Jean-Pierre Demailly

Fonction de Green pluricomplexe et mesures pluriharmoniques

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 4 (1985-1986), p. 131-143

<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1985-1986__4__131_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
CHAMBÉRY-GRENOBLE
1985–1986 (131–143)

FONCTION DE GREEN PLURICOMPLEXE ET MESURES PLURIHARMONIQUES

par *Jean-Pierre DEMAILLY*

0. Introduction

L'objet de cet exposé est de montrer comment à un domaine pseudoconvexe Ω relativement compact dans une variété complexe on peut associer une fonction de Green généralisée, invariante par biholomorphisme. Cette fonction est définie comme la solution $u_z(\varsigma)$ du problème de Dirichlet pour l'équation de Monge-Ampère complexe $(dd^c u_z)^n = 0$ sur $\Omega \setminus \{z\}$, ayant un pôle logarithmique au point z .

On sait que le noyau de Poisson classique s'obtient comme dérivée normale au bord de la fonction de Green. Le noyau de Poisson "pluricomplexe" $d\mu_z(\varsigma)$ sera défini ici par une formule analogue, mais non linéaire:

$$d\mu_z(\varsigma) = (dd^c u_z(\varsigma))^{n-1} \wedge d^c u_z(\varsigma)_{|\partial\Omega} \quad , z \in \Omega \ , \ \varsigma \in \partial\Omega \ .$$

Ce noyau a la propriété de reproduire les fonctions pluriharmoniques à partir de leurs valeurs au bord: les mesures μ_z seront donc appelées *mesures pluriharmoniques* du domaine Ω . Sous des hypothèses de régularité convenables, les mesures μ_z sont portées par les points strictement pseudoconvexes du bord. De plus, la singularité du noyau $d\mu_z(\varsigma)$ sur la diagonale peut être calculée explicitement lorsque Ω est strictement pseudoconvexe.

Pour terminer cet exposé, nous présentons une application des idées précédentes à l'étude de la géométrie des ensembles convexes. Soit $K \subset \mathbf{R}^n$ une partie convexe compacte. Grâce à un procédé de complexification, on montre que les mesures de Monge-Ampère fournissent une formule explicite permettant de représenter les points intérieurs à K comme barycentres des points extrêmaux.

Le présent exposé est une version condensée de l'article [6], où le lecteur trouvera des démonstrations détaillées de tous les résultats mentionnés ici.

1. Mesures de Monge-Ampère

Soit X une variété analytique complexe de dimension n . On suppose donnée une fonction *plurisousharmonique* (*psh* en abrégé) *continue* et *exhaustive* $\varphi : X \to [-\infty, R[$, où $R \in]-\infty, +\infty]$. Pour tout $r \in [-\infty, R[$ on note respectivement

(1.1) $$B(r) = \{x \in X \; ; \; \varphi(x) < r\} \quad , \quad S(r) = \{x \in X \; ; \; \varphi(x) = r\}$$

les "pseudoboules" et "pseudosphères" de niveau associées à φ . Dire que φ est *exhaustive* signifie que pour tout $r < R$ l'ouvert $B(r)$ est relativement compact dans X . On supposera dans la suite que X est une *variété de Stein*, c'est-à-dire qu'il existe une fonction $\psi \in C^\infty(X)$ strictement psh et exhaustive.

Soit $J \in \mathrm{End}(TX)$ l'endomorphisme tel que $J^2 = -1$, associé à la stucture presque complexe de X . Par dualité, J opère sur l'algèbre des formes différentielles à valeurs réelles ou complexes. Sur cette algèbre, on définit l'opérateur d^c par $d^c = J^{-1} dJ$; on a classiquement

$$d^c = i(\overline{\partial} - \partial) \quad , \quad dd^c = 2i\partial\overline{\partial} \; .$$

On peut alors associer de manière naturelle à φ une collection de mesures positives $\mu_{\varphi,r}$ portées par les ensembles $S(r)$ (*cf.* [5]): lorsque $\varphi \in C^\infty(X)$ et lorsque r est valeur régulière de φ , on définit $\mu_{\varphi,r}$ comme la restriction à l'hypersurface $S(r) = \partial B(r)$ de la forme différentielle de degré $2n-1$ $(dd^c\varphi)^{n-1} \wedge d^c\varphi$. Dans le cas général où φ est continue, on peut utiliser l'opérateur de Monge-Ampère complexe $(dd^c)^n$ introduit par Bedford et Taylor [1],[2] pour calculer la mesure positive $(dd^c \max(\varphi, r))^n$; cette mesure est nulle sur $B(r)$ et coïncide avec $(dd^c\varphi)^n$ sur $X \setminus (B(r) \cup S(r))$. On pose alors

(1.2) $$\mu_{\varphi,r} = (dd^c \max(\varphi, r))^n - \mathbf{1}_{X \setminus B(r)} (dd^c\varphi)^n \; ,$$

et on vérifie que cette mesure coïncide avec la précédente si $\varphi \in C^\infty(X)$. Les mesures $\mu_{\varphi,r}$ ainsi construites vérifient la formule de Lelong-Jensen fondamentale suivante (*cf.* [5]) .

