

Institut Fourier — Université de Grenoble I

*Actes du séminaire de*  
**Théorie spectrale  
et géométrie**

Antoine CLAIS

**Propriétés combinatoires du bord d'un groupe hyperbolique**

Volume 32 (2014-2015), p. 73-96.

[http://tsg.cedram.org/item?id=TSG\\_2014-2015\\_\\_32\\_\\_73\\_0](http://tsg.cedram.org/item?id=TSG_2014-2015__32__73_0)

© Institut Fourier, 2014-2015, tous droits réservés.

L'accès aux articles du Séminaire de théorie spectrale et géométrie (<http://tsg.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://tsg.cedram.org/legal/>).

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du*  
*Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*  
<http://www.cedram.org/>

## PROPRIÉTÉS COMBINATOIRES DU BORD D'UN GROUPE HYPERBOLIQUE

Antoine Clais

RÉSUMÉ. — Le but de ce survol est de présenter les modules combinatoires récemment utilisés pour étudier les propriétés quasi-conformes des bords des groupes hyperboliques. Dans un premier temps, on rappellera quelques résultats et questions de rigidité bien connus qui ont motivés l'introduction de ces outils. Puis on définira les modules combinatoires et la propriété de Loewner combinatoire qui offrent une nouvelle approche pour résoudre des problèmes ouverts depuis longtemps. Enfin, on décrira des applications concrètes de ces outils à travers quelques résultats récents et questions ouvertes.

### TABLE DES MATIÈRES

1. Rigidité et homéomorphismes quasi-Möbius au bord	73
2. Espaces de Loewner	78
3. Dimension conforme	81
4. Modules combinatoires et propriété de Loewner combinatoire	84
5. Utilisation des modules combinatoires aux bords	88
6. Une méthode géométrique pour prouver la CLP	90
7. Questions	91
Bibliographie	94

### 1. Rigidité et homéomorphismes quasi-Möbius au bord

La géométrie d'un espace à courbure négative est intimement liée à la structure quasi-conforme de son bord. Ce fait a été utilisé dès les prémises de la géométrie hyperbolique et de la théorie géométrique des groupes. En effet, en 1883 H. Poincaré, dans son *Mémoire sur les groupes Kleinéens*, utilise le groupe conforme de la sphère  $\mathbb{S}^2$  pour construire des exemples de

---

*Mots-clés*: Bord d'un groupe hyperbolique, analyse quasi-conforme, modules combinatoires.

*Classification math.* : 20F67, 30L10.

groupes agissant géométriquement sur l'espace hyperbolique réel  $\mathbb{H}^3$ . Le lien entre analyse quasi-conforme au bord et géométrie de l'espace hyperbolique a ensuite mené G.D. Mostow à son fameux théorème de rigidité. À la suite de G.D. Mostow, les travaux de P. Pansu, J.W. Cannon, M. Bourdon–H. Pajot et M. Bonk–B. Kleiner ont fait fructifier ce lien dans le cadre des groupes hyperboliques au sens de Gromov.

L'objet de cette partie est de rappeler le lien entre quasi-isométries et homéomorphismes quasi-Möbius du bord à travers quelques résultats et questions classiques. On peut se référer à [5], [21] ou [25] pour des survols complets sur ces sujets.

### 1.1. Questions de rigidité

La théorie des espaces et des groupes hyperboliques au sens de Gromov, fait l'objet d'excellentes introductions dans [17] et [18].

Rappelons qu'un groupe de type fini  $\Gamma$  agit géométriquement sur un espace métrique  $X$ , si  $\Gamma < \text{Isom}(X)$ , le quotient  $X/\Gamma$  est compact et l'action de  $\Gamma$  est proprement discontinue. Dans l'article fondateur [19], M. Gromov introduit la notion d'espace hyperbolique qui généralise les variétés à courbures strictement négatives. Un espace métrique propre et géodésique  $X$  est dit *hyperbolique* (au sens de Gromov) si tout ses triangles géodésiques sont fins. C'est-à-dire s'il existe une constante  $\delta \geq 0$  telle que pour tout triangle géodésique  $[x, y] \cup [y, z] \cup [z, x] \subset X$ , tout point  $p \in [x, y]$  vérifie

$$\text{dist}(p, [y, z] \cup [z, x]) \leq \delta.$$

Un groupe de type fini agissant géométriquement sur un espace hyperbolique est appelé un *groupe hyperbolique*. Dans ce cas, ses graphes de Cayley sont des espaces métriques hyperboliques.

