\lambda_1(B)$ et que $J_{-\lambda(B)}$ n'est pas atteint. À la lumière de ces résultats, Brézis a posé dans [17] la question suivante :

Si $n = 3$, J_a est-il atteint si et seulement si $J_a < K(3,2)^{-2}$ comme c'est le cas en dimensions $n \geqslant 4$? (question 5 de [17])

Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ et si $a \in C^\infty(\Omega)$, on note $G_a : \Omega\times\Omega\setminus\{(x,x), x \in \Omega\} \to \mathbb{R}$ la fonction de Green de $\Delta + a$ dans Ω avec condition de Dirichlet au bord. Au sens des distributions, G_a vérifie :

$$\begin{aligned} \Delta_y G_a(x,y) + aG_a(x,y) &= \delta_x \quad \text{dans } \Omega \\ G_a(x,y) &= 0 \qquad \text{pour } y \in \partial\Omega,\ x \in \Omega \end{aligned}$$

et G_a est symétrique par rapport aux deux variables. On peut écrire

$$G_a(x,y) = \frac{1}{\omega_2|x-y|} + g_a(x,y)$$

avec $g_a \in C^0(\Omega \times \Omega, \mathbb{R})$.

Des calculs de fonctions tests similaires à ceux effectués dans la section 4.1 donnent

$$\exists\, x \in \Omega \text{ t.q. } g_a(x,x) > 0 \Longrightarrow J_a < K(3,2)^{-2}\,.$$

Une autre question naturelle, posée par Brézis dans [17], est alors :

A-t-on $J_a < K(3,2)^{-2} \Longrightarrow \exists\, x \in \Omega$ t.q. $g_a(x,x) > 0$? (question 7 de [17])

On remarque ici que les théorèmes 4.5 et 4.6 répondent par l'affirmative à l'analogue de ces deux questions sur la sphère standard. Par la même analyse et les mêmes techniques que pour la preuve de ces deux théorèmes, on montre le résultat suivant :

Théorème 4.9 (Druet [31], 2001) – *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$. On considère une fonction a dans $C^\infty(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ telle que $\Delta + a$ soit coercif. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

1) Il existe $x \in \Omega$ tel que $g_a(x,x) > 0$.

2) $J_a < K(3,2)^{-2}$.

3) J_a est atteint par une fonction u_a régulière, solution minimisante de (E).

Il y a deux différences essentielles dans la preuve entre le cas riemannien et le cas euclidien : dans le deuxième cas, il n'y a pas de différence entre la métrique riemannienne et la métrique euclidienne à analyser à la fin (dans l'utilisation de l'identité de Pohozãev). Par contre, il y a un bord et il faut absolument éviter la concentration de notre suite (u_ε) sur le bord de l'ouvert. À ce sujet, on a vu dans la preuve des théorèmes 4.2 et 4.3 que (u_ε) a tendance à se concentrer en un point où la masse de la fonction de Green de l'opérateur limite s'annule. Il est donc assez naturel, quoique la preuve ne soit pas si simple, que (u_ε) ne se concentre pas au bord de l'ouvert puisque $g_a(x,x) \to -\infty$ lorsque x s'approche du bord.

5. Intermède : Inégalités de Sobolev-Poincaré

Avant d'attaquer le programme AB pour les inégalités associées à l'injection de $H_1^p(M)$ dans $L^{p^*}(M)$, $p \neq 2$, nous allons faire un petit détour par les inégalités de Sobolev-Poincaré. En ce qui concerne cette section, on renvoie à [65], une habile compilation, claire et instructive, de [32], [41] et [64], où l'on trouvera toutes les preuves des résultats ci-dessous.

On se place sur (M,g) une variété riemannienne régulière, compacte et sans bord de dimension $n \geqslant 3$. En combinant l'inégalité de Poincaré, i.e. la caractérisation de Rayleigh de la première valeur propre non-nulle du laplacien sur (M,g), et l'inégalité de Sobolev liée à l'injection de $H_1^2(M)$ dans $L^{2^*}(M)$, on obtient facilement l'existence de deux constantes A et B telles que pour toute fonction u dans $H_1^2(M)$,

$$\|u\|_{2^*}^2 \leqslant A\|\nabla u\|_2^2 + B\|u\|_1^2 .$$

On appellera cette inégalité, étudiée entre autres par Nirenberg [85], l'inégalité de Sobolev-Poincaré. De même que pour l'inégalité de Sobolev classique (cf. section 2), on montre facilement que toute constante A dans l'inégalité de Sobolev-Poincaré doit être supérieure ou égale à $K(n,2)^2$. Réciproquement, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $B_\varepsilon > 0$ telle que toute fonction u dans $H_1^2(M)$ vérifie

$$\|u\|_{2^*}^2 \leqslant \left(K(n,2)^2 + \varepsilon\right)\|\nabla u\|_2^2 + B_\varepsilon\|u\|_1^2 . \tag{5.1}$$

On dira que l'inégalité de Sobolev-Poincaré optimale est valide sur (M,g) si il existe $B > 0$ telle que pour toute fonction u dans $H_1^2(M)$,

$$\|u\|_{2^*}^2 \leqslant K(n,2)^2\|\nabla u\|_2^2 + B\|u\|_1^2 . \tag{5.2}$$

La validité de l'inégalité de Sobolev-Poincaré optimale dépend de la variété et plus précisément de sa courbure et de sa dimension. C'est la première question à laquelle nous répondrons : quand cette inégalité de Sobolev-Poincaré optimale est-elle valide ? Ensuite, suivant la réponse, on distingue deux situations : si l'inégalité (5.2) est valide sur (M,g), on définit $B_0(g)$ comme étant la plus petite constante B telle que l'inégalité (5.2) soit vraie pour toute fonction u dans $H_1^2(M)$. On a alors

$$\|u\|_{2^*}^2 \leqslant K(n,2)^2\|\nabla u\|_2^2 + B_0(g)\|u\|_1^2 \tag{5.3}$$

pour toute fonction u dans $H_1^2(M)$. Une fonction non-nulle u_0 dans $H_1^2(M)$ est une fonction extrémale pour l'inégalité de Sobolev-Poincaré optimale si elle réalise le cas d'égalité dans (5.3). La question que l'on pose alors, comme nous l'avons fait section 2, est la question de l'existence de fonctions extrémales pour (5.3). Si, par contre, (5.2) n'est pas valide sur (M,g), on considère $B_\varepsilon(g)$, le plus petit B_ε dans (5.1), qui doit, dans ce cas, tendre vers $+\infty$ quand ε tend vers 0. On étudie alors le comportement asymptotique de $B_\varepsilon(g)$ lorsque $\varepsilon \to 0$.

La question de la validité de l'inégalité de Sobolev-Poincaré optimale a d'abord été traitée dans [41], puis reprise dans [32] et [64]. On résume les résultats de ces trois papiers dans le théorème suivant :

Théorème 5.1 (Druet, Hebey, Vaugon [32, 41, 64], 2002) – *Soit (M,g) une variété riemannienne régulière, compacte et sans bord de dimension $n \geqslant 3$. L'inégalité de Sobolev-Poincaré optimale est fausse dans les cas suivants :*

1) $n \geqslant 4$ et il existe $x \in M$ tel que $S_g(x) > 0$.

2) $n \geqslant 6$ et la variété (M,g) n'est pas conformément plate, sa courbure scalaire étant nulle au voisinage d'un point non-conformément plat.

Par contre, elle est valide dans les cas suivants :

3) $n = 3$.

4) $n \geqslant 4$ *et* $S_g < 0$.

5) $n = 4, 5$ *et* $S_g \leqslant 0$.

6) $n \geqslant 6$, $S_g \leqslant 0$ *et* (M, g) *est conformément plate au voisinage des points où la courbure scalaire s'annule.*

Ce résultat a l'avantage de présenter sur une même inégalité et une même question les deux phénomènes rencontrés au cours des sections 2 et 4 : l'influence de la courbure scalaire et de la dimension de la variété dans l'étude d'inégalités de type Sobolev optimales. De plus, il est d'une grande finesse pour ce genre d'études. Les points 1) et 3) sont tirés de [41], les points 2), 4) et 6) de [64] et le point 5) de [32]. Emmanuel Hebey a été le premier, dans [64], à montrer de manière effective que l'on pouvait récupérer de la validité d'inégalités de type Sobolev optimales en courbure scalaire strictement négative. Ce résultat peut paraître rétrospectivement beaucoup plus naturel au vu de [35] (cf. section 7). Par contre, pour le point 5), [35] n'est d'aucune utilité et l'analyse utilisée pour le démontrer est beaucoup plus poussée que celle présentée section 3; elle a été en grande partie développée dans [37].

Si l'inégalité de Sobolev-Poincaré optimale est valide, c'est-à-dire en particulier dans un des cas 3)-6) du théorème 5.1, on peut s'intéresser à l'existence de fonctions extrémales pour (5.3). Cette question a été résolue en dimensions $n \geqslant 4$ par E. Hebey. Par contre, la question reste ouverte en dimension 3.

Théorème 5.2 (Hebey [64], 2001) – *Soit* (M, g) *une variété riemannienne régulière, compacte et sans bord de dimension* $n \geqslant 4$ *dont la courbure scalaire est strictement négative. L'inégalité de Sobolev-Poincaré optimale* (5.3) *possède des fonctions extrémales.*

Si l'inégalité de Sobolev-Poincaré optimale n'est pas valide, c'est-à-dire en particulier lorsque $n \geqslant 4$ et $S_g(x) > 0$ pour au moins un point x de M, on s'intéresse au comportement asymptotique de $B_\varepsilon(g)$ quand $\varepsilon \to 0$.

Théorème 5.3 (Druet-Hebey [37], 2002) – *Soit* (M, g) *une variété riemannienne régulière, compacte et sans bord de dimension* $n \geqslant 4$ *dont la courbure scalaire est strictement positive quelque part. On a alors*

$$B_\varepsilon(g) = C(n) \left(\max_M S_g\right)^{\frac{n+2}{2}} \varepsilon^{-\frac{(n-4)(n+2)}{2(n-2)}} + o\left(\varepsilon^{-\frac{(n-4)(n+2)}{2(n-2)}}\right)$$

où $C(n)$ *est une constante dimensionnelle explicitement connue quand* $n \geqslant 5$ *et*

$$B_\varepsilon(g) = \frac{K(4,2)^2}{2304\omega_3} \left(\max_M S_g\right)^3 |\ln \varepsilon|^3 + o\left(|\ln \varepsilon|^3\right)$$

quand $n = 4$.

Dans ce résultat, on trouve

$$C(n) = \frac{2n(n+2)\,\omega_n^{2+\frac{4}{n}} K(n,2)^{\frac{n^2-12}{n-2}}}{\left(4^{n-3} n(n-2)(n-4)\right)^{\frac{n+2}{n-2}} \omega_{n-1}^{\frac{2n}{n-2}}}$$

pour $n \geqslant 5$.

Le fait que la courbure scalaire et la dimension de la variété jouent un rôle dans l'obtention d'inégalités de type Sobolev optimales a été mis à jour pour la première fois dans [29]. A suivi l'étude présentée sections 2, 4 et 5 sur les inégalités de Sobolev et de Sobolev-Poincaré. De nombreuses inégalités similaires ont également été étudiées suivant le même programme, les mêmes phénomènes s'y reproduisant plus ou moins : on peut citer les inégalités de Nash (cf. [40], [74]), la famille des inégalités de Gagliardo-Nirenberg (cf. [20]), les inégalités de Sobolev d'ordre 2 ([66]) mais aussi les inégalités de Sobolev en présence de symétries (cf. [45], voir [71] pour le problème des injections de Sobolev en présence de symétries).