THÉORÈME 1.3. — *Toute fonction psh V sur X est $\mu_{\varphi,r}$-intégrable quel que soit $r \in]-\infty, R[$, et on a la formule*

$$\mu_{\varphi,r}(V) - \int_{B(r)} V (dd^c\varphi)^n = \int_{B(r)} (r - \varphi) dd^c V \wedge (dd^c\varphi)^{n-1} \; .$$

Démonstration. — On se contentera de vérifier la formule lorsque φ et V sont de classe C^∞ et lorsque r est valeur régulière de φ . Dans ce cas, le théorème de Stokes entraîne

$$\begin{aligned} \mu_{\varphi,r}(V) &= \int_{S(r)} V (dd^c\varphi)^{n-1} \wedge d^c\varphi = \int_{B(r)} d\big[V (dd^c\varphi)^{n-1} \wedge d^c\varphi\big] \\ &= \int_{B(r)} dV \wedge d^c\varphi \wedge (dd^c\varphi)^{n-1} + V (dd^c\varphi)^n \; . \end{aligned}$$

Comme $(dV \wedge d^c\varphi)^{1,1} = i(\partial V \wedge \overline{\partial}\varphi + \partial\varphi \wedge \overline{\partial}V) = (d\varphi \wedge d^cV)^{1,1}$, il vient

$$\begin{aligned} dV \wedge d^c\varphi \wedge (dd^c\varphi)^{n-1} &= d\varphi \wedge d^cV \wedge (dd^c\varphi)^{n-1} \\ &= (r-\varphi)dd^cV \wedge (dd^c\varphi)^{n-1} - d\big[(r-\varphi)d^cV \wedge (dd^c\varphi)^{n-1}\big] . \end{aligned}$$

On applique maintenant le théorème de Stokes pour voir que

$$\int_{B(r)} d\big[(r-\varphi)d^cV \wedge (dd^c\varphi)^{n-1}\big] = 0 ,$$

et la formule cherchée s'ensuit. ∎

2. Cas d'un ouvert hyperconvexes

Soit $\Omega \subset\subset X$ un ouvert pseudoconvexe relativement compact dans la variété de Stein X . On suppose que Ω est *hyperconvexe*, c'est-à-dire par définition qu'il existe une fonction $\varphi : \Omega \to [-\infty, 0[$ psh continue et exhaustive. Bien que cette hypothèse relève de la géométrie complexe du domaine, c'est en un certain sens une hypothèse de régularité sur la frontière $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$; Kerzman et Rosay [8] ont montré en particulier que tout domaine faiblement pseudoconvexe à bord de classe C^1 est hyperconvexe.

D'après le paragraphe 1, on peut associer à φ une collection de mesures positives $\mu_{\varphi,r}$ portées par les pseudosphères $S(r)$, $r < 0$. Le théorème 1.3 appliqué avec $V \equiv 1$ donne

$$\|\mu_{\varphi,r}\| = \mu_{\varphi,r}(1) = \int_{B(r)} (dd^c\varphi)^n . \tag{2.1}$$

THÉORÈME 2.2. — *On suppose que la masse de Monge-Ampère totale de φ sur Ω est finie, i.e.*

$$\int_{\Omega} (dd^c\varphi)^n < +\infty .$$

Alors les mesures $\mu_{\varphi,r}$ convergent faiblement quand r tend vers 0 vers une mesure positive μ_φ portée par $\partial\Omega$, de masse totale $\int_\Omega (dd^c\varphi)^n$.

Démonstration. — Grâce à (2.1), il suffit de prouver que l'expression $r \mapsto \mu_{\varphi,r}(h)$ a une limite pour toute fonction $h \in C^2(X,\mathbb{R})$. C'est le cas si h est psh ≥ 0 sur Ω , car dans ce cas le théorème 1.3 montre que la fonction $r \mapsto \mu_{\varphi,r}(h)$ est croissante sur $]-\infty, 0[$, et elle est bornée d'après (2.1). La conclusion résulte maintenant du fait trivial que sur une variété de Stein toute fonction de classe C^2 est différence de deux fonctions psh > 0 de classe C^2 . ∎

L'un des outils fondamentaux dont nous disposons pour l'étude des mesures μ_φ est le théorème de comparaison suivant. Nous ne donnerons pas la démonstration, car celle-ci repose sur des estimations de masse assez délicates pour les mesures de Monge-Ampère au voisinage du bord.