Tout au long de cette partie, on désigne par  $(X, |\cdot - \cdot|)$  et  $(Y, |\cdot - \cdot|)$  deux espaces métriques, géodésiques, propres et hyperboliques au sens de Gromov. Rappelons que deux applications  $F, F' : X \rightarrow Y$  sont à *distance bornée* l'une de l'autre s'il existe une constante  $K > 0$  telle que  $|F(x) - F'(x)| \leq K$  pour tout  $x \in X$ . Dans ce cadre général, on peut se poser les questions suivantes.

QUESTION 1.1.

- (1) Rigidité à la Mostow. *Un isomorphisme de groupe  $\rho : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$  entre deux réseaux cocompacts de  $\text{Isom}(X)$  est-il toujours réalisé par conjugaison par un élément de  $\text{Isom}(X)$  ?*

- (2) Rigidité des quasi-isométries (Q.I). *Est-il vrai que toute quasi-isométrie  $F : X \rightarrow Y$  est à distance bornée d'une isométrie ?*

Il convient de remarquer que la rigidité quasi-isométrique est plus forte que la rigidité à la Mostow. Les exemples suivants motivent les question précédentes.

*Exemple 1.2.*

- (i) Le célèbre théorème de G.D. Mostow affirme que pour  $d \geq 3$  l'espace hyperbolique réel  $\mathbb{H}^d$  vérifie le premier type de rigidité (cf. [33]).
- (ii) P. Pansu a montré que pour  $d \geq 2$ , l'espace hyperbolique quaternionien de dimension  $d$  vérifie le second type de rigidité (cf. [35]).
- (iii) Les immeubles fuchsien vérifient le second type de rigidité (cf. [9] pour le cas à angles droits et [42] pour le cas général).

A la lumière du cas des espaces hyperboliques réels, la rigidité n'est pas une propriété générique des espaces hyperboliques. La rigidité est renforcée quand la structure hyperbolique est enrichie par une autre structure : quaternionienne ou immobilière dans les exemples.

Le prochain exemple pourrait être obtenu en étudiant les immeubles hyperboliques à angles droits de dimension 3. Cette question est discutée dans la Partie 7 où un bon candidat à la rigidité Q.I est donné.

## 1.2. Des quasi-isométries aux homéomorphismes quasi-Möbius au bord

Expliquons maintenant la stratégie classique qui permet de résoudre ce genre de questions en passant par le bord. Rappelons que, par le lemme de Švarc–Milnor, les réseaux  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  de la Question 1.1 sont quasi-isométriques, en tant que groupes de présentations finis munis de la métrique du mot, à  $(X, |\cdot - \cdot|)$ . En conséquence, les deux questions de rigidité se réduisent essentiellement à des questions sur les quasi-isométries.

Des quasi-isométries on passe au homéomorphismes du bord par le lemme de Morse. Fixons un point base  $x_0 \in X$ . Le bord à l'infini de  $X$ , noté  $\partial X$  est l'ensemble des rayons géodésiques dans  $X$  muni de la relation d'équivalence qui identifie deux rayons  $r, r' : [0, +\infty[ \rightarrow X$  dès qu'il existe  $K > 0$  vérifiant  $|r(t) - r'(t)| \leq K$  pour tout  $t \in [0, +\infty[$ .

Le lemme de Morse affirme que l'image par une quasi-isométrie d'un rayon géodésique reste à distance bornée d'un rayon géodésique. Cela entraîne qu'une quasi-isométrie entre espaces hyperboliques s'étend continûment en homéomorphisme au bord. En particulier, si  $\Gamma$  est un groupe hyperbolique agissant sur  $X$ , son bord, c'est-à-dire le bord d'un de ses graphes de Cayley, s'identifie naturellement au bord de  $X$  par la quasi-isométrie  $g \in \Gamma \mapsto gx_0 \in X$ .

Les métriques visuelles des bords fournissent plus d'information sur cet homéomorphisme. Pour voir cela on utilise les notions suivantes introduites dans [41].

