Institut Fourier — Université de Grenoble I

Actes du séminaire de

Théorie spectrale et géométrie

Rizos Sklinos

Déviation et complexe des courbes

Volume 32 (2014-2015), p. 163-167.

<http://tsg.cedram.org/item?id=TSG_2014-2015__32__163_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
Volume 32 (2014-2015) 163-167

DÉVIATION ET COMPLEXE DES COURBES

Rizos Sklinos

RÉSUMÉ. — Dans cette exposition nous présentons les interactions profondes entre deux disciplines a priori éloignées: la théorie des modèles et la théorie géométrique des groupes. Nous expliquons comment utiliser le complexe des courbes afin de comprendre la notion de déviation. Cette exposition illustre l'article de Perin–Sklinos [6].

1. Introduction

Cette exposition se concentre sur la théorie des modèles et ses interactions avec la théorie géométrique des groupes. Le sujet a suscité beaucoup d'intérêt après que Sela [8] et Kharlampovich–Myasnikov [2] ont prouvé que tous les groupes libres non abéliens ont la même théorie du premier ordre. De plus, Sela a montré, en utilisant des techniques géométriques, que cette théorie est stable [9]. Son résultat s'étend aussi aux groupes hyperboliques sans torsion.

La notion de stabilité a joué un rôle crucial dans le programme de classification de Shelah [10] et a dominé la théorie des modèles pendant de nombreuses années. Une théorie stable est considérée comme sympathique et la stabilité nous donne les outils qui rendent possible l'étude plus poussée de telles théories. En gros,

DÉFINITION 1.1 (Informelle). — *Une théorie du premier ordre est stable si elle admet une "bonne" notion d'indépendance.*

Pour une définition formelle nous suggérons [7]. Les exemples basiques de cette notion sont l'indépendance linéaire dans un espace vectoriel et l'indépendance algébrique dans un corps algébriquement clos.

FAIT 1.2. — *Quand une "bonne" notion d'indépendance existe, elle est unique et elle s'appelle déviation.*

Quand nous étudions une théorie naturelle du premier ordre, comme la théorie du groupe libre, qui est stable, on peut poser la question suivante :

Problème 1.3. — *Caractériser la déviation, en termes de théorie des groupes, dans un groupe libre non abélien* $\mathbb{F}$.

C'est-à-dire, si $\bar{b}$ et $\bar{c}$ appartiennent à $\mathbb{F}$, et $A \subset \mathbb{F}$ est un ensemble de paramètres, décrire quand $\bar{b}$ est indépendant de $\bar{c}$ au-dessus de A. On commence par donner quelques exemples d'autres structures naturelles dont les théories du premier ordre sont stables et dans lesquelles la déviation a un sens naturel :

Exemple 1.4.

- Soit $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ un corps algébriquement clos. Soient $\bar{b}, \bar{c}$ dans $\mathbb{C}$ et soit $A \subset \mathbb{C}$. Alors, $\bar{b}$ est indépendant de $\bar{c}$ au-dessus de A si et seulement si $deg.tr(A(\bar{c})/A) = deg.tr.(A(\bar{b}\bar{c})/A(\bar{b}))$;
- Soit $\bar{b}$ et $\bar{c}$ dans le groupe libre abélien $\mathbb{Z}^n$. Alors $\bar{b}$ est indépendant de $\bar{c}$ au-dessus de $\emptyset$ si et seulement si $\mathbb{Z}^n = B \oplus C$ avec $\bar{b} \in B$ et $\bar{c} \in C$.

Par contre, la déviation a toujours une définition abstraite. On rappelle que dans une structure stable, la déviation est l' unique notion d'indépendance qui satisfait certains axiomes, donc on peut melanger les mots déviation et indépendance.