THÉORÈME 2.3. — *Soit φ comme ci-dessus, avec $\int_\Omega (dd^c\varphi)^n < +\infty$. Soit $\psi : \Omega \to [-\infty, 0[$ une autre fonction psh continue exhaustive. On suppose que pour tout $a \in \partial\Omega$ la fonction ψ vérifie*

$$\lambda(a) := \limsup_{\Omega \ni z \to a} \frac{\psi(z)}{\varphi(z)} < +\infty .$$

Alors on a les inégalités

$$\int_\Omega (dd^c\psi)^n \leq (\max_{\partial\Omega} \lambda)^n \int_\Omega (dd^c\varphi)^n , \tag{2.4}$$

$$d\mu_\psi(\varsigma) \leq \lambda(\varsigma)^n d\mu_\varphi(\varsigma) \quad \text{sur} \quad \partial\Omega . \tag{2.5}$$

3. Fonction de Green pluricomplexe

Soit $\Omega \subset\subset X$ un domaine faiblement pseudoconvexe. Dans le but de généraliser la fonction de Green habituelle en plusieurs variables complexes, on considère un problème de Dirichlet relatif à l'opérateur de Monge-Ampère complexe: soit $z \in \Omega$ un point fixé; peut-on trouver une fonction continue $u_z : \overline{\Omega} \to [-\infty, 0]$ psh sur Ω , vérifiant les propriétés

$$\begin{cases} u_{z|\partial\Omega} = 0 \\ (dd^c u_z)^n = 0 \quad \text{sur} \quad \Omega \setminus \{z\} \\ u_z(\varsigma) = \operatorname{Log} |\varsigma - z| + O(1) \quad \text{quand} \quad \varsigma \to z \ ? \end{cases} \tag{3.1}$$

Une condition nécessaire évidente pour l'existence de la solution u_z est que l'ouvert Ω soit hyperconvexe. Inversement, cette condition est suffisante, et on a le résultat suivant, qui précise le théorème 1.6 de Klimek [9].

THÉORÈME 3.2. — *Soit $\Omega \subset\subset X$ un ouvert hyperconvexe. Alors le problème de Dirichlet (3.1) admet une solution u_z unique. De plus, u_z vérifie $(dd^c u_z)^n = (2\pi)^n \delta_z$, et la fonction u_Ω définie par $u_\Omega(z, \varsigma) = u_z(\varsigma)$ est continue sur $\Omega \times \overline{\Omega}$. On dira que u_Ω est la fonction de Green pluricomplexe du domaine Ω .*

Lorsque Ω est un ouvert strictement convexe de classe C^∞ dans $\mathbf{C}^n$, le résultat précédent est dû à L. Lempert [10]. La méthode de Lempert consiste à étudier les disques holomorphes extrêmaux de Ω passant par le point z . On obtient alors un feuilletage de Ω par des disques (avec singularité en z), et les fonctions de Green des feuilles se raccordent en une fonction u_z qui est la solution cherchée. Dans cette situation, L. Lempert a montré que la fonction u_Ω est symétrique en ses deux arguments (il suffit d'observer que la fonction de Green du disque est symétrique!)

Dans le cas général, nous avons dû utiliser une méthode différente, inspirée de Bedford–Taylor [1], [2] et J. Siciak [14], [15]. La solution u_z est alors définie comme la fonction extrêmale

$$u_z(\varsigma) = \sup_v\{v(\varsigma)\} \tag{3.3}$$

où v décrit l'ensemble des fonctions psh ≤ 0 sur Ω telles que

$$v(\varsigma) \leq \operatorname{Log}|\varsigma - z| + O(1)$$

quand $\varsigma \to z$; l'idée initiale de cette méthode est due à Perron [12] si $n = 1$ et à Bremermann [3] en plusieurs variables. Le fait que u_z vérifie dans ce cas l'équation $(dd^c u_z)^n = 0$ sur $\Omega \setminus \{z\}$ provient de ce que la solution du problème de Dirichlet pour l'opérateur $(dd^c)^n$ est intuitivement la fonction psh qui a le moins possible de convexité. Cette méthode ne donne malheureusement pas la régularité de la solution u_z, et nous ne savons pas non plus en général si u_Ω est symétrique.

Une propriété fondamentale de la fonction u_Ω est son invariance par biholomorphisme. Plus généralement, on a le

THÉORÈME 3.4. — *Soit $\Omega' \subset\subset X'$ un ouvert hyperconvexe dans une variété de Stein X' de dimension n', et $F : \Omega \to \Omega'$ une application holomorphe. Alors pour tous $z, \varsigma \in \Omega$ on a*

$$u_\Omega(z,\varsigma) \geq u_{\Omega'}(F(z), F(\varsigma)) .$$

Démonstration. — Soit $v(\varsigma) = u_{\Omega'}(F(z), F(\varsigma))$. Alors

$$v(\varsigma) = \operatorname{Log}|F(\varsigma) - F(z)| + O(1) \leq \operatorname{Log}|\varsigma - z| + O(1) ,$$

et v est psh ≤ 0 sur Ω. Par suite v est l'une des fonctions de l'enveloppe supérieure (3.3), d'où $u_\Omega(z,\varsigma) \geq v(\varsigma)$. ∎

4. Mesures pluriharmoniques et noyau de Green pluricomplexe

Soit Ω un ouvert hyperconvexe connexe. Nous pouvons appliquer le procédé de construction des mesures $\mu_{\varphi,r}$ à la fonction $\varphi = \frac{1}{2\pi} u_z$. Le théorème 2.2 fournit alors sur $\partial\Omega$ une mesure positive $\mu_z = (2\pi)^{-n}\mu_{u_z}$, et comme $(dd^c\varphi)^n = \delta_z$, la masse totale de μ_z est égale à 1. En passant à la limite quand r tend vers 0 , le théorème 1.3 implique la formule suivante: pour toute fonction psh $V \in C^0(\overline{\Omega})$, on a

$$\mu_z(V) = V(z) + \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\varsigma \in \Omega} |u_z(\varsigma)| dd^c V \wedge (dd^c u_z)^{n-1} . \tag{4.1}$$