**DÉFINITION 1.3.** — Soient  $Z$  et  $Z'$  deux espaces métriques.

(i) Pour  $a, b, c, d \in Z$  distincts on définit le birapport suivant

$$[a : b : c : d] = \frac{d(a, b)}{d(a, c)} \cdot \frac{d(c, d)}{d(b, d)}.$$

(ii) Un homéomorphisme  $f : Z \rightarrow Z'$  est dit quasi-Möbius ou Q.M s'il existe un homéomorphisme  $\phi : [0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$  tel que pour tout  $a, b, c, d \in Z$  distincts

$$[f(a) : f(b) : f(c) : f(d)] \leq \phi([a : b : c : d]).$$

Dans ce cas  $f^{-1}$  est aussi un homéomorphisme Q.M et  $Z$  et  $Z'$  sont dits quasi-Möbius équivalents ou Q.M équivalents.

**Notation 1.4.** — Tout au long de ce survol, pour deux fonctions réelles  $f$  et  $g$ , on note  $f \asymp g$  s'il existe  $A > 0$  vérifiant

$$A^{-1}f \leq g \leq Af.$$

Rappelons que l'hyperbolicité implique que pour tout  $a, b \in \partial X$  il existe une géodésique  $(a, b) \subset X$  joignant  $a$  à  $b$ . Cela permet, en particulier, de munir  $\partial X$  d'une *métrique visuelle*. C'est-à-dire une métrique  $d$  telle qu'il existe  $\alpha > 1$  vérifiant pour tout  $a, b \in \partial X$

$$d(a, b) \asymp \alpha^\ell,$$

où  $\ell = \text{dist}(x_0, (a, b))$ . Par ailleurs, la finesse des triangles dans  $X$  entraîne qu'il existe une constante uniforme  $K > 0$  telle que pour tout  $n \geq 0$  assez grand

$$\ell - K \leq |a_n - x_0| + |b_n - x_0| - |a_n - b_n| \leq \ell + K,$$

où  $a_n$  et  $b_n$  sont des suites convergeant respectivement vers  $a$  et  $b$ . Quitte à modifier  $\alpha$ , on a donc

$$(1.1) \quad d(a, b) \asymp \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^{(|a_n - x_0| + |b_n - x_0| - |a_n - b_n|)}.$$

Choisissons maintenant  $a_n, b_n, c_n$  et  $d_n$  quatre suites dans  $X$  convergeant respectivement vers  $a, b, c, d \in \partial X$  distincts. En utilisant la relation 1.1 on peut écrire

$$[a : b : c : d] \asymp \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^{(|a_n - b_n| + |c_n - d_n| - |a_n - c_n| - |b_n - d_n|)}.$$

En notant  $L = \text{dist}((a, c), (b, d))$  on obtient, quitte à modifier  $\alpha$ ,

$$(1.2) \quad [a : b : c : d] \asymp \alpha^L.$$

Maintenant considérons  $F : X \rightarrow Y$  une  $(\lambda, K)$ -quasi-isométrie. On note  $f$  l'homéomorphisme de  $\partial X$  vers  $\partial Y$  induit par le lemme de Morse. Les inégalités

$$\begin{aligned} \lambda^{-1} \text{dist}((a, c), (b, d)) - K &\leq \text{dist}((f(a), f(c)), (f(b), f(d))) \\ &\leq \lambda \text{dist}((a, c), (b, d)) + K \end{aligned}$$

ainsi que la relation 1.2 entraînent la proposition suivante.

PROPOSITION 1.5. — *Toute quasi-isométrie  $F : X \rightarrow Y$  se prolonge continûment en un homéomorphisme quasi-Möbius  $f : \partial X \rightarrow \partial Y$ .*

L'action cocompacte du groupe  $\Gamma$  permet de montrer que, réciproquement, tout homéomorphisme Q.M au bord est le prolongement d'une quasi-isométrie (cf. [36]).

### 1.3. Questions de rigidité au bord

On peut donc réduire l'essentiel des problèmes de rigidité à la question suivante au bord : les homéomorphismes quasi-Möbius du bord sont-ils les prolongements d'isométries ?

La stratégie employée par P. Pansu puis M. Bourdon–H. Pajot pour leurs théorèmes de rigidité est analogue à la stratégie de Mostow pour montrer la rigidité des  $\mathbb{H}^d$  pour  $d \geq 3$ . Dans le cas de  $\mathbb{H}^d$ , où le bord est  $\partial\mathbb{H}^d \simeq \mathbb{S}^{d-1}$ , cette stratégie est la suivante.