6. Le cas $H_1^p(M)$, $1 < p < \dim M$

Cette section est consacrée aux inégalités liées aux injections de $H_1^p(M)$ dans $L^{p^*}(M)$ pour $1 < p < \dim M$. En ce qui concerne la première question du programme, on montre, de la même façon que dans le cas $p = 2$, que $\alpha_p(M) = K(n,p)$ où $K(n,p)$ est la meilleure constante dans l'inégalité de Sobolev H_1^p euclidienne. On va s'intéresser essentiellement aux questions 2 et 3 du programme. La question 2 concernait la validité de l'inégalité optimale suivante : pour toute fonction u dans $H_1^p(M)$,

$$\|u\|_{p^*} \leqslant K(n,p)\|\nabla u\|_p + B\|u\|_p \qquad (I^1_{p,\mathrm{opt}})$$

et la question 3 la validité de l'inégalité optimale : pour toute fonction u dans $H_1^p(M)$,

$$\|u\|_{p^*}^p \leqslant K(n,p)^p\|\nabla u\|_p^p + B\|u\|_p^p\,. \qquad (I^p_{p,\mathrm{opt}})$$

6.1. Courbure positive versus courbure négative

6.1.1. Courbure "positive".

On prend $x_0 \in M$ et on pose pour $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) &= \left(\varepsilon + d_g(x_0,x)^{\frac{p}{p-1}}\right)^{1-\frac{n}{p}} - \left(\varepsilon + \delta^{\frac{p}{p-1}}\right)^{1-\frac{n}{p}} &&, x \in B_g(x_0,\delta)\ ; \\ u_\varepsilon(x) &= 0 &&, x \in M\backslash B_g(x_0,\delta)\ . \end{aligned}$$

Quelques calculs utilisant le développement de Cartan de la métrique g autour de x_0 mènent au résultat suivant : pour tout $B > 0$,

$$\|u_\varepsilon\|_{p^*}^p > K(n,p)^p\|\nabla u_\varepsilon\|_p^p + B\|u_\varepsilon\|_p^p$$

pour $\varepsilon > 0$ petit si $S_g(x_0) > 0$, $p > 2$, $n > 3p - 2$. On a donc le

Théorème 6.1 (Druet [29], 1998) – *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geqslant 2$, soit $p \in]1; n[$. Supposons que $p > 2$, $n > 3p - 2$ et que la courbure scalaire de (M, g) soit strictement positive quelque part sur M. Alors $(I^p_{p,\mathrm{opt}})$ est fausse.*

En particulier, pour $p > 2$, $(I^p_{p,\mathrm{opt}})$ et $(I^1_{p,\mathrm{opt}})$ ne sont pas équivalentes. Il existe en effet des variétés sur lesquelles $(I^1_{p,\mathrm{opt}})$ est vraie et $(I^p_{p,\mathrm{opt}})$ ne l'est pas. C'est le cas par exemple sur la sphère standard (S^n, h) de dimension n si $p > 2$ et $n > 3p - 2$. Sur (S^n, h), la courbure scalaire est strictement positive partout donc $(I^p_{p,\mathrm{opt}})$ est fausse dès que $p > 2$, $n > 3p - 2$. Par contre, c'est un résultat de [7], $(I^1_{p,\mathrm{opt}})$ est vraie sur (S^n, h).

Dans ce théorème, on retrouve deux phénomènes devenus familiers dans le cas $p = 2$ mais qui interviennent ici beaucoup plus tôt dans le programme : le rôle de la dimension de la variété (nous ne nous y intéresserons pas dans cette section) et le rôle de la géométrie de la variété (et plus particulièrement de la courbure scalaire).

La suite de cette section est articulée autour des deux hypothèses "$p > 2$" et "$\exists\, x \in M$ tel que $S_g(x) > 0$" du théorème 6.1. Sont-elles nécessaires ? Retrouve-t-on la validité de $(I^p_{p,\mathrm{opt}})$ si $p \leqslant 2$ ou si $S_g \leqslant 0$ sur M ? On se demandera également ce qu'il en est de $(I^1_{p,\mathrm{opt}})$ en général. La sous-section suivante est consacrée à la pertinence de l'hypothèse sur la courbure scalaire.

6.1.2. Courbure "négative".

Nous allons retrouver la validité de $(I^p_{p,\mathrm{opt}})$ pour tout $p \in]1; n[$ moyennant des hypothèses géométriques sur (M, g). Pour ce faire, nous avons besoin du résultat suivant : celui-ci stipule que $(I^p_{p,\mathrm{opt}})$ est "localisable". Ce résultat était démontré et utilisé dans Druet [29] et a été formulé de cette façon dans Hebey [61].

Lemme 6.2 (Druet [29], 1998) – *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geqslant 2$, soit $p \in]1; n[$. Si l'inégalité $(I^p_{p,\mathrm{opt}})$ est localement valide, alors $(I^p_{p,\mathrm{opt}})$ est (globalement) valide.*

Par $(I^p_{p,\mathrm{opt}})$ localement valide, on entend la chose suivante : pour tout $x \in M$, il existe un voisinage Ω_x de x dans M et un réel $B_x > 0$ tels que pour toute fonction régulière à support compact dans Ω_x,

$$\left(\int_{\Omega_x} |u|^{p^*}\, dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} \leqslant K(n, p)^p \int_{\Omega_x} |\nabla u|_g^p\, dv_g + B_x \int_{\Omega_x} |u|^p\, dv_g\,.$$

Par $(I^p_{p,\mathrm{opt}})$ (globalement) valide, on entend qu'il existe $B > 0$ telle que $(I^p_{p,\mathrm{opt}})$ soit vraie pour toute fonction u dans $H_1^p(M)$.

Esquisse de preuve– Supposons que $(I^p_{p,\mathrm{opt}})$ soit localement valide sur (M, g) et supposons par l'absurde que $(I^p_{p,\mathrm{opt}})$ n'est pas globalement valide. Pour tout $\alpha > 0$,

$$\lambda_\alpha := \inf_{u \in H_1^p(M),\, u \neq 0} \frac{\|\nabla u\|_p^p + \alpha \|u\|_p^p}{\|u\|_{p^*}^p} < K(n, p)^{-p} .$$

On a vu section 1 que cette hypothèse nous assure l'existence d'un minimiseur u_α pour λ_α. Pour tout $\alpha > 0$, il existe $u_\alpha \in C^1(M)$, $u_\alpha > 0$, solution de

$$\Delta_p u_\alpha + \alpha u_\alpha^{p-1} = \lambda_\alpha u_\alpha^{p^*-1}$$

avec $\|u_\alpha\|_{p^*} = 1$. Ici, $\Delta_p u = -\operatorname{div}_g\left(|\nabla u|_g^{p-2} \nabla u\right)$ est le p-laplacien de u. Le p-laplacien est un opérateur quasi-elliptique et n'est elliptique que pour $p = 2$ (où l'on retrouve le laplacien usuel). Cela explique nombre de difficultés à venir. En premier lieu, on ne peut pas espérer plus de régularité que $C^{1,\eta}(M)$, $0 < \eta < 1$, pour u_α.

Comme dans le cas $p = 2$, on peut montrer qu'il existe $x_0 \in M$ tel que

$$\lim_{\alpha \to +\infty} u_\alpha = 0 \quad \text{dans } C^0_{loc}(M \backslash \{x_0\}) .$$

Soit $\delta > 0$ suffisamment petit tel que $B_g(x_0, 2\delta) \subset \Omega_{x_0}$. Soit $\eta \in C_c^\infty\left(B_g(x_0, \delta)\right)$ telle que $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, $\eta \equiv 1$ sur $B_g(x_0, \delta)$. D'après l'hypothèse de validité locale de $(I^p_{p,\mathrm{opt}})$, il existe B_{x_0} telle que pour tout $\alpha > 0$,

$$\begin{aligned}\left(\int_{B_g(x_0,2\delta)} (\eta u_\alpha)^{p^*} \, dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} \leqslant K(n,p)^p \int_{B_g(x_0,2\delta)} |\nabla(\eta u_\alpha)|_g^p \, dv_g \\ + B_{x_0} \int_{B_g(x_0,2\delta)} (\eta u_\alpha)^p \, dv_g .\end{aligned}$$

On écrit

$$\begin{aligned}\int_{B_g(x_0,2\delta)} (\eta u_\alpha)^{p^*} \, dv_g &= 1 + O\left(\int_{M \backslash B_g(x_0,\delta)} (\eta u_\alpha)^{p^*} \, dv_g\right) \\ &= 1 + o\left(\|u_\alpha\|_p^p\right)\end{aligned}$$

car $u_\alpha \to 0$ dans $C^0_{loc}(M \backslash \{x_0\})$. De la même façon, en utilisant l'équation vérifiée par u_α, on montre que

$$\begin{aligned}\int_{B_g(x_0,2\delta)} |\nabla(\eta u_\alpha)|_g^p \, dv_g &\leqslant \int_M |\nabla u_\alpha|_g^p \, dv_g + C \int_{M \backslash B_g(x_0,\delta)} |\nabla u_\alpha|_g^p \, dv_g \\ &\quad + C \int_{M \backslash B_g(x_0,\delta)} u_\alpha |\nabla u_\alpha|_g^{p-1} \, dv_g + C \int_{M \backslash B_g(x_0,\delta)} u_\alpha^p \, dv_g \\ &\leqslant \lambda_\alpha - \alpha \|u_\alpha\|_p^p + O\left(\|u_\alpha\|_p^p\right) .\end{aligned}$$

En revenant à l'inégalité locale ci-dessus et en remarquant que $\lambda_\alpha < K(n,p)^{-p}$, on obtient

$$\alpha \|u_\alpha\|_p^p \leqslant O\left(\|u_\alpha\|_p^p\right) ,$$

la contradiction recherchée puisque $\alpha \to +\infty$. Ceci termine la preuve du lemme. ◆

Grâce à ce lemme, on peut retrouver la validité de $(I^p_{p,\mathrm{opt}})$ dans pas mal de cas. Le théorème suivant est une combinaison de résultats de [8], [29], [35] et [76] :

Théorème 6.3 (Aubin-Druet-Hebey-Johnson-Morgan, 1998-2001) – *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geqslant 2$. L'inégalité $(I^p_{p,\mathrm{opt}})$ est valide pour tout $p \in \,]1;n[$ dans les cas suivants :*

1) (M,g) est le tore plat ou un espace hyperbolique compact.

2) (M,g) est à courbure sectionnelle négative ou nulle et la conjecture de Cartan-Hadamard est vraie en dimension n.

3) (M,g) est à courbure sectionnelle négative ou nulle, l'intégrant de Gauss-Bonnet-Chern G_g de (M,g) vérifiant $G_g \leqslant 0$.

4) (M,g) est à courbure scalaire strictement négative.

Nous définirons l'intégrant de Gauss-Bonnet-Chern section 7.2.2. Le point 1) est dû à Druet [29], le point 2) à Aubin-Druet-Hebey [8]. Les points 3) et 4) qui sont des améliorations du point 2) seront discutées dans la section 7 concernant les inégalités isopérimétriques. Le point 3) est une conséquence du théorème 7.3 (Johnson-Morgan [76]), le point 4) est une conséquence du théorème 7.4 (Druet [35]). Que l'on puisse retrouver la validité de certaines inégalités optimales de type Sobolev lorsque la courbure scalaire est strictement négative a été remarqué pour la première fois dans Hebey [64] (cf. section 5).

Dans tous les cas, le schéma de preuve est le même : on montre que sur ces variétés, $(I^p_{p,\mathrm{opt}})$ est localement valide puis on applique le lemme 6.2. Par exemple, montrons le point 2) du théorème. La conjecture de Cartan-Hadamard stipule que sur une variété riemannienne complète simplement connexe de dimension n à courbure sectionnelle négative ou nulle, l'inégalité isopérimétrique euclidienne a lieu. En d'autres termes, tout ouvert borné Ω de bord lisse sur une telle variété devrait vérifier

$$\frac{|\partial\Omega|_g}{|\Omega|_g^{\frac{n-1}{n}}} \geqslant K(n,1)^{-1}$$

où $|\,.\,|_g$ désigne le volume par rapport à la mesure riemannienne et $\partial\Omega$ est le bord de Ω. Cette conjecture a été démontrée en dimensions $n=2$ par Weil [100], $n=3$ par Kleiner [77] et $n=4$ par Croke [27]. Elle reste ouverte en dimensions $n \geqslant 5$.

Soit (M,g) une variété riemannienne compacte de dimension n à courbure sectionnelle négative ou nulle. Son revêtement universel est alors une variété riemannienne complète simplement connexe de dimension n à courbure sectionnelle négative ou nulle.