Ceci entraîne en particulier $\mu_z(V) \geq V(z)$. Si V est pluriharmonique (*i.e.* si $dd^c V = 0$) on a de plus $\mu_z(V) = V(z)$. On voit donc que les mesures μ_z reproduisent les fonctions pluriharmoniques à partir de leurs valeurs sur $\partial\Omega$.

DÉFINITION 4.2. — *On dira que μ_z est la mesure pluriharmonique attachée au point z et que $|u_z|(dd^c u_z)^{n-1}$ est le noyau de Green pluricomplexe du domaine Ω .*

Il est clair que ces objets sont invariants par toute application biholomorphe $F : \Omega \to \Omega'$ bicontinue jusqu'au bord; les mesures μ_z vérifient d'autre part l'inégalité de Harnack suivante.

THÉORÈME 4.3. — *Pour tous $x, y \in \Omega$ on pose*

$$\delta_\Omega(x, y) = \limsup_{\varsigma \to \partial\Omega} |\mathrm{Log}\,(u_x(\varsigma)/u_y(\varsigma))| .$$

Alors δ_Ω est une distance compatible avec la topologie standard de Ω , invariante par les automorphismes analytiques de Ω . De plus, pour tous $x, y \in \Omega$ on a

$$e^{-n\delta_\Omega(x,y)}\mu_x \leq \mu_y \leq e^{n\delta_\Omega(x,y)}\mu_x .$$

Démonstration. — Il est clair que $\delta_\Omega(x, y) = \delta_\Omega(y, x)$ et que δ_Ω satisfait l'inégalité triangulaire. Nous admettrons que δ_Ω est finie et continue sur $\Omega \times \Omega$ (ceci se démontre à partir de la formule (3.3) en vérifiant que u_z dépend continûment de z). Par définition de δ_Ω , on a

$$\limsup_{\varsigma \to \partial\Omega} \frac{u_y(\varsigma)}{u_x(\varsigma)} \leq e^{\delta_\Omega(x,y)} .$$

Le théorème 3.8 entraîne alors l'inégalité $\mu_y \leq e^{n\delta_\Omega(x,y)}\mu_x$, et de même $\mu_x \leq e^{n\delta_\Omega(x,y)}\mu_y$. Il reste à vérifier que δ_Ω est séparée; or $\delta_\Omega(x, y) = 0$ implique $\mu_x = \mu_y$, par suite $x = y$ puisque les fonctions pluriharmoniques séparent les points de X (la variété X est supposée de Stein). ∎

Exemple 4.4. — Dans le cas où Ω est la boule unité $\mathbf{B}$ de $\mathbf{C}^n$, on vérifie aisément les formules suivantes:

$$u_{\mathbf{B}}(z, \varsigma) = \frac{1}{2} \mathrm{Log} \left(1 - \frac{(1 - |z|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - \varsigma.\overline{z}|^2}\right) ,$$

$$d\mu_z(\varsigma) = \frac{(1 - |z|^2)^n}{|1 - \varsigma.\overline{z}|^{2n}} d\sigma(\varsigma) ,$$

où σ est la mesure d'aire normalisée sur la sphère $\partial\mathrm{B}$. Le noyau $d\mu_z(\varsigma)$ est donc précisément le noyau de Poisson relatif au laplacien invariant de la boule. On vérifie également dans ce cas que la distance δ_{B} coïncide (au facteur 2 près) avec les distances de Carathéodory et de Kobayashi c_{B} et k_{B} . De façon précise, on a $\frac{1}{2}\delta_{\mathrm{B}} = c_{\mathrm{B}} = k_{\mathrm{B}}$, où

$$c_{\mathrm{B}}(x,y) = k_{\mathrm{B}}(x,y) = \operatorname{Arg\,tanh}\left(1 - \frac{(1-|x|^2)(1-|y|^2)}{|1-x.\overline{y}|^2}\right)^{1/2} .$$

5. Support des mesures pluriharmoniques

On suppose ici que $\Omega \subset\subset X$ est un ouvert faiblement pseudoconvexe de classe C^k , $k \geq 2$. D'après Diederich-Fornaess [7], on sait qu'il existe un réel $\alpha \in]0,1]$ et une fonction $\rho \in C^k(\overline{\Omega})$ telle que $\rho = 0$ et $d\rho \neq 0$ sur $\partial\Omega$, $\rho < 0$ et $-|\rho|^\alpha$ psh sur Ω . La forme de Levi $dd^c\rho$ est ≥ 0 sur l'espace holomorphe tangent $HT(\partial\Omega)$, par conséquent $(dd^c\rho)^{n-1} \wedge d^c\rho$ est une $(2n-1)$-forme ≥ 0 sur $\partial\Omega$, nulle en dehors des point strictement pseudoconvexes. Il est donc naturel de se demander si les mesures pluriharmoniques μ_z sont portées par les points strictement pseudoconvexes de $\partial\Omega$. C'est le cas sous des hypothèses convenables sur la fonction de définition ρ du domaine.