Définition 1.5. — *Soit* $\mathbb{M}$ *une structure (qui a la théorie du premier ordre) stable. Soit* $\bar{b}, \bar{c}, A \subset \mathbb{M}$. *Alors,* $\bar{b}$ *n'est pas indépendant de* $\bar{c}$ *au-dessus de* A *si et seulement si il existe un ensemble* X *définissable sur* $A\bar{b}$ *qui contiens* $\bar{c}$ *et une suite d'automorphismes de* $\mathbb{M}$ *qui fixent* A, $(f_n)_{n<\omega}$, *tel que l'ensemble* $\{f_n(X) \mid n < \omega\}$ *est* k*-inconsistant pour un certain nombre* $k \in \mathbb{N}$, *c'est-à-dire, chaque sous-ensemble de cardinalité* k *est inconsistant.*

Remarque 1.6. — La définition formelle a besoin que la structure $\mathbb{M}$ soit saturée, mais on evite cette condition car elle est un peu technique et en plus dans notre cas particulier il ne fait pas de différence.

Dans notre cas nous avons prouvé [6] :

Théorème (Perin–Sklinos). — *Soit* $\bar{b}$ *et* $\bar{c}$ *appartiennent à* $\mathbb{F}$. *Alors* $\bar{b}$ *est indépendant de* $\bar{c}$ *au-dessus de* $\emptyset$ *dans* $\mathbb{F}$ *si et seulement si* $\mathbb{F} = B * C$, *avec* $\bar{b} \in B$ *et* $\bar{c} \in C$.

De plus, nous avons caractérisé déviation au-dessus des ensembles de paramètres qui sont grandes par rapport à $\mathbb{F}$, c'est-à-dire $\mathbb{F}$ est librement indecomposable au-dessus d'eux, en utilisant la notion de scindement JSJ. Le scindement JSJ (pour Jaco–Shalen et Johannson), dans le cas d'un groupe hyperbolique sans torsion, a été découvert par Sela afin de décrire tous les scindements cycliques de ces groupes. Dans la section suivante on présentera un cas particulier de cette description.

2. Surface à un bord

Dans cette section on va décrire la déviation dans le cas du groupe fondamentale d'une surface à un bord au-dessus du représentant de la courbe de bord. On remarque que toutes les surfaces sont orientable.

Théorème 2.1. — *Soit Σ un surface à un bord. Si β, γ sont des courbes simples fermées essentielles et δ est la courbe du bord, alors $[\beta]$ n'est pas indépendant de $[\gamma]$ au-dessus de $[\delta]$.*

Afin de prouver le théorème au-dessus on va utiliser le complexe des courbes, un outil découvert par Harvey [1]. Nous avons seulement besoin du 1-skuelette du complexe des courbes, le *graphe des courbes*.

Définition 2.2 (Graphe des courbes). — *Soit $\Sigma_{g,n}$ un surface de genre g aux n bords. Alors, le graphe des courbes est le graphe défini par :*

- *les sommets sont les classes d'isotopie des courbes essentielles ;*
- *deux sommets, α_1, α_2, sont reliés par un arrête si leur nombre d'intersection géométrique est zéro.*

On peut naturellement regarder le graphe des courbes comme un espace métrique. En plus, Masur–Minsky [3] ont prouvé :

Théorème 2.3 (Masur–Minsky). — *Soit $\Sigma_{g,n}$ un surface de genre g aux n bords. Alors, le graphe des courbes de $\Sigma_{g,n}$ est de diamètre infinie.*

Définition 2.4 (Mapping class group). — *Soit $\Sigma_{g,n}$ un surface de genre g aux n bords. Alors, le mapping class group, $MCG(\Sigma_{g,n})$, est le groupe de classes d'isotopie des homéomorphismes de $\Sigma_{g,n}$.*

Évidemment, le mapping class group d'une surface agit sur le graphe des courbes de la surface. En fait, il y a un nombre fini d'orbites de sommets sous l'action de mapping class group. On peut utiliser ce fait, ainsi que le diamètre infinie du graphe des courbes afin de prouver :

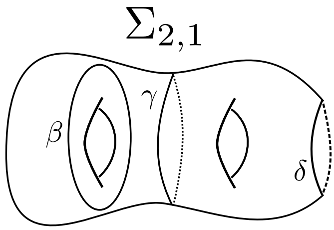

FIGURE *2.1. Surface à un bord*

LEMME 2.5. — *Soit $\Sigma_{g,n}$ une surface de genre g aux n bords. Soient $R \geqslant 0$ et x un sommet du graphe des courbes de $\Sigma_{g,n}$. Alors, il existe une suite $(h_n)_{n<\omega} \in MCG(\Sigma_{g,n})$ telle que $B_R(h_n(x)) \cap B_R(h_m(x)) = \emptyset$ pour chaque $n \neq m$, où $B_R(x)$ est la boule ouverte de centre x et de rayon R.*