La variété (M, g) étant localement isométrique à son revêtement universel, pour tout $x \in M$, il existe $\delta_x > 0$ tel que tout ouvert lisse Ω contenu dans $B_g(x, \delta_x)$ vérifie

$$\frac{|\partial\Omega|_g}{|\Omega|_g^{\frac{n-1}{n}}} \geqslant K(n,1)^{-1} .$$

Une observation cruciale ici est que cette inégalité isopérimétrique locale entraîne la validité locale de $(I^p_{p,\mathrm{opt}})$ pour tout $p \in \,]1, n[$. La preuve de cette assertion est basée sur des techniques de symétrisation et la formule de la co-aire (cf. [8], voir aussi section 7.1).

Au vu du théorème 6.3, l'hypothèse "$\exists\, x \in M,\ S_g(x) > 0$" du théorème 6.1 est donc cruciale et quasi-optimale.

6.1.3. Rigidité en courbure "positive".

En poussant les calculs de fonctions tests de la section 6.1.1 un cran plus loin, on obtient le résultat de rigidité suivant :

Théorème 6.4 (Druet [29], 1998) – *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geqslant 2$ à courbure de Ricci positive ou nulle. Si $(I^p_{p,\mathrm{opt}})$ est valide sur (M, g) pour un certain $p \in \left]4; \frac{n+4}{5}\right[$, alors (M, g) est plate et recouverte par le tore plat.*

Dans le théorème 6.3, le tore plat apparaissait comme cas limite des variétés concernées par le théorème 6.1 (c'est-à-dire les variétés dont la courbure scalaire est strictement positive quelque part). Ici, il apparaît également comme cas limite des variétés Ricci-plates qui ne sont pas plates. Des exemples de telles variétés peuvent être trouvés dans [12] (voir également [15]).

Ce théorème, de preuve très simple, peut être vu comme la version compacte d'un très beau résultat de rigidité de M. Ledoux [78], antérieur malgré les dates de parution.

Théorème 6.5 (Ledoux [78], 1999) – *Soit (M, g) une variété riemannienne complète de dimension n à courbure de Ricci positive ou nulle. Supposons qu'il existe $p \in [1; n[$ tel que pour toute fonction u dans $C^\infty_c(M)$,*

$$\left(\int_M |u|^{p^*}\, dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} \leqslant K(n, p)^p \int_M |\nabla u|_g^p\, dv_g .$$

Alors (M, g) est isométrique à l'espace euclidien.

Remarque : dans le théorème 6.4, la condition $4 < p < \frac{n+4}{5}$ n'est peut-être pas optimale mais il est en tout cas nécessaire de supposer $p > 2$ (voir théorème 6.6 ci-dessous).

Ces deux dernières sections montrent de manière flagrante la dichotomie courbure "positive" / courbure "négative" dans l'étude de la validité de $(I^p_{p,\mathrm{opt}})$ pour $p > 2$. La validité de celle-ci en courbure "positive" est très rigide. Par contre, dès que la courbure est "négative", $(I^p_{p,\mathrm{opt}})$ est valide.

6.2. Inégalités optimales

On continue dans cette sous-section à s'intéresser aux questions 2 et 3 du programme dans le cas $1 < p < n$. Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geqslant 2$, soit $p \in]1; n[$ et soit $\theta \in [1; p]$. On englobe les questions 2 et 3 dans la question suivante : existe-t-il une constante $B > 0$ telle que pour toute fonction u dans $H_1^p(M)$,

$$\|u\|_{p^\star}^\theta \leqslant K(n,p)^\theta \|\nabla u\|_p^\theta + B\|u\|_p^\theta \; ? \qquad (I_{p,\text{opt}}^\theta)$$

L'inégalité optimale d'ordre p et de puissance θ sera dite valide si il existe $B > 0$ telle que $(I_{p,\text{opt}}^\theta)$ soit vraie pour toute fonction u dans $H_1^p(M)$.

Remarque : si $(I_{p,\text{opt}}^{\theta_0})$ est valide sur (M, g) pour un certain $\theta_0 \in [1; p]$, alors $(I_{p,\text{opt}}^\theta)$ est valide sur (M, g) pour tout $\theta \in [1; \theta_0]$. Ceci est une conséquence de l'inégalité standard $(x + y)^q \leqslant x^q + y^q$ pour tout $0 \leqslant q \leqslant 1$, tous $x, y \geqslant 0$.

On avait montré dans [29] l'analogue suivant du théorème 6.1 : si $p > 2$, $p^2 < n$ et si la courbure scalaire de (M, g) est strictement positive quelque part sur M, alors $(I_{p,\text{opt}}^\theta)$ est fausse pour tout $\theta > 2$. D'un autre côté, Aubin [7] conjecturait en 1976 que $(I_{p,\text{opt}}^\theta)$ devait être valide sur toute variété (M, g) avec $\theta = p$ si $p \leqslant 2$ et $\theta = \frac{p}{p-1}$ si $p > 2$. Cette conjecture, légèrement améliorée puisque $2 > \frac{p}{p-1}$ si $p > 2$, a été démontrée indépendamment par Aubin-Li [9] et l'auteur [30].

Théorème 6.6 (Aubin-Li [9], Druet [30], 1999) – *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geqslant 2$, soit $p \in]1; n[$. Si $p \leqslant 2$, alors $(I_{p,\text{opt}}^p)$ est valide. Si $p > 2$, alors $\left(I_{p,\text{opt}}^2\right)$ est valide.*

Pour mémoire, le cas $p = 2$ avait été obtenu auparavant par E. Hebey et M. Vaugon dans [70]. En particulier, $(I_{p,\text{opt}}^1)$ est toujours valide (question 2 du programme AB) et $(I_{p,\text{opt}}^p)$ est valide si $p \leqslant 2$ (question 3 du programme AB). Nous ne dirons rien sur la preuve de ce théorème : les techniques utilisées dans [30] seront développées dans la section suivante sur les inégalités isopérimétriques.

6.3. Fonctions extrémales

Nous serons ici encore une fois très brefs. Lorsque $(I_{p,\text{opt}}^p)$ est valide, on note $B_p(g)$ le meilleur B que l'on puisse prendre dans celle-ci : pour toute fonction u dans $H_1^p(M)$,

$$\|u\|_{p^\star}^p \leqslant K(n,p)^p \|\nabla u\|_p^p + B_p(g)\|u\|_p^p \, . \qquad (I_{p,\text{opt}}^p)$$

On note également $C_p(g)$ le meilleur B que l'on puisse prendre dans $(I_{p,\text{opt}}^1)$ (qui est toujours valide) : pour toute fonction u dans $H_1^p(M)$,

$$\|u\|_{p^\star} \leqslant K(n,p)\|\nabla u\|_p + C_p(g)\|u\|_p \, . \qquad (I_{p,\text{opt}}^1)$$

On dira que $u \not\equiv 0$ est une fonction extrémale pour $(I^p_{p,\mathrm{opt}})$ (resp. $(I^1_{p,\mathrm{opt}})$) si u réalise le cas d'égalité dans $(I^p_{p,\mathrm{opt}})$ (resp. $(I^1_{p,\mathrm{opt}})$). Concernant la question § du programme AB dans le cas $p \neq 2$, on a les deux résultats suivants, la première partie du premier ayant été démontrée dans [28].

Théorème 6.7 – *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geqslant 2$, soit $p \in]1; n[$. L'inégalité $(I^p_{p,\mathrm{opt}})$ admet des fonctions extrémales dans les cas suivants :*

1) $p < 2$ et $p^2 < n$.

2) $p > 2$, $p^2 < n$ et (M, g) vérifie l'un des points 1)-4) du théorème 6.3.

Théorème 6.8 (Druet-Hebey [36], 2000) – *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geqslant 2$. Pour tout $p \in]1; n[$, $p^2 < n$, l'inégalité $(I^1_{p,\mathrm{opt}})$ admet des fonctions extrémales.*

Ces deux résultats achèvent ce survol du cas $1 < p < n$. Pour plus de précisions concernant cette sixième section, on renvoie soit à [38], soit aux articles originaux.

7. Inégalités isopérimétriques

Cette section est consacrée au cas $p = 1$ du programme AB, c'est-à-dire aux inégalités isopérimétriques sur les variétés. À propos d'inégalités isopérimétriques sur les variétés, on peut consulter les deux surveys [49] et [87]. La première partie s'occupera des questions du programme AB, partie A, dans le cas $p = 1$ (cf. section 1.2) tandis que la deuxième partie sera beaucoup plus reliée à des questions proprement isopérimétriques.

7.1. Une inégalité isopérimétrique globale

On rappelle l'inégalité isopérimétrique dans $\mathbb{R}^n$. Tout domaine Ω borné de $\mathbb{R}^n$ à bord lisse vérifie

$$\frac{|\partial\Omega|}{|\Omega|^{\frac{n-1}{n}}} \geqslant K(n,1)^{-1} \tag{7.1}$$

où $|\,.\,|$ désigne les mesures euclidiennes $(n-1)$- et n-dimensionnelles. Dans (7.1), le cas d'égalité est atteint par un ensemble Ω si et seulement si Ω est une boule. On dira que les boules sont des ensembles extrémaux pour (7.1).

Dans le contexte des variétés riemanniennes compactes, une extension naturelle (parmi d'autres) de (7.1) est l'inégalité qui stipule l'existence de deux constantes A et B telles que pour tout domaine lisse $\Omega \subset M$,

$$\frac{|\partial\Omega|_g}{|\Omega|_g^{\frac{n-1}{n}}} \geqslant A - B|\Omega|_g^{\frac{1}{n}} . \tag{7.2}$$

On vérifie en testant sur des boules de plus en plus petites que toute constante A dans (7.2) doit être inférieure ou égale à $K(n,1)^{-1}$. Une conjecture de longue date, formulée par exemple dans [7], stipulait qu'il existe $B > 0$ telle que l'inégalité (7.2) est vraie avec $K(n,1)^{-1}$ et B pour tout domaine Ω de M.

Avant de donner le résultat principal de cette section, nous devons introduire l'espace Σ des domaines Ω de périmètre fini. On note $BV(M)$ l'ensemble des fonctions à variations bornées, c'est-à-dire

$$BV(M) = \left\{u \in L^1(M) \text{ t.q. } \|\nabla u\|_{BV} < +\infty\right\}$$

où

$$\|\nabla u\|_{BV} = \sup\left\{-\int_M u \operatorname{div}_g(X)\, dv_g,\ X \in \Gamma(TM),\ \operatorname{div}_g(X) \in L^n(M),\ \|X\|_\infty \leqslant 1\right\} .$$

Dans cette définition, $\Gamma(TM)$ désigne l'ensemble des champs de vecteurs sur M. On munit $BV(M)$ de la norme $\|u\| = \|\nabla u\|_{BV} + \|u\|_1$. Deux très bonnes références à propos des fonctions à variations bornées sont [44] et [102]. Il y a cependant quelques choses importantes à savoir sur $BV(M)$ avant de poursuivre. Tout d'abord, toute fonction u dans $H_1^1(M)$ est aussi dans $BV(M)$. De plus, si $u \in H_1^1(M)$, alors $\|\nabla u\|_{BV} = \|\nabla u\|_1$. L'espace $BV(M)$ est construit de façon à ce que toute suite $(u_i)_{i\geqslant 1}$ de fonctions dans $H_1^1(M)$ bornée dans $H_1^1(M)$ converge faiblement vers une fonction $u_0 \in BV(M)$, à extraction d'une sous-suite près. Enfin, $BV(M)$ s'injecte dans $L^q(M)$ pour $q \leqslant \frac{n}{n-1}$ et l'injection est compacte pour $q < \frac{n}{n-1}$. C'est tout ce que nous aurons besoin de savoir sur $BV(M)$ pour l'instant.

On dira qu'un domaine Ω de M est de périmètre fini si sa fonction caractéristique $\mathbf{1}_\Omega$ est dans $BV(M)$. On note

$$\Sigma = \{\Omega \subset M,\ \mathbf{1}_\Omega \in BV(M)\} .$$

Pour Ω dans Σ, le volume du bord de Ω a un sens : il est défini par

$$|\partial\Omega|_g = \|\nabla(\mathbf{1}_\Omega)\|_{BV} .$$

Si Ω a un bord lisse, $\|\nabla(\mathbf{1}_\Omega)\|_{BV}$ correspond au volume de $\partial\Omega$ défini de façon classique, c'est-à-dire au volume de $\partial\Omega$ pour l'élément de volume de la métrique sur $\partial\Omega$ induite de la métrique ambiante g.