THÉORÈME 5.1. — *On suppose Ω de classe C^2 et ρ psh sur Ω . Alors pour tout $z \in \Omega$, il existe des constantes C_1 , $C_2 > 0$ telles que*

$$C_1(dd^c\rho)^{n-1} \wedge d^c\rho \leq \mu_z \leq C_2(dd^c\rho)^{n-1} \wedge d^c\rho .$$

En particulier, μ_z est portée par l'ouvert de $\partial\Omega$ formé des points strictement pseudoconvexes.

Démonstration. — D'après le théorème 2.3, il suffit de montrer l'existence de constantes C_3 , $C_4 > 0$ telles que $C_3\rho \leq \mu_z \leq C_4\rho$ au voisinage de $\partial\Omega$. La majoration résulte classiquement de l'inégalité de moyenne appliquée à u_z sur des disques tangents à $\partial\Omega$, de rayon fixé assez petit. Démontrons donc la minoration $u_z \geq C_3\rho$; cette inégalité suffit d'ailleurs pour obtenir la conclusion recherchée sur le support de μ_z . La variété X étant supposée plongée dans $\mathbf{C}^N$, notons $R = \sup_{\varsigma\in\Omega} |\varsigma - z|$, et soit $r < R$ assez petit pour que la boule $\{|\varsigma - z| \leq r\}$ soit relativement compacte dans Ω . On pose alors

$$\begin{cases} v(\varsigma) = \max\left(C\rho(\varsigma), \operatorname{Log}(|\varsigma - z|/R)\right) & \text{si} \quad |\varsigma - z| > r , \\ v(\varsigma) = \operatorname{Log}(|\varsigma - z|/R) & \text{si} \quad |\varsigma - z| \leq r , \end{cases}$$

où la constante $C > 0$ est choisie assez grande pour que $C\rho(\varsigma) < \operatorname{Log}(r/R)$ sur $\{|\varsigma - z| = r\}$. Alors v est psh ≤ 0 sur Ω avec un pôle logarithmique au point z , donc $v \leq u_z$ d'après (3.3). En particulier, on a $u_z \geq C\rho$ au voisinage de $\partial\Omega$. ■

On peut également obtenir des renseignements sur le support de μ_z sous des hypothèses moins restrictives applicables pour $\alpha < 1$.

THÉORÈME 5.2. — *On suppose Ω de classe C^3 et $-|\rho|^\alpha$ psh sur Ω . Si q est un entier, on note $U(q) \subset \partial\Omega$ l'ouvert des points où la forme de Levi est de rang $\geq q$. Alors pour tout $z \in \Omega$ on a*

$$\operatorname{Supp} \mu_z \subset \overline{U(q)} ,$$

où q est le plus grand entier $< n\alpha$.

6. Comportement des mesures μ_z lorsque z tend vers le bord

Nous étudions ici la convergence des mesures μ_z lorsque z tend vers un point $a \in \partial\Omega$. Dans le cas des mesures harmoniques usuelles, on sait que μ_z converge vers la mesure de Dirac au point a . L'exemple d'un domaine Ω ayant un ouvert $\subset \partial\Omega$ où la forme de Levi est nulle montre que ce n'est pas toujours le cas dans la présente situation. Rappelons d'abord quelques définitions classiques.

DÉFINITION 6.1. — *On dira qu'un compact $K \subset \partial\Omega$ est pic (relativement aux fonctions psh continues) s'il existe $V \in C^0(\overline{\Omega})$ psh sur Ω , telle que $V = 0$ sur K et $V < 0$ sur $\overline{\Omega} \setminus K$.*

Il est facile de voir que toute intersection d'ensembles pics est pic; la définition suivante est donc légitime.

DÉFINITION 6.2. — *Si K est une partie compacte de $\partial\Omega$, on appelle enveloppe pic de K le compact $\widehat{K}$, intersection des ensembles pics contenant K .*

THÉORÈME 6.3. — *Lorsque z tend vers $a \in \partial\Omega$, la mesure μ_z converge faiblement vers 0 sur $\partial\Omega \setminus \widehat{\{a\}}$. Par conséquent μ_z converge vers δ_a dès que $\widehat{\{a\}} = \{a\}$, en particulier dès que a est un point strictement pseudoconvexe de classe C^2 de Ω .*

Démonstration. — Par hypothèse, il existe une fonction psh V égale à 0 sur $\widehat{\{a\}}$ et < 0 sur $\overline{\Omega} \setminus \widehat{\{a\}}$. On a

$$V(z) \leq \mu_z(V) \leq 0 ,$$

et $V(z)$ tend vers $V(a) = 0$ quand z tend vers a . Ceci entraîne bien que μ_z converge faiblement vers 0 sur $\partial\Omega \setminus \widehat{\{a\}}$. ■

Dans le cas où Ω est strictement pseudoconvexe, le comportement asymptotique de $d\mu_z(\varsigma)$ au voisinage de la diagonale dans $\Omega \times \partial\Omega$ peut être décrit de manière beaucoup plus précise.