- (1) On montre un théorème de rigidité des homéomorphismes quasi-Möbius au bord. En utilisant les propriétés dynamiques de l'action du groupe au bord, on identifie les homomorphismes quasi-Möbius avec les applications conformes du bord.
- (2) On construit une isométrie à l'intérieur en utilisant le théorème de Liouville qui identifie le groupe conforme de la sphère  $\mathbb{S}^{d-1}$  au groupe d'isométrie de  $\mathbb{H}^d$  (cf. par exemple [2, Section A.3]).

Pour appliquer cette stratégie au bord d'un espace hyperbolique au sens de Gromov, ce schéma nécessite des adaptations techniques importantes. En particulier, le bord d'un tel espace n'est pas forcément une variété et la notion d'application conforme au bord ne va pas de soi. Cependant, comme cela est expliqué dans [21, Partie 5] la notion d'application conforme du bord se généralise et les questions de rigidité se réduisent essentiellement à la question : les homéomorphismes quasi-Möbius du bord sont-ils conformes ?

Les *espaces de Loewner* sont les espaces dans lesquels cette question trouve une réponse positive (cf. [21, Théorèmes 2.15 et 5.11]).

*Remarque 1.6.* — Dans le cas de l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^d$ ,  $d \geq 3$  une preuve de la rigidité de Mostow reposant sur le volume simplicial a été donnée par M. Gromov puis généralisée par W. Thurston (cf. [38, Chapter 6]). Cette preuve a ensuite été « dualisée » dans [12] en utilisant la cohomologie bornée. Il serait intéressant de savoir si ces approches peuvent-être utilisées pour retrouver les résultats de rigidité des Exemples 1.2(ii) et (iii). Cela fournirait une nouvelle approche pour étendre ces résultats.

## 2. Espaces de Loewner

Les modules des courbes sont des invariants naturels dans la théorie des applications quasi-conformes de  $\mathbb{R}^d$  (cf. [40]). Les espaces de Loewner introduits par Heinonen et Koskela dans [23] constituent une généralisation de cette théorie dans le cadre abstrait des espaces métriques mesurés. On peut se référer à l'ouvrage [22] pour une introduction complète sur ce sujet.

En première approximation, on peut dire que les espaces de Loewner sont les espaces « *contenant beaucoup de courbes rectifiables* ». Néanmoins, l'intuition traduit difficilement cette notion très technique.

### 2.1. Modules analytiques des courbes

Dans cette partie,  $(Z, d, \mu)$  désigne un espace métrique mesuré. Dans la suite, on se focalisera sur le cas où  $Z$  est le bord d'un espace hyperbolique. On suppose, de plus, que  $Z$  est compact et  $Q$ -Ahlfors-régulier ( $Q$ -AR ou AR) pour  $Q > 1$ . C'est-à-dire que pour tout  $0 < R \leq \text{diam } Z$  et toute boule  $B \subset Z$  de rayon  $R$

$$\mu(B) \asymp R^Q.$$

Remarquons que sous cette hypothèse, la mesure  $\mu$  est comparable à la mesure de Hausdorff relative à la distance  $d$ . En particulier,  $Q$  est la dimension de Hausdorff de  $(Z, d)$ .

On appelle *courbe* de  $Z$  une application continue  $\gamma : [0, 1] \rightarrow Z$ . On confond par la suite une courbe et son image. Soit  $\mathcal{F}$  un ensemble de courbes dans  $Z$ . Une fonction borélienne  $f : Z \rightarrow [0, +\infty[$  est dite  $\mathcal{F}$ -admissible si pour toute courbe rectifiable  $\gamma \in \mathcal{F}$

$$\int_0^1 f(\gamma(t))dt \geq 1.$$

Remarquons que la notion d'admissibilité ne fait pas appelle à la mesure  $\mu$  mais simplement à la métrique de  $Z$ .

DÉFINITION 2.1. — On appelle  $Q$ -module de  $\mathcal{F}$

$$\text{Mod}_Q(\mathcal{F}) = \inf \left\{ \int_X f^Q d\mu \right\}$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des fonctions  $\mathcal{F}$ -admissibles et avec la convention  $\text{Mod}_Q(\mathcal{F}) = 0$  si  $\mathcal{F}$  ne contient pas de courbe rectifiable.