On a alors le résultat suivant, qui répond par l'affirmative à la conjecture ci-dessus mentionnée :

Théorème 7.1 (Druet [33], 2000) – *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geqslant 2$. Il existe $B > 0$ tel que tout domaine Ω de périmètre fini vérifie*

$$\frac{|\partial\Omega|_g}{|\Omega|_g^{\frac{n-1}{n}}} \geqslant K(n,1)^{-1} - B|\Omega|_g^{\frac{1}{n}} . \tag{7.3}$$

Si B_1 est le meilleur B dans (7.3)*, il existe un ensemble extrémal Ω_0 dans Σ qui atteint le cas d'égalité dans* (7.3) *avec $B = B_1$. De plus, soit $\Omega_0 = M$ est un ensemble extrémal, soit*

$|\Omega_0| \leqslant \frac{1}{2}|M|$ *et on peut choisir* Ω_0 *connexe avec un bord* $\partial\Omega_0$ *régulier sauf sur un ensemble compact de dimension de Hausdorff au plus* $n-8$. *De plus,* $\partial\Omega_0$ *est dans ce cas de courbure moyenne constante* $\eta = \left(\frac{\omega_{n-1}}{n}\right)^{\frac{1}{n}} |\Omega_0|^{-\frac{1}{n}} - \frac{B_1}{n-1}$ *en ses points réguliers.*

Ce théorème est en fait une conséquence du résultat suivant, qui répond aux questions 2, 3 et 5 du programme AB dans le cas $p = 1$.

Proposition 7.2 (Druet [33], 2000) – *Soit* (M, g) *une variété riemannienne compacte de dimension* $n \geqslant 2$. *Il existe* $B > 0$ *tel que toute fonction* u *dans* $BV(M)$ *vérifie*

$$\|u\|_{\frac{n}{n-1}} \leqslant K(n,1)\left(\|\nabla u\|_{BV} + B\|u\|_1\right) \qquad (I^1_{1,\mathrm{opt}})$$

De plus, il existe une fonction extrémale $u_0 \in BV(M)$ *réalisant le cas d'égalité dans* $(I^1_{1,\mathrm{opt}})$ *avec* $B = B_1$, *où* B_1 *est le plus petit* B *que l'on puisse prendre dans* $(I^1_{1,\mathrm{opt}})$. *Enfin, toute fonction extrémale est de la forme* $u_0 = \lambda \mathbf{1}_{\Omega_0}$ *avec* $\Omega_0 \in \Sigma$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

On retrouve ici exactement ce qui se passe dans $\mathbb{R}^n$ où les fonctions extrémales de l'inégalité H^1_1 sont les fonctions caractéristiques d'ensembles extrémaux pour l'inégalité isopérimétrique euclidienne. Pour montrer que cette proposition entraîne le théorème 7.1, on utilise les arguments de Federer et Fleming [46]. On a

$$(I^1_{1,\mathrm{opt}}) \iff (7.3)$$

où les constantes optimales B_1 dans $(I^1_{1,\mathrm{opt}})$ et (7.3) sont les mêmes. Pour voir que (7.3) entraîne $(I^1_{1,\mathrm{opt}})$, il suffit d'appliquer (7.3) à $\mathbf{1}_\Omega$ pour Ω dans Σ. La réciproque est basée sur la formule de la co-aire (cf. [24] ou [44] pour les détails) : pour $u \in BV(M)$, on note pour tout $t \geqslant 0$,

$$\Omega_t = \{x \in M \text{ t.q. } |u(x)| \geqslant t\} .$$

L'ensemble Ω_t appartient à Σ pour presque tout $t \geqslant 0$. On vérifie ensuite que

$$\begin{aligned}
\|u\|_{\frac{n}{n-1}} &= \left(\frac{n}{n-1}\int_0^\infty t^{\frac{1}{n-1}}|\Omega_t|_g\,dt\right)^{\frac{n-1}{n}} \\
\|u\|_1 &= \int_0^\infty |\Omega_t|_g\,dt \\
\|\nabla u\|_{BV} &= \int_0^\infty |\partial\Omega_t|_g\,dt
\end{aligned}$$

où la dernière ligne est obtenue grâce à la formule de la co-aire. Si (7.3) est vraie,

$$\|\nabla u\|_{BV} \geqslant K(n,1)^{-1}\int_0^\infty |\Omega_t|_g^{\frac{n-1}{n}}\,dt - B_1\int_0^\infty |\Omega_t|_g\,dt$$

d'où

$$\int_0^\infty |\Omega_t|_g^{\frac{n-1}{n}}\,dt \leqslant K(n,1)\left(\|\nabla u\|_{BV} + B_1\|u\|_1\right) .$$

Comme $|\Omega_t|$ est une fonction décroissante en t, on peut montrer que

$$\left(\frac{n}{n-1}\int_0^\infty t^{\frac{1}{n-1}}|\Omega_t|_g\,dt\right)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant \int_0^\infty |\Omega_t|_g^{\frac{n-1}{n}}$$

avec égalité si et seulement si $|\Omega_t| = \lambda \mathbf{1}_{t\leqslant t_0}$ pour un certain $t_0 > 0$ et un certain $\lambda > 0$. Ceci démontre premièrement l'équivalence entre $(I^1_{1,\mathrm{opt}})$ et (7.3) et deuxièmement que toute fonction extrémale $u_0 \in BV(M)$ pour $(I^1_{1,\mathrm{opt}})$ est de la forme $u_0 = \lambda \mathbf{1}_{\Omega_0}$ avec $\Omega_0 \in \Sigma$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ainsi, il est clair que la première partie du théorème 7.1 est une conséquence de la proposition 7.2. En ce qui concerne la partie du théorème concernant la régularité de l'ensemble extrémal Ω_0, elle découle d'arguments venant de la théorie de la mesure géométrique (voir [4] et [52]).

Esquisse de preuve de la proposition 7.2 – On rappelle que pour tout $1 < p \leqslant 2$, par le théorème 5.6, on a l'inégalité suivante : pour tout u dans $H_1^p(M)$,

$$\|u\|_{p^\star}^p \leqslant K(n,p)^p\left[\|\nabla u\|_p^p + B_p\|u\|_p^p\right] \qquad (I^p_{p,\mathrm{opt}})$$

où on a pris le plus petit B possible dans $(I^p_{p,\mathrm{opt}})$. De plus, on sait grâce au théorème 5.7 qu'il existe $u_p \in C^1(M)$, $u_p > 0$ réalisant le cas d'égalité dans $(I^p_{p,\mathrm{opt}})$ (au moins pour $p < 2$). Cette fonction u_p vérifie $\|u_p\|_{p^\star} = 1$ et

$$\Delta_p u_p + B_p u_p^{p-1} = K(n,p)^{-p} u_p^{p^\star - 1}\,. \tag{7.4}$$

Supposons un instant que

$$\liminf_{p\to 1}\|u_p\|_p > 0\,. \tag{7.5}$$

Ceci entraîne en particulier que (B_p) est bornée lorsque $p \to 1$ (toujours à extraction près). Il n'est ensuite pas difficile de vérifier en passant à la limite dans $(I^p_{p,\mathrm{opt}})$ à $u \in C^\infty(M)$ fixée que $(I^1_{1,\mathrm{opt}})$ est valide avec

$$B_1 = \liminf_{p\to 1} B_p\,.$$

De plus, (u_p) étant bornée dans $H_1^1(M)$, il existe $u_0 \in BV(M)$ telle que

$$\begin{aligned} u_p &\rightharpoonup u_0 && \text{faiblement dans } L^{\frac{n}{n-1}}(M)\,, \\ u_p &\to u_0 && \text{fortement dans } L^q(M),\ 1 \leqslant q < \tfrac{n}{n-1}\,. \end{aligned}$$

On pose maintenant

$$\sigma_p = |\nabla u_p|_g^{p-2}\nabla u_p\,.$$

Par inégalité de Hölder, $\left(\sigma_p\right)$ est bornée dans $L^q(M)$ pour tout $q > 0$. Ainsi, il existe un champ de vecteurs σ sur M tel que, à extraction d'une sous-suite près, σ_p converge fortement vers σ dans $L^q(M)$ pour tout $q > 0$. De plus, $\|\sigma\|_\infty \leqslant 1$. On peut maintenant passer à la limite dans l'équation (7.4) : le couple (u_0, σ) vérifie

$$-\operatorname{div}_g(\sigma) + B_1\, sign(u_0) = K(n,1)^{-1} u_0^{\frac{1}{n-1}}$$

où $sign(u_0) \in L^\infty(M)$ et $sign(u_0)u_0 = u_0$. En utilisant le principe de concentration-compacité de P.L. Lions (cf. section 1.4.3), on peut montrer que la convergence de u_p vers u_0 est en fait forte dans $L^{\frac{n}{n-1}}$. Cette assertion, qui demande un peu de travail, est basée sur l'observation suivante : la seule possibilité pour que la convergence ne soit pas forte est l'apparition d'au minimum un point de concentration. Mais ce point de concentration est obligé de transporter au moins une énergie minimale. Donc, en-dehors de ce point, il ne reste plus d'énergie (c'est-à-dire de masse L^{p^*}). Mais dans cette situation, (7.5) est clairement violée. En multipliant l'équation ci-dessus par u_0 et en intégrant sur M, on obtient

$$-\int_M \operatorname{div}_g(\sigma)\, u_0\, dv_g + B_1 \|u_0\|_1 = K(n,1)^{-1}$$

ce qui donne en appliquant $(I^1_{1,\mathrm{opt}})$:

$$-\int_M \operatorname{div}_g(\sigma)\, u_0\, dv_g \leqslant \|\nabla u_0\|_{BV} .$$

Comme $\operatorname{div}_g(\sigma) \in L^n(M)$, d'après l'équation ci-dessus, et comme $\|\sigma\|_\infty \leqslant 1$, on a d'après la définition de $\|\nabla u_0\|_{BV}$:

$$-\int_M \operatorname{div}_g(\sigma)\, u_0\, dv_g = \|\nabla u_0\|_{BV}$$

ce qui prouve que u_0 est une fonction extrémale pour $(I^1_{1,\mathrm{opt}})$.

La preuve de la proposition se réduit donc à la preuve de (7.5). On procède par l'absurde; on suppose donc qu'à extraction près,

$$\lim_{p\to 1} \|u_p\|_p = 0 . \tag{7.6}$$

Dans ce cas, on a affaire à un phénomène de concentration. On ne donne que les étapes de la preuve. Toute la difficulté de cette preuve réside dans le fait qu'on ne peut pas utiliser de résultats de théorie elliptique (car $p \neq 2$) ni même de théorie quasi-elliptique (car $p \to 1$ et le 1-laplacien est un opérateur très dégénéré). Il ne faut donc utiliser que des techniques souples qui supportent le passage à la limite $p \to 1$.

Étape 1 – On note $x_p \in M$ un point où u_p atteint son maximum et on pose $u_p(x_p) = \mu_p^{1-\frac{n}{p}}$. Clairement, $\mu_p \to 0$ quand $p \to 1$ et, à extraction près, $x_p \to x_0$ quand $p \to 1$. Par blow-up en x_p, en passant sur $\mathbb{R}^n$ par l'intermédiaire de la carte exponentielle, on montre que

$$\lim_{R\to+\infty} \lim_{p\to 1} \int_{B_g(x_p, R\mu_p)} u_p^{p^*}\, dv_g = 1$$

puis que

$$\lim_{p\to 1} u_p = 0 \quad \text{dans } C^0_{loc}(M\backslash\{x_0\})$$

Cette étape utilise essentiellement le principe de concentration-compacité de P.L. Lions et le schème itératif de Moser, dont on vérifie qu'il continue à fonctionner indépendamment de p tendant vers 1. Pour mémoire, on avait remarqué dans la preuve du théorème 2.3 qu'il existait un "marteau" dans le cas $p = 2$ pour arriver à ce type de résultats. C'est ici que la souplesse des techniques présentées au section 2.2.3, prend tout son intérêt.

Étape 2 – On peut transformer cette estimée intégrale en l'estimée ponctuelle suivante :

$$\exists\, C > 0,\ \forall\, p > 1,\ \forall\, x \in M,\ d_g\left(x_p, x\right)^{\frac{n}{p}-1} u_p(x) \leqslant C$$

Cette étape utilise encore une fois le schème itératif de Moser.

Étape 3 – La norme L^p de u_p se concentre autour de x_0 quand $p \to 1$.