THÉORÈME 6.4. — *On suppose que Ω est strictement pseudoconvexe de classe C^2 . Soit $\rho \in C^2(\overline{\Omega})$ une fonction d'exhaustion strictement psh < 0 sur Ω . Pour tout $z \in \Omega$, on définit une mesure positive ν_z sur $\partial\Omega$ en posant*

$$d\nu_z(\varsigma) = \frac{1}{(4\pi)^n} \frac{|\rho(z)|^n}{|J_\varsigma^{2,0}\rho(z)|^{2n}} (dd^c\rho_\varsigma)^{n-1} \wedge d^c\rho_\varsigma \ , \ \varsigma \in \partial\Omega \ ,$$

où $J_\varsigma^{2,0}\rho(z)$ désigne la partie holomorphe du jet d'ordre 2 de $\rho(z)$ au point $z = \varsigma$:

$$J_\varsigma^{2,0}\rho(z) = \sum_j \frac{\partial\rho}{\partial\varsigma_j}(z_j - \varsigma_j) + \frac{1}{2}\sum_{j,k} \frac{\partial^2\rho}{\partial\varsigma_j\partial\varsigma_k}(z_j - \varsigma_j)(z_k - \varsigma_k) \ .$$

Alors pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $A \geq 1$ il existe un réel $\eta = \eta(\varepsilon, A) > 0$ tel que pour $|\rho(z)| < \eta$ et $|\varsigma - z| < A|\rho(z)|^{\frac{1}{2}}$ on ait

$$(1-\varepsilon)d\nu_z(\varsigma) \leq d\mu_z(\varsigma) \leq (1+\varepsilon)d\nu_z(\varsigma) \ .$$

Dans le cas de la boule, on peut choisir $\rho_{\mathbf{B}}(z) = |z|^2 - 1$, de sorte que

$$J_\varsigma^{2,0}\rho_{\mathbf{B}}(z) = \overline{\varsigma}.(z-\varsigma) = \overline{\varsigma}.z - 1 \quad , \quad \forall\varsigma \in \partial\mathbf{B} \ ;$$

d'après l'exemple 4.4 on a donc exactement $\mu_z = \nu_z$. Le cas d'un domaine Ω quelconque s'obtient à l'aide d'un encadrement de Ω par des boules osculatrices intérieures et extérieures; l'estimation finale se démontre alors par un usage combiné des théorèmes 2.3 et 3.4.

7. Mesures canoniques sur les points extrêmaux d'une partie convexe compacte de $\mathbf{R}^n$

Soit $K \subset \mathbf{R}^n$ une partie convexe compacte d'intérieur $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$. L'objectif de ce paragraphe est de montrer que les mesures de Monge-Ampère fournissent une formule *explicite* permettant de représenter tout point de $\overset{\circ}{K}$ comme barycentre d'une mesure positive portée par les points extrêmaux de K (*cf.* théorème de Choquet [4] , [13]).

Soit $x \in \overset{\circ}{K}$ un point fixé. On associe à x la fonction *jauge* p_x définie sur $\mathbf{R}^n$ par

$$p_x(\xi) = \inf\{\lambda > 0 \ ; \ x + \frac{1}{\lambda}(\xi - x) \in K\} \quad , \quad \xi \in \mathbf{R}^n \ .$$

La fonction p_x est convexe sur $\mathbf{R}^n$, positivement homogène de degré 1 relativement au pôle x et on a $p_x|_{\partial K} = 1$. On introduit maintenant l'espace de Stein

$$X = (\mathbf{C}/i\,\mathbf{Z})^n \simeq \mathbf{R}^n + i\,\mathbf{T}^n$$

où $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, qu'on considère comme une complexification de $\mathbf{R}^n$. On introduit également l'ouvert

$$\Omega = \overset{\circ}{K} + i\,\mathbf{T}^n \ ;$$

Ω est un ouvert pseudoconvexe relativement compact dans X (on notera que Ω n'aurait pas été relativement compact si on avait pris $X = \mathbf{C}^n$ et $\Omega = \overset{\circ}{K} + i\,\mathbf{R}^n$) . On définit maintenant une fonction psh continue $\widetilde{p}_x$ sur X en posant

$$\widetilde{p}_x(\varsigma) = p_x(\xi) \quad \text{où} \quad \varsigma = \xi + i\,\eta \ , \ \xi \in \mathbf{R}^n \ , \ \eta \in \mathbf{T}^n \ ,$$

de sorte que $\Omega = \{\varsigma \in X \ ; \ \widetilde{p}_x(\varsigma) < 1\}$.

PROPOSITION 7.1. — *On a* $(dd^c\widetilde{p}_x)^n = 0$ *sur* $X \setminus (x + i\,\mathbf{T}^n)$.