Enfin, on a besoin connaître le théorème suivant :

THÉORÈME 2.6 (Perin–Sklinos [5] / Ould Houcine [4]). — *Soient $\mathbb{F}$ un groupe libre non abélien et $A \subset \mathbb{F}$ un sous-ensemble tel que $\mathbb{F}$ est librement indécomposable au-dessus de A. Alors, l'orbite $Aut(\mathbb{F}/A).\bar{b}$ est définissable sur A pour tout uplet $\bar{b} \in \mathbb{F}$.*

On donne la preuve du théorème principal de cette section.

Preuve du Théorème 2.1. — Selon Définition 1.5 on doit trouver un ensemble, Y, définissable sur $[\gamma], [\delta]$ qui contient $[\beta]$ et une suite d'automorphismes $(f_n)_{n<\omega} \in Aut(\pi_1(\Sigma)/[\delta]))$ telle que l'ensemble $\{f_n(X) \mid n < \omega\}$ est k-inconsistant pour un certain nombre $k \in \mathbb{N}$. Alors, on prend Y être $Aut(\pi_1(\Sigma)\ /[\gamma],[\delta]).[\beta]$ (qui est définissable par le Théorème 2.6) et on applique le Lemme 2.5 avec $R = d_C(\beta,\gamma)$ et $x = \gamma$, où $d_C(\beta,\gamma)$ est la distance entre β et γ dans le graphe des courbes. Lemme 2.5 nous donne une suite d'homéomorphismes $(h_n)_{n<\omega}$ de la surface Σ telle que chaque homéomorphisme fixe δ et $B_R(h_n(\gamma)) \cap B_R(h_m(\gamma)) = \emptyset$. Il est facile de voir que l'ensemble $\{[h_n](Y) \mid n < \omega\}$ est 2-inconsistant, oú $[h_n]$ est le representative de h_n dans $Aut(\pi_1(\Sigma)/[\delta])$. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. J. HARVEY, « Boundary structure of the modular group », in *Riemann surfaces and related topics : Proc. 1978 Stony Brook Conf.*, Ann. Math. Stud., vol. 97, Princeton, N.J., 1981, p. 245-251.

[2] O. KHARLAMPOVICH & A. MYASNIKOV, « Elementary theory of free non-abelian groups », *J. Algebra* **302** (2006), n° 2, p. 451-552.

[3] H. A. Masur & Y. N. Minsky, « Geometry of the complex of curves I : Hyperbolicity », *Invent. Math.* **138** (1999), n° 1, p. 103-149.

[4] A. Ould Houcine, « Homogeneity and prime models in torsion-free hyperbolic groups », *Confluentes Math.* **3** (2011), n° 1, p. 121-155.

[5] C. Perin & R. Sklinos, « Homogeneity in the free group », *Duke Math. J.* **161** (2012), n° 13, p. 2635-2668.

[6] ———, « Forking and JSJ decompositions in the free group », to appear in *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, `https://arxiv.org/abs/1303.1378`, 2013.

[7] A. Pillay, *Geometric stability theory*, Oxford Logic Guides., vol. 32, Oxford : Clarendon Press, 1996, x+361 pages.

[8] Z. Seal, « Diophantine geometry over groups. VI : The elementary theory of a free group. », *Geom. Funct. Anal.* **16** (2006), n° 3, p. 707-730.

[9] ———, « Diophantine geometry over groups VIII : Stability », *Ann. Math.* **177** (2013), n° 3, p. 787-868.

[10] S. Shelah, *Classification theory and the number of non-isomorphic models*, 2nd rev. éd., Studies in Logic and the Foundations of Mathematics„ vol. 92, Elsevier, Netherlands, 1990, xxxiv+705 pages.

Rizos Sklinos