Conclusion – On applique l'inégalité de Sobolev H_1^p euclidienne à ηu_p, η une fonction "cut-off" autour de x_0 et on estime tous les termes d'erreur entre la métrique riemannienne et la métrique euclidienne grâce aux étapes 2 et 3.

Une dernière remarque avant de passer à la section suivante : soit $x \in M$, $r > 0$ et soit $\Omega_r = B_g(x, r)$. Il suit du développement limité de Cartan de la métrique g autour de x que

$$\frac{|\partial\Omega_r|_g^2}{|\Omega_r|_g^{2\frac{n-1}{n}}} = K(n,1)^{-2} - \frac{n}{n+2} S_g(x)|\Omega_r|_g^{\frac{2}{n}} + o\left(|\Omega_r|_g^{\frac{2}{n}}\right) \tag{7.7}$$

Ainsi, pour tout $B > \frac{n}{n+2} S_g(x)$ et tout $r > 0$ suffisamment petit,

$$\frac{|\partial\Omega_r|_g^2}{|\Omega_r|_g^{2\frac{n-1}{n}}} \geqslant K(n,1)^{-2} - B|\Omega_r|_g^{\frac{2}{n}} + o\left(|\Omega_r|_g^{\frac{2}{n}}\right)$$

une inégalité plus forte que celle obtenue en prenant $\Omega = \Omega_r$ dans (7.3). Nous verrons dans la section suivante que cette inégalité (où tous les termes de (7.3) sont élevés au carré) est vraie pour tout Ω dans Σ sur toute variété riemannienne compacte de dimension $n \geqslant 2$.

7.2. Résultats de comparaison isopérimétrique locaux

7.2.1. Conjectures isopérimétriques.

La conjecture isopérimétrique sur les variétés la plus connue est sans doute la conjecture de Cartan-Hadamard. Soit (M, g) une variété de Cartan-Hadamard, c'est-à-dire une variété riemannienne complète simplement connexe de dimension $n \geqslant 2$ et à courbure sectionnelle négative ou nulle. La conjecture de Cartan-Hadamard stipule que tout ouvert Ω borné de bord lisse dans une telle variété devrait vérifier

$$|\partial\Omega|_g \geqslant |\partial B|_\xi$$

où B est une boule de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ de volume $|\Omega|_g$. En d'autres termes, l'inégalité isopérimétrique de l'espace euclidien devrait être vraie sur une variété de Cartan-Hadamard. Un tel type de résultats sera dit de comparaison isopérimétrique : on compare le volume du bord d'un ouvert à celui d'une boule de même volume dans un espace modèle à courbure sectionnelle constante. La conjecture de Cartan-Hadamard a été démontrée en dimensions $n = 2$ par Weil [100], $n = 3$ par Kleiner [77] et $n = 4$ par Croke [27]. La preuve de Kleiner possède beaucoup de similitudes avec la preuve du théorème 7.2 ci-dessous. La preuve de Croke est beaucoup plus inattendue : il utilise la formule de Santalo pour obtenir une inégalité isopérimétrique sur les variétés de Cartan-Hadamard en toutes dimensions. Plus précisément, il démontre que tout ouvert borné lisse de (M, g), variété de Cartan-Hadamard de dimension n, vérifie

$$|\partial\Omega|_g \geqslant C(n)|\Omega|_g^{\frac{n-1}{n}}$$

où $C(n)$ est une constante dimensionnelle. Et, de manière assez miraculeuse (à mes yeux), il se trouve que $C(4) = K(4,1)^{-1}$, la meilleure constante que l'on puisse espérer obtenir dans une telle inégalité. Ainsi, la conjecture est démontrée en dimension 4. Si elle est démontrée en dimensions $n = 2, 3, 4$, elle reste ouverte en dimensions plus grandes.

Cette conjecture est naturellement extensible de la façon suivante : si (M, g) est une variété riemannienne complète simplement connexe de dimension n dont la courbure sectionnelle vérifie $K_g \leqslant K_0 \leqslant 0$, alors tout ouvert Ω borné de bord lisse dans M devrait satisfaire l'inégalité

$$|\partial\Omega|_g \geqslant |\partial B|_{g_0}$$

où B est une boule de volume $|\Omega|_g$ dans l'espace modèle (M_0, g_0) simplement connexe de dimension n et de courbure sectionnelle constante K_0.

Ces conjectures seront dites globales. Voyons maintenant une conjecture isopérimétrique locale. Soit (M, g) une variété riemannienne complète de dimension $n \geqslant 2$ de courbure sectionnelle $K_g \leqslant K_0$. Une conjecture de longue date, dont une formulation peut être trouvée dans [7] mais qui remonte à des temps plus anciens, stipule que pour tout $x \in M$, il existe $r_x > 0$ tel que tout domaine régulier Ω contenu dans $B_g(x, r_x)$ vérifie l'inégalité isopérimétrique suivante :

$$|\partial\Omega|_g \geqslant |\partial B|_{g_0}$$

où B est une boule de volume $|\Omega|_g$ dans l'espace modèle (M_0, g_0) simplement connexe de dimension n et de courbure sectionnelle $K_g \equiv K_0$. La restriction locale est nécessaire si $K_0 > 0$ car l'espace modèle a alors un volume fini (c'est une sphère). Si on prend $K_0 \equiv 0$, la conjecture juste énoncée est exactement une version locale de celle de Cartan-Hadamard.

Les deux sections suivantes sont consacrées à l'obtention de tels résultats de comparaison isopérimétrique locaux.

7.2.2. Courbure sectionnelle.

Dans un très beau papier [76], Johnson et Morgan ont démontré une version compacte de la conjecture locale ci-dessus :

Théorème 7.3 (Johnson-Morgan [76], 2000) – *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geqslant 2$ de courbure sectionnelle K_g et d'intégrant de Gauss-Bonnet-Chern G_g. Supposons que*

$K_g < K_0$ ou

$K_g \leqslant K_0$ et $G_g \leqslant G_0$,

avec G_0 l'intégrant de Gauss-Bonnet-Chern de l'espace modèle (M_0, g_0) simplement connexe de courbure sectionnelle constante $K_{g_0} \equiv K_0$. Alors il existe $V > 0$ tel que tout domaine régulier Ω dans M de volume inférieur ou égal à V vérifie

$$|\partial\Omega|_g \geqslant |\partial B|_{g_0}$$

où B est une boule de volume $|\Omega|_g$ dans l'espace modèle (M_0, g_0) de courbure sectionnelle $K_g \equiv K_0$, avec égalité si et seulement si Ω est isométrique à une boule de (M_0, g_0).

Encore une fois, la restriction à des volumes petits est nécessaire dans le cadre compact du théorème. On note, pour $0 < V < |M|_g$,

$$h(V) = \inf\left\{|\partial\Omega|_g,\ |\Omega|_g = V\right\} .$$

Il existe $\Omega_V \in \Sigma$ tel que $|\partial\Omega|_g = h(V)$. Le bord de Ω_V, $\partial\Omega_V$, est une hypersurface régulière de courbure moyenne constante H_V sauf sur un ensemble compact de dimension de Hausdorff au plus $n - 8$ (voir par ex. [83]). La première étape de la preuve du théorème, résultat de toute beauté en lui-même, consiste en démontrer que Ω_V "ressemble" à une boule pour V petit. Tentons d'expliquer très brièvement la preuve d'une telle assertion, et par la même occasion de lui donner un sens. L'inégalité de Heintze-Karcher [73] permet tout d'abord de montrer que la courbure moyenne de Ω_V, H_V, tend vers $+\infty$ lorsque $V \to 0$. De plus, Ω_V a une seule composante connexe et $\text{diam}(\Omega_V) \to 0$ quand $V \to 0$. On procède ensuite à un changement d'échelle pour ramener Ω_V à un volume constant égal à 1. D'après le théorème de Nash [84], on peut supposer que M est une sous-variété lisse de $\mathbf{R}^N$ pour $N = \frac{(n+2)(n+3)}{2}$ (voir par exemple [53]). Nos nouveaux $\tilde{\Omega}_V$ de volume 1 ont une courbure moyenne bornée dans $\mathbf{R}^N$ et $\partial\tilde{\Omega}_V$ est également borné quand $V \to 0$. D'après le théorème de monotonie de Allard [2], tous les $\tilde{\Omega}_V$ sont contenus dans une boule de rayon r_0 fixe. On peut montrer ensuite que les $\tilde{\Omega}_V$ convergent vers une boule de dimension n dans $C^{1,\alpha}$ (on peut ensuite obtenir une convergence meilleure). C'est en ce sens que l'on dit que les Ω_V "ressemblent" à des boules pour V petit. En particulier, si on note $K_1(V), ..., K_{n-1}(V)$ les courbures principales de $\partial\Omega_V$, on a, pour V petit,

$$\frac{H_V}{2(n-1)} \leqslant K_i(V) \leqslant \frac{3H_V}{(n-1)} \quad \text{pour } i = 1, ..., n-1 .$$

On rappelle ici que la courbure moyenne est donnée par $H = \frac{K_1+...+K_{n-1}}{n-1}$. On renvoie par exemple à [50] pour une définition précise des courbures principales d'une sous-variété. La preuve du théorème est ensuite basée sur la formule de Gauss-Bonnet-Chern [3, 25] :

$$\chi(\Omega_V) = \frac{2}{\omega_{n-1}} \int_{\Omega_V} G_g \, dv_g + \frac{1}{\omega_{n-2}} \int_{\partial\Omega_V} \Phi \, d\sigma_g$$

où $\chi(\Omega_V)$ désigne la caractéristique d'Euler de Ω_V, G_g est l'intégrant de Gauss-Bonnet-Chern de M et

$$\begin{aligned} \Phi \; = \sum C_m \, moyenne \{ \quad & \pm K_{i_1}...K_{i_m} R_{i_{m+1} i_{m+2} j_{m+1} j_{m+2}} ... R_{i_{n-2} i_{n-1} j_{n-2} j_{n-1}} ; \\ & n - m \; pair, \; i_k = j_k \; si \; k \leqslant m \} \; . \end{aligned}$$

Dans cette définition, le signe $\pm$ dépend des signatures des permutations (i_k) et (j_k) et R_{ijkl} désigne les composantes de la courbure de Riemann dans une base orthonormée, les (K_i) désignant quant à eux les courbures principales de $\partial\Omega_V$. Les constantes C_m sont explicites. D'un autre côté,

$$G_g = \begin{cases} \sum_{\sigma,\tau} \frac{\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)}{\det g} \left(\Pi_{i=1,...,n-1} R_{\sigma(i)\sigma(i+1)\tau(i)\tau(i+1)}\right) & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 \quad \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

où $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation σ et la somme est prise sur l'ensemble des permutations de $\{1, ..., n\}$. Cet intégrant G_g prend une forme simple en dimensions 2 et 4 (voir par exemple [14]).

Pour V petit, on a $\chi(\Omega_V) = 1$. On peut ensuite faire un développement limité de Φ pour V petit (en utilisant le fait que Ω_V ressemble à une boule) et obtenir grâce aux hypothèses du théorème que

$$H_V \geqslant f(V, h(V))$$

pour V petit où f est telle que dans l'espace modèle (M_0, g_0), la courbure moyenne d'une boule est donnée par

$$H_0 = f\left(|B|_{g_0}, |\partial B|_{g_0}\right) \; .$$

Une interprétation géométrique importante de la courbure moyenne est qu'elle mesure la variation du volume du bord par rapport au volume pour des petites perturbations de l'ouvert. En particulier, les dérivées à gauche et à droite de $h(V)$ (qui existent toujours, voir par exemple [49]) vérifient

$$h'_L(V) \geqslant h'_R(V) \geqslant H_V \geqslant f(V, h(V))$$

tandis que, dans l'espace modèle, on a

$$(h_0)'(V) = f(V, h_0(V)) \; .$$

Ceci entraîne $h(V) \geqslant h_0(V)$, la conclusion désirée. On peut ensuite faire une étude du cas d'égalité pour terminer la preuve du théorème. ◆

Revenons à l'énoncé du théorème 7.3. Tout d'abord, l'hypothèse $K_g \leqslant K_0$ est sans doute suffisante pour que la comparaison isopérimétrique avec l'espace modèle ait lieu. On peut maintenant se demander si une majoration large d'une courbure plus faible que la courbure sectionnelle serait suffisante. La réponse est non. L'inégalité isopérimétrique du théorème 7.3 est par exemple fausse sur $S^2 \times S^2$ qui vérifie $\mathrm{Ric}_g \leqslant g$. En effet, l'espace modèle correspondant est alors la sphère standard S^4 de rayon $\sqrt{3}$ et la comparaison isopérimétrique du théorème 7.3, même restreinte aux petites boules de $S^2 \times S^2$ et de $S^4\left(\sqrt{3}\right)$, est fausse. Ainsi, une majoration large de la courbure de Ricci n'est pas suffisante.