Démonstration. — Il suffit, après régularisation, de vérifier le résultat lorsque K est de classe C^2 . Dans ce cas $p_x \in C^2(X \setminus (x + i\,\mathbf{T}^n))$, et on a les formules

$$\text{(7.2)} \qquad \begin{cases} d^c\widetilde{p}_x = \displaystyle\sum_{1 \le k \le n} \frac{\partial p_x}{\partial \xi_k} d\eta_k \ , \\ dd^c\widetilde{p}_x = \displaystyle\sum_{1 \le j,k \le n} \frac{\partial^2 p_x}{\partial \xi_j \partial \xi_k} d\xi_j \wedge d\eta_k \ , \end{cases}$$

$$\text{(7.3)} \qquad (dd^c\widetilde{p}_x)^n = n! \det\Big(\frac{\partial^2 p_x}{\partial \xi_j \partial \xi_k}\Big)\, d\xi_1 \wedge d\eta_1 \wedge \ldots \wedge d\xi_n \wedge d\eta_n \ .$$

Or p_x est linéaire sur la demi-droite affine $x + \mathbf{R}_+ \cdot (\xi - x)$, donc $\xi - x$ est dans le noyau de la matrice $(\partial^2 p_x / \partial \xi_j \partial \xi_k)$; par suite $\det(\partial^2 p_x / \partial \xi_j \partial \xi_k) = 0$ pour $\xi \neq x$. ∎

Comme $\widetilde{p}_x$ est invariante par les translations de $\mathbf{T}^n$, il en est de même pour la mesure $(dd^c\widetilde{p}_x)^n$. On voit donc qu'il existe une constante $C = C(x, K) > 0$ telle que

$$\text{(7.4)} \qquad (dd^c\widetilde{p}_x)^n = C.\delta_x \otimes \sigma \ ,$$

où δ_x est la mesure de Dirac au point x sur $\mathbf{R}^n$ et σ la mesure d'aire invariante sur $\mathbf{T}^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$. D'après le §1, on peut associer à $\widetilde{p}_x$ la mesure de Monge-Ampère

$$\text{(7.5)} \qquad \widetilde{\nu}_x = \mu_{\widetilde{p}_x, 1} = \big(dd^c \max(\widetilde{p}_x, 1)\big)^n \ ,$$

qui est portée par $\partial\Omega = \partial K + i\,\mathbf{T}^n$. D'après (2.1) on a

$$\|\widetilde{\nu}_x\| = \int_\Omega (dd^c\widetilde{p}_x)^n = C \ ;$$

comme $\widetilde{\nu}_x$ est elle aussi invariante par les translations de $\mathbf{T}^n$, on voit qu'il existe une mesure $\nu_x \ge 0$ sur ∂K telle que $\widetilde{\nu}_x = \nu_x \otimes \sigma$ et $C = \nu_x(\partial K)$. Pour toute fonction psh $V(\varsigma) = V(\xi + i\eta)$ sur X , la formule de Lelong-Jensen 1.3 s'écrit maintenant

$$\begin{aligned}\int_{(\xi,\eta)\in\partial K\times\mathbf{T}^n} & V(\xi+i\eta)\,d\nu_x(\xi)\,d\sigma(\eta)\\ &= \nu_x(\partial K)\int_{\eta\in\mathbf{T}^n} V(x+i\eta)\,d\sigma(\eta) + \int_\Omega \big(1-\widetilde{p}_x(\varsigma)\big)\,dd^cV\wedge(dd^c\widetilde{p}_x)^{n-1}\,.\end{aligned}$$

Choisissons en particulier pour V une fonction affine de ξ , indépendante de η . Nous obtenons

$$\nu_x(V) = \nu_x(\partial K).V(x)$$

quelle que soit V affine, d'où :

THÉORÈME 7.6. — *Le point x est barycentre de la mesure de probabilité*

$$m_x := \big(\nu_x(\partial K)\big)^{-1}\,\nu_x\,.$$

Lorsque K est de classe C^2 , on a $\widetilde{\nu}_x = (dd^c\widetilde{p}_x)^{n-1}\wedge d^c\widetilde{p}_x$, et les formules (7.2) donnent $\widetilde{\nu}_x = \nu_x\otimes(d\eta_1\wedge\ldots\wedge d\eta_n)$ avec

$$(7.7)\qquad \begin{cases} d\nu_x(\xi) = (n-1)!\,\sum_{l=1}^{n}(-1)^{l-1}\Delta_l(x,\xi)d\xi_1\wedge\ldots\ \widehat{d\xi_l}\ \ldots\wedge d\xi_n\,,\\ \Delta_l(x,\xi) = \det\Big(\dfrac{\partial^2 p_x}{\partial\xi_j\partial\xi_1},\ldots,\dfrac{\partial^2 p_x}{\partial\xi_j\partial\xi_{l-1}},\dfrac{\partial p_x}{\partial\xi_j},\ldots,\dfrac{\partial^2 p_x}{\partial\xi_j\partial\xi_n}\Big)\,.\end{cases}$$

Dans ce cas, on sait que $\widetilde{\nu}_x$ est portée par l'ensemble des points strictement pseudoconvexes de $\partial\Omega$; par conséquent ν_x est portée par l'ensemble des points strictement convexes de ∂K . Lorsque K est quelconque, on peut utiliser des procédés de régularisation pour en déduire le théorème de support suivant.