La proposition suivante nous permet de voir le module comme une « mesure extérieure » sur l'ensemble des courbes de  $Z$ .

PROPOSITION 2.2 ([23]).

(1) Pour deux ensembles de courbes  $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$  on a

$$\text{Mod}_Q(\mathcal{F}_1) \leq \text{Mod}_Q(\mathcal{F}_2).$$

(2) Pour des ensembles de courbes  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$  on a

$$\text{Mod}_Q\left(\bigcup_{i=1}^n \mathcal{F}_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \text{Mod}_Q(\mathcal{F}_i).$$

### 2.2. Espace de Loewner

On appelle *continuum* un sous-ensemble compact et connexe de  $Z$ . Un continuum est, de plus, dit *non-dégénéré* s'il contient au moins deux points. Pour  $A$  et  $B$  deux continua non-dégénérés disjoints on note  $\mathcal{F}(A, B)$  l'ensemble de toutes les courbes qui joignent  $A$  à  $B$ , c'est-à-dire qui intersectent  $A$  et  $B$ . On écrit aussi  $\text{Mod}_Q(A, B) := \text{Mod}_Q(\mathcal{F}(A, B))$ . Enfin on appelle *distance relative entre  $A$  et  $B$*

$$\Delta(A, B) = \frac{\text{dist}(A, B)}{\min\{\text{diam } A, \text{diam } B\}}.$$

Les espaces de Loewner sont définis de la manière suivante.



DÉFINITION 2.3. — On dit que  $(Z, d, \mu)$  est un  $Q$ -espace de Loewner (ou vérifie la  $Q$ -propriété de Loewner) s'il existe une fonction croissante  $\phi : ]0, +\infty[ \rightarrow ]0, +\infty[$  vérifiant pour toute paire de continua non-dégénérés disjoints  $A$  et  $B$  de  $Z$

$$\phi(\Delta(A, B)^{-1}) \leq \text{Mod}_Q(\mathcal{F}(A, B)).$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté possible, on omet de préciser la dimension  $Q$ . Par ailleurs, on utilise parfois le terme propriété de Loewner *analytique* pour éviter la confusion avec la propriété de Loewner combinatoire définie dans la Partie 4.2. On peut interpréter l'inégalité de la définition de la manière suivante :

« il y a toujours beaucoup de courbes rectifiables qui joignent deux continua ».

Si  $Z$  est un espace de Loewner, le comportement asymptotique de la fonction  $\phi$  est donné par [23, Theorem 3.6]. Pour  $t$  suffisamment petit  $\phi(t) \approx \log \frac{1}{t}$ , pour  $t$  suffisamment grand  $\phi(t) \approx (\log t)^{1-Q}$ .

Par ailleurs, la structure d'espace  $Q$ -AR fournit une majoration des modules.

THÉORÈME 2.4 ([23, Lemma 3.14]). — Il existe une constante  $C > 0$  vérifiant la propriété suivante. Soient  $A$  et  $B$  deux continua non-dégénérés disjoints. Soient  $0 < 2r < R$  et  $x \in Z$  tels que  $A \subset \overline{B(x, r)}$  et  $B \subset X \setminus \overline{B(x, R)}$ . Alors

$$\text{Mod}_Q(A, B) \leq C \left( \log \frac{R}{r} \right)^{1-Q}.$$

Cette seconde inégalité peut s'interpréter de la manière suivante :

« plus deux continua sont éloignés moins il y a de courbes rectifiables les joignant ».

### 2.3. Exemples et non-exemples

Les espaces suivants sont de Loewner.

*Exemple 2.5.*

- (i) L'espace euclidien  $\mathbb{R}^d$  pour  $d \geq 2$ . Ce résultat est due à C. Loewner pour  $d \geq 3$  (cf. [27] ou [40, Section 10.12] pour une preuve simple). Ce premier exemple, avec la caractérisation de la propriété de Loewner par les inégalités de Poincaré, implique que toute variété réelle compacte de dimension  $d \geq 2$  est de Loewner (cf. [23, Section 6.1]).