Remarque : un autre contre-exemple est fourni par les variétés Ricci-plates qui ne sont pas plates. Celles-ci ne vérifient pas la comparaison isopérimétrique du théorème avec l'espace euclidien (espace modèle pour $K_0 = 0$).

Si on veut une inégalité large sur une courbure, il faudra nécessairement faire cette hypothèse sur la courbure sectionnelle. Par contre, une question naturelle, d'ailleurs posée par Johnson et Morgan dans [76], est la suivante : est-il suffisant de supposer que $S_g < n(n-1)K_0$ pour que la comparaison locale avec l'espace modèle de courbure sectionnelle constante K_0 continue à être vraie ? En faveur de cette question, la relation (7.7) est instructive. Pour y répondre, il faudrait connaître précisément la façon dont les domaines isopérimétriques de petit volume convergent vers des boules. En d'autres termes, il faudrait contrôler l'erreur qu'il y a entre ces domaines et des boules. Si elle est suffisamment petite, on devrait être capable de répondre oui. C'est dans l'esprit ce qu'on va faire dans la sous-section suivante. Pour y parvenir, nous allons utiliser des techniques d'analyse asymptotique de solutions d'EDP quai-elliptiques et approcher le problème isopérimétrique par un problème d'inégalités H_1^p, $p \to 1$ par valeurs strictement supérieures. Cela va nous permettre également de traiter la version non-compacte de la conjecture isopérimétrique locale, version que Johnson et Morgan ne peuvent traiter puisque dans ce cadre, l'existence de domaines isopérimétriques relativement réguliers et à courbure moyenne constante est déjà problématique.

7.2.3. Courbure scalaire.

La réponse à la question juste posée est donnée par les deux résultats suivants : le premier concerne le cas des variétés complètes non nécessairement compactes et est très proche de la conjecture locale mentionnée en section 7.2.1.

Théorème 7.4 (Druet [35], 2001) – *Soit (M,g) une variété riemannienne de dimension $n \geqslant 2$, soit $x \in M$. Supposons que $S_g(x) < n(n-1)K_0$ pour un certain $K_0 \in \mathbb{R}$. Il existe r_x tel que tout ouvert Ω lisse contenu dans $B_g(x, r_x)$ vérifie*

$$|\partial\Omega|_g > |\partial B|_{g_0}$$

où B est une boule de volume $|\Omega|_g$ dans l'espace modèle (M_0, g_0) de courbure sectionnelle constante K_0.

Le deuxième résultat concerne le cas des variétés compactes :

Théorème 7.5 (Druet [35], 2001) – *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geqslant 2$ dont la courbure scalaire vérifie $S_g < n(n-1)K_0$. Il existe $V > 0$ tel que tout ouvert lisse Ω de M de volume plus petit que V vérifie*

$$|\partial\Omega|_g > |\partial B|_{g_0}$$

où B est une boule de volume $|\Omega|_g$ dans l'espace modèle (M_0, g_0) de courbure sectionnelle constante K_0.

La preuve est basée sur l'étude d'une inégalité de Sobolev H_1^1 locale. La pertinence de la courbure scalaire dans l'étude de telles inégalités de Sobolev a déjà été discutée sections 2, 5 et 6.

Esquisse de preuve du théorème 7.4 – D'après (7.7), il est suffisant de démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\Omega \subset B_g(x_0, r_\varepsilon)$,

$$|\partial\Omega|_g^2 \geqslant K(n,1)^{-2}|\Omega|_g^{2\frac{n-1}{n}} - \left(\frac{n}{n+2}S_g(x_0) + \varepsilon\right)|\Omega|_g^2 .$$

Comme nous l'avons déjà dit maintes fois dans ces notes, cette inégalité isopérimétrique est une conséquence de l'inégalité de Sobolev suivante : pour tout $u \in C_c^\infty\left(B_g(x_0, r_\varepsilon)\right)$,

$$\|u\|_{\frac{n}{n-1}}^2 \leqslant K(n,1)^2\left(\|\nabla u\|_1^2 + \left(\frac{n}{n+2}S_g(x_0) + \varepsilon\right)\|u\|_1^2\right) . \tag{7.8}$$

On va maintenant démontrer (7.8). On peut supposer, vu que l'on a affaire à un résultat purement local, que $M = \mathbb{R}^n$ et $x_0 = 0$. On pose pour tout $r > 0$, tout $p > 1$ et tout $\varepsilon > 0$,

$$\lambda_{p,r,\varepsilon} = \inf_{u\in C_c^\infty(B_g(0,r)),\ u\not\equiv 0} \frac{\left(\int_{B_g(0,r)}|\nabla u|_g^p\,dv_g\right)^{\frac{2}{p}} + \alpha_\varepsilon\left(\int_{B_g(0,r)}|u|^p\,dv_g\right)^{\frac{2}{p}}}{\left(\int_{B_g(0,r)}|u|^{p^*}\,dv_g\right)^{\frac{2}{p^*}}}$$

où $\alpha_\varepsilon = \frac{n}{n+2}S_g(0) + \varepsilon$. On procède par contradiction. On suppose donc qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $r > 0$,

$$\lambda_{1,r,\varepsilon_0} < K(n,1)^{-2} .$$

Comme $\limsup_{p\to 1}\lambda_{p,r,\varepsilon_0} \leqslant \lambda_{1,r,\varepsilon_0}$, on obtient pour tout $r > 0$ l'existence de $p_r > 1$ tel que

$$\lambda_{p_r,r,\varepsilon_0} < K(n,1)^{-2}\left(\frac{n-p_r}{p_r(n-1)}\right)^2 ,\ \lambda_{p_r,r,\varepsilon_0} < K(n,p_r)^{-2} . \tag{7.9}$$

On peut clairement supposer que $r \to 0$ et choisir p_r décroissant quand r décroît. Ainsi, on peut supposer qu'il existe une suite $p \to 1$ et une suite $r_p > 0$ tendant vers 0 quand p tend vers 1 telles que (7.9) soit vérifiée par $\lambda_{p,r_p,\varepsilon_0}$. La première partie de (7.9) est uniquement là pour simplifier techniquement la preuve. La deuxième partie de (7.9), par contre, est fondamentale, puisqu'elle nous assure l'existence d'un minimiseur u_p pour $\lambda_{p,r_p,\varepsilon_0}$ qui vérifie :

$$\left\{\begin{array}{l} C_p\Delta_p u_p + \alpha\|u_p\|_p^{2-p}u_p^{p-1} = \lambda_p u_p^{p^*-1} \quad \text{dans } B_g\left(0,r_p\right) \\ u_p \in C^{1,\eta}\left(B_g\left(0,r_p\right)\right) \quad \text{pour un certain } \eta > 0 \\ u_p > 0 \quad \text{in } B_g\left(0,r_p\right),\ u_p = 0 \quad \text{sur } \partial B_g\left(0,r_p\right) \\ \int_{B_g(0,r_p)} u_p^{p^*}\,dv_g = 1 \\ \lambda_p < K(n,p)^{-2},\ \lambda_p < K(n,1)^{-2}\left(\frac{n-p}{p(n-1)}\right)^2 \\ C_p = \left(\int_{B_g(0,r_p)} |\nabla u_p|_g^p\,dv_g\right)^{\frac{2-p}{p}} \end{array}\right. \tag{7.10}$$

où $\alpha = \frac{n}{n+2}S_g(0)+\varepsilon_0$. Si on note $x_p \in B_g\left(0,r_p\right)$ un point de maximum de u_p et $u_p(x_p) = \mu_p^{1-\frac{n}{p}}$, on a

$$1 = \int_{B_g(0,r_p)} u_p^{p^*}\,dv_g \leqslant \mathrm{Vol}_g\left(B_g\left(0,r_p\right)\right)\mu_p^{-n}$$

et, comme $r_p \to 0$ quand $p \to 1$, on obtient $\mu_p \to 0$ quand $p \to 1$. On a donc affaire à un phénomène de concentration (même s'il est très artificiel). Nous allons donner très rapidement un certain nombre d'estimées asymptotiques sur u_p. Les preuves de toutes ces estimées étant techniquement délicates, nous n'en donnerons aucune. Nous tenterons d'expliquer par contre comment elles permettent de conclure. On pose $\Omega_p = \mu_p^{-1}\exp_{x_p}^{-1}\left(B_g\left(0,r_p\right)\right) \subset \mathbb{R}^n$,

$$g_p(x) = \exp_{x_p}^* g\left(\mu_p x\right) \quad \text{pour } x \in \Omega_p$$

et

$$v_p(x) = \mu_p^{\frac{n}{p}-1}u_p\left(\exp_{x_p}\left(\mu_p x\right)\right) \quad \text{pour } x \in \Omega_p,\ v_p(x) = 0 \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^n\backslash\Omega_p\,.$$

Clairement, v_p vérifie

$$C_p\Delta_{p,g_p}v_p + \alpha\mu_p^2\|v_p\|_p^{2-p}v_p^{p-1} = \lambda_p v_p^{p^*-1} \quad \text{dans } \Omega_p \tag{7.11}$$

avec $v_p = 0$ sur $\partial\Omega_p$. On note également

$$\tilde{v}_p(x) = v_p(x)^{\frac{p(n-1)}{n-p}}\,.$$

On prouve ensuite que $\left(\tilde{v}_p\right)$ est une suite minimisante pour l'inégalité de Sobolev euclidienne liée à l'injection de $H_1^1\left(\mathbb{R}^n\right)$ dans $L^{\frac{n}{n-1}}\left(\mathbb{R}^n\right)$. Comme on l'a déjà fait dans les sections précédentes, bien que cela soit ici assez délicat, on montre grâce aux lemmes de concentration-compacité de P.L. Lions qu'à extraction d'une sous-suite près,

$$\lim_{p\to 1} \tilde{v}_p = \mathbf{1}_{B(0,R_0)} \quad \text{fortement dans } L^{\frac{n}{n-1}}\left(\mathbb{R}^n\right) \tag{7.12}$$

et pour toute fonction φ dans $C_c^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$,

$$\lim_{p\to 1} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \tilde{v}_p|_\xi \varphi \, dv_\xi = \int_{\partial B(0,R_0)} \varphi \, d\sigma_\xi \tag{7.13}$$

où $\mathbf{1}_{B(0,R_0)}$ est la fonction carctéristique de la boule euclidienne de centre 0 et de rayon R_0, R_0 tel que $|B(0,R_0)| = \frac{\omega_{n-1}}{n} R_0^n = 1$. En fait, pour obtenir exactement ce résultat, on a besoin de changer un petit peu x_p mais ceci n'affecte en rien la preuve. Si on pose maintenant

$$V_p(x) = \left(1 + \left(\frac{|x|}{R_0}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right)^{1-n}, \quad x \in \mathbb{R}^n ,$$

on peut également montrer que

$$\lim_{p\to 1} \int_{\mathbb{R}^n} \left|\nabla \left(\tilde{v}_p - V_p\right)\right|_\xi dv_\xi = 0 . \tag{7.14}$$

Un point très important ici est le suivant : comme $\mathbf{1}_{B(0,R_0)}$, la limite de $\tilde{v}_p$, est à support compact, on peut appliquer le schème itératif de Moser à l'équation vérifiée par v_p pour montrer que

$$\forall\, R > R_0, \lim_{p\to 1} \sup_{\Omega_p \setminus B(0,R)} \tilde{v}_p = 0 . \tag{7.15}$$

Tout ce que l'on vient de dire est sans doute la partie la plus délicate et peut être la plus importante de la preuve.