THÉORÈME 7.8. — *Les mesures ν_x sont portées par l'ensemble $E(K)$ des points extrêmaux de K .*

Signalons pour terminer que les mesures ν_x admettent une interprétation géométrique simple. Grâce à la transformation par polaires de centre x , on associe à K le convexe dual

$$K_x^* = \{y'\in(\mathbf{R}^n)^*\ ;\ \forall\xi\in K\ ,\ y'.(\xi-x)\le 1\}\ ;$$

K_x^* est une partie convexe compacte de $(\mathbf{R}^n)^*$ contenant 0 en son intérieur. Si A est une partie de ∂K , on note A_x^* l'ensemble des formes linéaires $y'\in\partial K_x^*$ telles que $H = \{y\ ;\ y'.(y-x) = 1\}$ soit un hyperplan d'appui en un point $\xi\in A$. On définit enfin une mesure positive θ sur ∂K_x^* en posant

$$\theta(A') = \mathrm{Vol}\,\big([0,1].A'\big)$$

pour toute partie borélienne $A' \subset \partial K_x^*$, où Vol est le volume calculé relativement à la mesure de Lebesgue de $(\mathbf{R}^n)^*$.

THÉORÈME 7.9. — *La mesure ν_x est donnée par*

$$\nu_x(A) = n!\,\theta(A_x^*)$$

pour toute partie borélienne $A \subset \partial K$.

Démonstration. — Lorsque K est strictement convexe de classe C^2 ,la vérification est presque immédiate. L'hyperplan tangent en un point $\xi \in \partial K$ s'écrit en effet $\{y \in \mathbf{R}^n \,;\, dp_x(\xi).(y-x) = 1\}$, donc la transformation par polaires est donnée ici par le C^1-difféomorphisme $\xi \mapsto dp_x(\xi)$ de ∂K sur ∂K_x^* . Comme la mesure de volume radial sur ∂K_x^* est induite par la forme différentielle

$$\theta = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}(-1)^{l-1} y_l'\, dy_1' \wedge \ldots \widehat{dy_l'} \ldots \wedge dy_n' \,,$$

la formule (7.7) entraîne aussitôt que $\nu_x = n!\,(dp_x)^*\theta$. ∎

Bibliographie

[1] E. BEDFORD and B.A. TAYLOR. — *The Dirichlet problem for the complex Monge-Ampère equation*, Invent. Math., **37** (1976), 1–44.

[2] E. BEDFORD and B.A. TAYLOR. — *A new capacity for plurisubharmonic functions*, Acta Math., **149** (1982), 1–41.

[3] H. BREMERMANN. — *On a generalised Dirichlet problem for plurisubharmonic functions. Characterization of Šilov boundaries*, Trans. Amer. Math. Soc., **91** (1959), 246–276.

[4] G. CHOQUET. — *Existence et unicité des représentations intégrales au moyen des points extrêmaux dans les cônes convexes*, Sém. Bourbaki, exposé n° 139, 15 p. (Déc. 1956).

[5] J.-P. DEMAILLY. — *Mesures de Monge-Ampère et caractérisation géométrique des variétés algébriques affines*, mémoire (nouvelle série) n° 19, Soc. Math. de France, 1985.

[6] J.-P. DEMAILLY. — *Mesures de Monge-Ampère et mesures pluriharmoniques*, Prépublication n° 58, Univ. de Grenoble I, Institut Fourier, 1986.

[7] K. DIEDERICH and J.E. FORNAESS. — *Pseudoconvex domains : bounded strictly plurisubharmonic functions*, Invent. Math., **39** (1977), 129–141.

[8] N. KERZMAN and J.-P. ROSAY. — *Fonctions plurisousharmoniques d'exhaustion bornées et domaines taut*, Math. Ann., **257** (1981), 171–184.

[9] M. KLIMEK. — *Extremal plurisubharmonic functions and invariant pseudodistances*, Bull. Soc. Math. France, **113** (1985), 123–142.

[10] L. LEMPERT. — *La métrique de Kobayashi et la représentation des domaines sur la boule*, Bull. Soc. Math. France, **109** (1981), 427–474.

[11] L. LEMPERT. — *Solving the degenerate Monge-Ampère equation with one concentrated singularity*, Math. Ann., **263** (1983), 515–532.

[12] O. PERRON. — *Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgabe für $\Delta u = 0$*, Math. Z., **18** (1923), 42–54.

[13] R. PHELPS. — *Lectures on Choquet's theorem*, Van Nostrand Math. Studies n° 7, Princeton, New Jersey, 1966.

[14] J. SICIAK. — *On some extremal functions and their applications in the theory of analytic functions of several complex variables*, Trans. Amer. Math. Soc., **105** (1962), 322–357.

[15] J. SICIAK. — *Extremal plurisubharmonic functions in $\mathbf{C}^n$*, Ann. Polon. Math., **39** (1981), 175–211.