- (ii) Les variété riemanniennes complètes non-compactes à courbure de Ricci positive et à croissance du volume optimale de dimension  $d \geq 2$  (cf. [23, Section 6.3]).
- (iii) Les bords des immeubles fuchsien (cf. [8]).
- (iv) Certains tapis non-auto-similaires, homéomorphes au tapis de Sierpiński (cf. [31]).

Un célèbre théorème dû à B. Bowditch dit que le bords d'un groupe hyperbolique non-fuchsien possède des points de coupures locaux si et seulement si le groupe se scinde sur un sous-groupe cyclique ou en une extension HNN (cf. [11, Theorem 6.2]). La proposition suivante implique donc que les bords des groupes qui se scindent, ne sont pas de Loewner.

**PROPOSITION 2.6** ([23]). — *Si  $Z$  vérifie la propriété de Loewner, alors  $Z$  n'a pas de point de coupure locale.*

Cependant, dans [10] sont présentés des exemples de groupes hyperboliques ne se scindant pas dont le bord n'est pas Q.M équivalent à un espace de Loewner.

### 3. Dimension conforme

Comme nous allons le voir, la Définition 2.3 est difficile à vérifier au bord d'un espace hyperbolique car elle requiert la connaissance de la *dimension conforme*. La dimension conforme est un invariant quasi-Möbius introduit par P. Pansu dans [34]. Ici  $(Z, d)$  est un espace métrique compact muni de la mesure de Hausdorff associé à  $d$ . On désigne  $\dim_{\mathcal{H}}(Z, d)$  la dimension de Hausdorff de  $(Z, d)$ .

#### 3.1. Définitions

La *jauge conforme Ahlfors-régulière* de  $(Z, d)$  est l'ensemble des espaces métriques

$$\mathcal{J}_c(Z, d) := \{(Z', \delta) : (Z', \delta) \text{ est AR et est Q.M équivalent à } (Z, d)\}.$$

**DÉFINITION 3.1.** — *La dimension conforme Ahlfors-régulière (ou dimension conforme) de  $(Z, d)$  est*

$$\text{Confdim}(Z, d) := \inf\{\dim_{\mathcal{H}}(Z', \delta) : (Z', \delta) \in \mathcal{J}_c(Z, d)\}.$$

De la même manière que la dimension topologique et la dimension de Hausdorff sont respectivement invariantes par homéomorphismes et par homéomorphismes bi-Lipschitz, la dimension conforme est invariante par homéomorphismes quasi-Möbius. Les inclusions entre ces trois ensembles d'applications induisent les inégalités suivantes

$$\dim_T(Z) \leq \text{Confdim}(Z, d) \leq \dim_{\mathcal{H}}(Z, d),$$

où  $\dim_T(Z)$  désigne la dimension topologique de  $Z$ .

*Exemple 3.2.* — On présente ici quelques résultats concernant la dimension conforme de bords de groupes hyperboliques.

- (i) Tout d'abord M. Bourdon a calculé la dimension conforme du bord d'un immeuble fuchsien à angles droits (cf. [6]). Si  $\Delta(p, q)$  est l'immeuble dont le groupe de Coxeter est le groupe de réflexions d'un  $p$ -gone hyperbolique à angles droits et d'épaisseur  $q \geq 2$  alors

$$\text{Confdim}(\Delta(p, q)) = 1 + \frac{\log(q-1)}{\text{Arg} \cosh \frac{p-2}{2}}.$$

- (ii) Un résultat de J. Mackay, à mettre en parallèle avec la Proposition 2.6, dit que si le bord d'un groupe hyperbolique est connexe et n'a pas de point de coupure locale alors il est de dimension conforme strictement plus grande que 1 (cf. [28]).
- (iii) Enfin J. Mackay a calculé l'asymptotique de la dimension conforme pour les groupes aléatoires, dans le modèle à densité et dans le modèle à peu de relateurs (cf. [29]). Dans ce dernier cas la dimension conforme est 2.

### 3.2. Dimension conforme et espaces de Loewner

La jauge et la dimension conforme jouent un rôle crucial dans un espace de Loewner comme le montre le résultat suivant due à J. Tyson.