Comme dans [30], on peut transformer l'estimée intégrale (7.12) en une estimée ponctuelle faible : il existe $C > 0$ telle que pour tout $p > 1$, tout $x \in \Omega_p$,

$$|x|^{\frac{n}{p}-1} v_p(x) \leqslant C .$$

De même, en utilisant (7.15), on peut montrer que

$$\lim_{p\to 1} \sup_{\Omega_p \setminus B_{g_p}(0,R)} |x|^{\frac{n}{p}-1} v_p(x) = 0 .$$

Ici, on peut obtenir une estimée ponctuelle plus forte. Le schéma de preuve est plus ou moins le même que celui de la section 3.3. Le problème usuel avec le p-laplacien est qu'il n'existe pas ou peu de principes du maximum pour $p \neq 2$. Un principe du maximum global sur une variété du type de celui qu'on a utilisé au section 3.3, est faux pour $p \neq 2$. De plus, dans le cas $p = 2$, nous avions utilisé comme fonction de comparaison la fonction de Green du laplacien, ce à quoi il est difficile de donner un sens pour $p \neq 2$. Malgré tout, le problème ici étant un problème local, la métrique g_p ressemblant donc fortement à la métrique euclidienne sur Ω_p, on peut quand même s'en sortir et obtenir : pour tout $\nu > 0$, tout $R > R_0$, il existe $C(R,\nu)$ telle que pour tout $p \gtrsim 1$, tout $x \in \Omega_p$,

$$\left(\frac{|x|}{R}\right)^{\frac{n-p-\nu}{p-1}} v_p(x) \leqslant C(R,\nu) \ . \tag{7.16}$$

En particulier v_p tend ponctuellement vers 0 à peu près aussi vite que l'on veut en-dehors de $B(0,R_0)$.

Toutes ces relations, que l'on a jetées ici un peu en vrac (l'auteur en est bien conscient), sont nécessaires pour conclure. En particulier, une estimée faible ne suffit plus ici, contrairement à ce qui se passait dans les preuves des théorèmes 2.3 et 6.7. On va maintenant détailler un peu la conclusion de la preuve pour montrer comment toutes ces estimées entrent en jeu et comment la courbure scalaire apparaît finalement.

La conclusion est basée sur l'inégalité de Sobolev H_1^1 euclidienne que l'on applique à $\tilde{v}_p$. Pour tout $p > 1$,

$$\left(\int_{\Omega_p} \tilde{v}_p^{\frac{n}{n-1}}\, dv_\xi\right)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant K(n,1)\int_{\Omega_p} |\nabla \tilde{v}_p|_\xi \, dv_\xi \ . \tag{7.17}$$

Grâce au développement limité de Cartan de la métrique g_p autour de 0, on a

$$dv_\xi = \left(1 + \frac{\mu_p^2}{6}\,\mathrm{Ric}_g(x_p)_{ij}x^i x^j + o\left(\mu_p^2|x|^2\right)\right) dv_{g_p}$$

où Ric_g est la courbure de Ricci de g dans la carte exponentielle en x_p. Ainsi, on obtient en utilisant la normalisation de u_p (voir (7.10)) :

$$\int_{\Omega_p} \tilde{v}_p^{\frac{n}{n-1}}\, dv_\xi = 1 + \frac{\mu_p^2}{6}\,\mathrm{Ric}_g(x_p)_{ij}\int_{\Omega_p} x^i x^j \tilde{v}_p^{\frac{n}{n-1}}\, dv_{g_p} + o\left(\mu_p^2\int_{\Omega_p}|x|^2\tilde{v}_p^{\frac{n}{n-1}}\, dv_{g_p}\right) \ .$$

Avec (7.12) et (7.16), ceci donne

$$\int_{\Omega_p} \tilde{v}_p^{\frac{n}{n-1}}\, dv_\xi = 1 + \frac{S_g(0)}{6n(n+2)}\omega_{n-1}R_0^{n+2}\mu_p^2 + o\left(\mu_p^2\right) \ . \tag{7.18}$$

Grâce au développement limité de Cartan de la métrique g_p autour de 0, on a également

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_p}|\nabla\tilde{v}_p|_\xi\, dv_\xi = &\int_{\Omega_p}|\nabla\tilde{v}_p|_{g_p}\, dv_{g_p} + \frac{\mu_p^2}{6}\,\mathrm{Ric}_g\left(x_p\right)_{ij}\int_{\Omega_p}x^i x^j|\nabla\tilde{v}_p|_\xi\, dv_\xi \\ &- \frac{\mu_p^2}{6}\int_{\Omega_p}|\nabla\tilde{v}_p|_{g_p}^{-1}Rm_g\left(x_p\right)\left(\nabla\tilde{v}_p, x, x, \nabla\tilde{v}_p\right) dv_{g_p} \\ &+ o\left(\mu_p^2\int_{\Omega_p}|x|^2|\nabla\tilde{v}_p|_{g_p}\, dv_{g_p}\right) \ .\end{aligned} \tag{7.19}$$

Regardons les différents termes de cette relation. Premièrement, grâce à l'équation (7.11) vérifiée par v_p et aux relations de (7.10), on obtient

$$\int_{\Omega_p} |\nabla \tilde{v}_p|_{g_p}\, dv_{g_p} \leqslant K(n,1)^{-1}\left(1 - \alpha\mu_p^2\lambda_p^{-1}\|v_p\|_p^2\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Comme, par (7.12) et (7.16), $\|v_p\|_p = 1 + o(1)$, on a finalement

$$\int_{\Omega_p} |\nabla \tilde{v}_p|_{g_p}\, dv_{g_p} \leqslant K(n,1)^{-1} - \frac{\alpha}{2}K(n,1)\mu_p^2 + o\left(\mu_p^2\right) . \tag{7.20}$$

Indépendamment, pour tout $R > R_0$, par (7.13), on a

$$\int_{\Omega_p} |\nabla \tilde{v}_p|_\xi x^i x^j\, dv_\xi = O\left(\int_{\Omega_p\setminus B(0,R)} |x|^2|\nabla \tilde{v}_p|_\xi\, dv_\xi\right) + \int_{\partial B(0,R_0)} x^i x^j d\sigma_\xi + o(1) .$$

En utilisant l'équation vérifiée par v_p et la relation (7.16), on montre que

$$\lim_{p\to 1} \int_{\Omega_p\setminus B(0,R)} |x|^2|\nabla \tilde{v}_p|_\xi\, dv_\xi = 0$$

d'où

$$\lim_{p\to 1} \operatorname{Ric}_g\left(y_p\right)_{ij} \int_{\Omega_p} |\nabla \tilde{v}_p|_\xi x^i x^j\, dv_\xi = \frac{\omega_{n-1}}{n} R_0^{n+1} S_g(0) . \tag{7.21}$$

Enfin, comme ∇V_p et x sont des champs de vecteurs ponctuellement colinéaires, on a

$$Rm_g\left(x_p\right)\left(\nabla\tilde{v}_p, x, x, \nabla\tilde{v}_p\right) \leqslant C|x|^2|\nabla\tilde{v}_p|_\xi|\nabla\left(\tilde{v}_p - V_p\right)|_\xi$$

d'où l'on déduit grâce à (7.14) :

$$\lim_{p\to 1} \int_{\Omega_p} |\nabla \tilde{v}_p|_{g_p}^{-1} Rm_g\left(x_p\right)\left(\nabla\tilde{v}_p, x, x, \nabla\tilde{v}_p\right)\, dv_{g_p} = 0 . \tag{7.22}$$

En tout dernier lieu, moyennant un peu de travail, on peut montrer que

$$\int_{\Omega_p} |x|^2|\nabla \tilde{v}_p|_{g_p}\, dv_{g_p} = O(1) . \tag{7.23}$$

Toutes ces relations (de (7.18) à (7.23)) permettent de revenir à notre inégalité de Sobolev euclidienne de départ (7.17) pour obtenir

$$\alpha\mu_p^2 \leqslant \frac{n}{n+2} S_g(0)\mu_p^2 + o\left(\mu_p^2\right) ,$$

la contradiction désirée (rappel : $\mu_p \to 0$ et $\alpha = \frac{n}{n+2}S_g(0) + \varepsilon_0$). ◆

Avant d'en déduire le théorème 7.5, revenons un moment sur la remarque qui terminait la section 7.2.1. En quoi a-t-on obtenu un contrôle de l'erreur entre les domaines isopérimétriques de petit volume et les boules ? Notre suite (u_p) peut être vue comme une approximation de la fonction caractéristique des domaines isopérimétriques de petit volume. L'estimée (7.16) nous donne alors, de ce point de vue, un contrôle de l'erreur qu'il y a entre la fonction caractéristique d'un domaine isopérimétrique et la fonction caractéristique de la boule "correspondante". En restant dans cet esprit-là, on peut dire que la première partie de la preuve du théorème 7.1 correspond aux relations (7.12), (7.13) et (7.15). Bien entendu, tout ceci est à prendre avec des pincettes, l'analogie entre une preuve purement géométrique et une autre purement analytique ayant forcément des limites.

Pour prouver le théorème 7.5, on note Ω_V l'ouvert de M vérifiant

$$|\partial\Omega_V|_g = h(V) = \inf\left\{|\partial\Omega|_g,\ \Omega \subset M,\ |\Omega|_g = V\right\} .$$

D'après la première partie de la preuve du théorème 7.3 de Johnson-Morgan, on sait que

$$\operatorname{diam}(\Omega_V) \to 0 .$$

Ceci permet d'appliquer le théorème 7.4 à Ω_V pour V petit. Il suffit en effet de vérifier que le rayon r_x donné par le théorème 7.4 est continu en x pour avoir l'existence de $\delta > 0$ tel que tout ouvert Ω de diamètre plus petit que $\delta > 0$ vérifie l'inégalité isopérimétrique voulue.

Ces deux théorèmes montrent, s'il en était encore besoin, que dans le type de problèmes considérés dans ces notes, la courbure scalaire est la "courbure locale" par excellence. Par contre, si l'on revient à la conjecture de Cartan-Hadamard, il sera nécessaire d'utiliser l'hypothèse $K_g \leqslant 0$ pour passer des résultats locaux ci-dessus à des résultats d'ordre global. En effet, la comparaison isopérimétrique avec l'espace euclidien n'est pas vraie globalement, en général, si (M, g) vérifie seulement l'inégalité stricte $S_g < 0$.

Bibliographie

[1] R.A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, 1978.

[2] W.K. Allard, *On the first variation of a varifold*, Annals of Mathematics **95** (1972), 417–491.

[3] C.B. Allendoerfer and A. Weil, *The Gauss-Bonnet theorem for Riemannian polyhedra*, Transactions A.M.S. **53** (1943), 101–129.

[4] F. Almgren, *Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problems with constraints*, Mem. Am. Math. Soc. **165, 4** (1976).

[5] F.V. Atkinson and Peletier L.A., *Elliptic equations with nearly critical growth*, J. Diff. Eq. **70** (1987), 349–365.

[6] T. Aubin, *Equations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire*, J. Math. Pures Appl. **55** (1976), 269–296.

[7] ———, *Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev*, J. Differential Geom. **11** (1976), 573–598.

[8] T. Aubin, O. Druet, and E. Hebey, *Best constants in Sobolev inequalities for compact manifolds of nonpositive curvature*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **326** (1998), 1117–1121.

[9] T. Aubin and Y.Y. Li, *On the best Sobolev inequality*, J. Math. Pures Appl. **78** (1999), 353–387.

[10] D. Bakry, *L'hypercontractivité et son utilisation en théorie des semi-groupes*, Lectures on probability theory (Saint-Flour, 1992), Lecture Notes in Mathematics, vol. 1581, Springer, Berlin, 1994, pp. 1–114.

[11] D. Bakry and M. Ledoux, *Sobolev inequalities and Myers's diameter theorem for an abstract Markov generator*, Duke Math. J. **85** (1996), 253–270.

[12] A. Beauville, *Variétés Kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle*, J. Differential Geom. **18** (1983), 755–782.

[13] H. Berestycki, L. Nirenberg, and S. Varadhan, *The principal eigenvalue and maximum principle for second order elliptic operators in general domains*, Comm. Pure Appl. Math. **47** (1994), 47–92.

[14] M. Berger, P. Gauduchon, and E. Mazet, *Le spectre d'une variété riemannienne*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 194, Springer-Verlag, 1971.

[15] A.L. Besse, *Einstein Manifolds*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 10, Springer-Verlag, 1987.

[16] G. Bliss, *An integral inequality*, J. London Math. Soc. **5** (1930), 40–46.

[17] H. Brézis, *Elliptic equations with limiting Sobolev exponents. The impact of topology*, Comm. Pure Appl. Math. **39** (1986), 17–39.

[18] H. Brézis and L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math. **36** (1983), 437–477.

[19] H. Brézis and L.A. Peletier, *Asymptotics for elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Partial Differential Equations and the Calculus of Variations (L. Modica F. Colombini, A. Marino and S. Spagnolo, eds.), Basel, Birkhaüser, 1989.

[20] C. Brouttelande, *The best constant problem for a family of Gagliardo-Nirenberg inequalities on a compact Riemannian manifold*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh (à paraître).

[21] L.A. Caffarelli, B. Gidas, and J Spruck, *Asymptotic symmetry and local behavior of semilinear elliptic equations with critical Sobolev growth*, Comm. Pure Appl. Math. **42** (1989), 271–297.

[22] M. do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, 1992.

[23] S.Y.A. Chang and P.C. Yang, *Compactness of isospectral conformal metrics in S^3*, Comment. Math. Helv. **64** (1989), 363–374.

[24] I. Chavel, *Riemannian geometry: a modern introduction*, Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, 1993.

[25] S.S. Chern, *A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifolds*, Annals of Mathematics **45** (1944), 747–752.

[26] D. Cordero-Erausquin, B. Nazaret, and C. Villani, *A mass-transportation approach to sharp Sobolev and Gagliardo-Nirenberg inequalities*, preprint, disponible sur http://www.umpa.ens-lyon.fr/ bnazaret (2002).

[27] C.B. Croke, *A sharp four-dimensional isoperimetric inequality*, Comment. Math. Helv. **59** (1984), 187–192.

[28] Z. Djadli and O. Druet, *Extremal functions for optimal Sobolev inequalities on compact manifolds*, Calc. Var. **12** (2001), 59–84.

[29] O. Druet, *Optimal Sobolev inequalities of arbitrary order on compact Riemannian manifolds*, J. Funct. Anal. **159** (1998), 217–242.

[30] ———, *The best constants problem in Sobolev inequalities*, Math. Ann. **314** (1999), 327–346.

[31] ———, *Elliptic equations with critical Sobolev exponent in dimension 3*, Ann. I.H.P., Analyse non-linéaire **19, 2** (2002), 125–142.

[32] ———, *Inégalités de Sobolev-Poincaré en dimensions 4 et 5 et courbure scalaire négative ou nulle*, preprint (2002).

[33] ———, *Isoperimetric inequalities on compact manifolds*, Geometriae Dedicata **90** (2002), 217–236.

[34] ———, *Optimal Sobolev inequalities and extremal functions. The three-dimensional case*, Indiana Univ. Math. J. **51, 1** (2002), 69–88.

[35] ———, *Sharp local isoperimetric inequalities involving the scalar curvature*, Proc. A.M.S **130, 8** (2002), 2351–2361.

[36] O. Druet and E. Hebey, *Extremal functions for sharp Sobolev inequalities*, Prépublications de l'Université de Cergy-Pontoise (2000).

[37] ———, *Asymptotics for sharp Sobolev-Poincaré inequalities on compact Riemannian manifolds*, Adv. Diff. Eq. **7, 12** (2002), 1409–1478.

[38] ———, *The AB program in geometric analysis. Sharp Sobolev inequalities and related problems*, Memoirs of the A.M.S. (à paraître).

[39] O. Druet, E. Hebey, and F. Robert, *Blow-up theory for elliptic PDEs in Riemannian geometry*, preprint (2002).

[40] O. Druet, E. Hebey, and M. Vaugon, *Optimal Nash's inequalities on Riemannian manifolds: the influence of geometry*, I.M.R.N. **14** (1999), 735–779.

[41] ———, *Sharp Sobolev inequalities with lower order remainder terms*, Transactions A.M.S. **353** (2001), 269–289.

[42] O. Druet and F. Robert, *Asymptotic profile and blow-up estimates on compact Riemannian manifolds*, Prépublications de l'Université de Cergy-Pontoise (1999).

[43] ———, *Asymptotic profile for the sub-extremals of the sharp Sobolev inequality on the sphere*, Comm. P.D.E. **26 (5-6)** (2001), 743–778.

[44] L.C. Evans and R.F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, 1992.

[45] Z. Faget, *Best constants in Sobolev inequalities on Riemannian manifolds in the presence of symmetries*, Potential Analysis **17** (2002), 105–124.

[46] H. Federer and W.H. Fleming, *Normal and integral currents*, Ann. of Math. **72** (1960), 458–520.

[47] W.H Fleming and R. Rishel, *An integral formula for total gradient variation*, Arch. Math. **11** (1960), 218–222.

[48] E. Gagliardo, *Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili*, Ricerce Mat. **7** (1958), 102–137.

[49] S. Gallot, *Inégalités isopérimétriques et analytiques sur les variétés riemanniennes*, S. M. F., Astérisque **163-164** (1988), 31–91.

[50] S. Gallot, D. Hulin, and J. Lafontaine, *Riemannian geometry*, Universitext, Springer-Verlag, 1993.

[51] D. Gilbarg and N. Trüdinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1977.

[52] M. Gromov, *Paul Lévy's isoperimetric inequality*, preprint I.H.E.S. (1980).

[53] ———, *Partial Differential Relations*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 9, Springer-Verlag, 1986.

[54] M. Gromov and H.B. Lawson, *The classification of simply connected manifolds of positive scalar curvature*, Annals of Mathematics **111** (1980), 423–434.

[55] ———, *Spin and scalar curvature in the presence of a fundamental group*, Annals of Mathematics **111** (1980), 209–230.

[56] Z.C. Han, *Asymptotic approach to singular solutions for nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponent*, Ann. I.H.P., Analyse non-linéaire **8, 2** (1991), 159–174.

[57] E. Hebey, *Asymptotics for some quasilinear elliptic equations*, J. Diff. and Int. Eq. **9** (1996), 71–88.

[58] ———, *Sobolev spaces on Riemannian manifolds*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1635, Springer-Verlag, 1996.

[59] ———, *Introduction à l'analyse non-linéaire sur les variétés*, Fondations, Diderot Editeurs, Arts et Sciences, 1997.

[60] ______, *Fonctions extrémales pour une inégalité de Sobolev optimale dans la classe conforme de la sphère*, J. Math. Pures et Appl. **77** (1998), 721–733.

[61] ______, *Nonlinear analysis on manifolds: Sobolev spaces and inequalities*, CIMS Lecture Notes, vol. 5, Courant Institute of Mathematical Sciences, 1999.

[62] ______, *Asymptotic behavior of positive solutions of quasilinear elliptic equations with critical Sobolev growth*, J. Diff. and Int. Eq. **13** (2000), 1073–1080.

[63] ______, *Nonlinear elliptic equations of critical Sobolev growth from a dynamical viewpoint*, Preprint, disponible sur http://www.u-cergy.fr/rech/pages/hebey/index.html (2002).

[64] ______, *Sharp Sobolev-Poincaré inequalities on compact Riemannian manifolds*, Trans. A.M.S. **354** (2002), 1193–1213.

[65] ______, *Sharp Sobolev-Poincaré inequalities on compact Riemannian manifolds. notes from various lectures*, Preprint, disponible sur http://www.u-cergy.fr/rech/pages/hebey/index.html (2002).

[66] ______, *Sharp Sobolev inequalities of second order*, J. Geom. Analysis (à paraître).

[67] E. Hebey and F. Robert, *Coercivity and Struwe's compactness for Paneitz operators with constant coefficients*, Calc. Var. PDE's **13** (2001), 491–517.

[68] E. Hebey and M. Vaugon, *Meilleures constantes dans le théorème d'inclusion de Sobolev et multiplicité pour les problèmes de Nirenberg et Yamabe*, Indiana Univ. Math. J. **41** (1992), 377–407.

[69] ______, *The best constant problem in the Sobolev embedding theorem for complete Riemannian manifolds*, Duke Math. J. **79** (1995), 235–279.

[70] ______, *Meilleures constantes dans le théorème d'inclusion de Sobolev*, Ann. Inst. H. Poincaré. Anal. Non Linéaire **13** (1996), 57–93.

[71] ______, *Sobolev spaces in presence of symmetries*, J. Math. Pures Appl. **76** (1997), 859–881.

[72] ______, *From best constants to critical functions*, Math. Z. **237** (2001), 737–767.

[73] E. Heintze and H. Karcher, *A general comparison theorem with applications to volume estimates for submanifolds*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. **11** (1978), 451–470.

[74] E. Humbert, *Best constants in the L^2-Nash inequality*, Proc. Royal Soc. Edinburgh (à paraître).

[75] S. Ilias, *Constantes explicites pour les inégalités de Sobolev sur les variétés riemanniennes compactes*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **33** (1983), 151–165.

[76] D. Johnson and F. Morgan, *Some sharp isoperimetric theorems for Riemannian manifolds*, Indiana University Math. Journal **49, 3** (2000), 1017–1041.

[77] B. Kleiner, *An isoperimetric comparison theorem*, Invent. Math. **108** (1992), 37–47.

[78] M. Ledoux, *On manifolds with non-negative Ricci curvature and Sobolev inequalities*, Comm. Anal. Geom. **7** (1999), 347–353.

[79] Y.Y. Li, *Prescribing scalar curvature on S^n and related problems, part I*, Journal of Differential Equations **120** (1995), 319–420.

[80] P.L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. Part I*, Ann. Inst. H. Poincaré **1** (1984), 109–145.

[81] ______, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case. Part I*, Rev. Mat. Iberoamericano **1.1** (1985), 145–201.

[82] V.G. Maz'ja, *Sobolev Spaces*, Springer-Verlag, 1985.

[83] F. Morgan, *Geometric Measure Theory : a Beginner's Guide*, Academic Press, 1995.

[84] J. Nash, *The embedding theorem for Riemannian manifolds*, Annals of Mathematics **63** (1956), 20–63.

[85] L. Nirenberg, *On elliptic partial differential equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **13** (1959), 116–162.

[86] M. Obata, *The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds*, J. Diff. Geom. **6** (1971), 247–258.

[87] R. Osserman, *The isoperimetric inequality*, Bull. A.M.S. **84** (1978), 1183–1238.

[88] P. Petersen, *Riemannian Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 171, Springer-Verlag, New York, 1998.

[89] O. Rey, *Proof of two conjectures of H. Brézis and L.A. Peletier*, Manuscripta Mathematica **65** (1989), 19–37.

[90] F. Robert, *Asymptotic behaviour of a nonlinear elliptic equation with critical Sobolev exponent : the radial case*, Advances in Diff. Eq. **6**, **7** (2001), 821–846.

[91] R. Schoen, *Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature*, J. Diff. Geom. **20** (1984), 479–495.

[92] ———, *Variational theory for the total scalar curvature functional for Riemannian metrics and related topics*, Montecatini Notes (1987), 120–154.

[93] R. Schoen and S.T. Yau, *On the structure of manifolds with positive scalar curvature*, Manuscripta Math. **28** (1979), 159–183.

[94] R. Schoen and D. Zhang, *Prescribed scalar curvature on the n-sphere*, Calculus of Variations and PDE's **4** (1996), 1–25.

[95] S.L. Sobolev, *Sur un théorème d'analyse fonctionnelle*, Mat. Sb. (N.S.) **46** (1938), 471–496.

[96] M. Struwe, *A global compactness result for elliptic boundary value problems involving limiting nonlinearities*, Math. Z. **187** (1984), 511–517.

[97] ———, *Variational Methods*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 34, Springer, 1996.

[98] G. Talenti, *Best constants in Sobolev inequality*, Ann. Math. Pura Appl. **110** (1976), 353–372.

[99] N.S Trüdinger, *Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **22** (1968), 265–274.

[100] A. Weil, *Sur les surfaces à courbure négative*, C.R. Acad. Sci. Paris **182** (1926), 1069–1071.

[101] H. Yamabe, *On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, Osaka Math. J. **12** (1960), 21–37.

[102] W.P. Ziemer, *Weakly differentiable functions*, Graduate Text in Mathematics, 120, Springer-Verlag, 1989.

Olivier DRUET
UMPA - ENS Lyon
46, allée d'Italie
69364 LYON Cedex (France)

odruet@umpa.ens-lyon.fr