**THÉORÈME 3.3** ([30, Corollary 4.2.2]). — *Soient  $Q > 1$  et  $Z$  un espace métrique mesuré  $Q$ -AR et  $Q$ -Loewner. Alors  $\text{Confdim}(Z) = Q$ .*

Réciproquement, le bord d'un groupe hyperbolique est de Loewner si sa dimension conforme est atteinte dans sa jauge conforme.

**THÉORÈME 3.4** ([4]). — *Si  $Z$  est un espace métrique mesuré  $Q$ -AR de dimension conforme  $Q > 1$  et si  $Z$  est  $Q$ .M équivalent au bord d'un groupe hyperbolique, alors  $Z$  est  $Q$ -Loewner.*

Pour étudier la propriété de Loewner au bord des groupe hyperboliques, il faut faire face à la difficulté que cette propriété n'est pas stable par homéomorphisme Q.M.

**THÉORÈME 3.5** ([39]). — *Soient  $Z$  et  $Z'$  deux espaces métriques compacts respectivement  $Q$ -Loewner et  $Q'$ -AR. Supposons que  $Z$  et  $Z'$  soient Q.M équivalents. Alors  $Z'$  est un espace de Loewner si et seulement si  $Q = Q'$ .*

Les homéomorphismes Q.M, en général, ne préservent pas la dimension de Hausdorff et donc la propriété de Loewner n'est pas stable par homéomorphisme Q.M.

La difficulté de calculer la dimension conforme ainsi que la non-stabilité de la propriété de Loewner par homéomorphismes Q.M rendent cette propriété difficile à établir au bord d'un groupe hyperbolique.

### 3.3. La conjecture de Cannon

La conjecture suivante due à J.W. Cannon est une conjecture de géométrie des groupes qui contient le cas hyperbolique de la conjecture de géométrisation de Thurston.

**CONJECTURE 3.6** ([13, Conjecture 5.1]). — *Soit  $\Gamma$  un groupe hyperbolique dont le bord est homéomorphe à  $\mathbb{S}^2$ . Alors  $\Gamma$  agit géométriquement sur  $\mathbb{H}^3$ .*

Les travaux de G. Perelman et leurs généralisations ont montré la conjecture dans le cas où  $\Gamma$  est le groupe fondamental d'une 3-variété mais le cas général reste ouvert. Les progrès de M. Bonk et B. Kleiner autour de cette conjecture ont fourni de nombreux outils et résultats d'analyse quasi-conforme au bord des espaces hyperboliques. En particulier, ils ont montré que la conjecture suivante est équivalente à celle de Cannon.

**CONJECTURE 3.7** ([4, Conjecture 1.2]). — *Soit  $\Gamma$  un groupe hyperbolique dont le bord est homéomorphe à  $\mathbb{S}^2$ . Alors la dimension conforme de  $\partial\Gamma$  est atteinte par une métrique de sa jauge conforme.*

*Remarque 3.8.* — La conjecture de Cannon a récemment été abordée par les sous-groupes de surface. Dans [32], il est montré que si  $\Gamma$  est un groupe hyperbolique dont le bord est homéomorphe à  $\mathbb{S}^2$  et si  $\Gamma$  contient « suffisamment » de sous-groupes de surface quasi-convexes. Alors  $\Gamma$  agit géométriquement sur  $\mathbb{H}^3$ .

Dans [1], l'hypothèse de V. Markovic est affaiblie. Il est montré que si  $\Gamma$  est un groupe hyperbolique à un bout, dont la  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -cohomologie s'annule à l'infini et si  $\Gamma$  contient suffisamment de sous-groupes de surface quasi-convexes. Alors  $\Gamma$  agit géométriquement sur  $\mathbb{H}^3$ .

#### 4. Modules combinatoires et propriété de Loewner combinatoire

Pour résumer les deux parties précédentes, on peut dire que le problème posé pour montrer la propriété de Loewner est de trouver une métrique qui réalise la dimension conforme. Cela permet de définir ensuite la « *bonne mesure* » avec laquelle travailler pour définir les modules des courbes.

Pour contourner cette difficulté les modules combinatoires ont été introduits par M. Bonk et B. Kleiner dans [3] en suivant des idées de P. Pansu et J.W. Cannon. L'idée est de remplacer la « *bonne mesure* » par des mesures discrètes. En prenant une suite de mesures discrètes de plus en plus fines, on espère trouver asymptotiquement une propriété qui ressemble à la propriété de Loewner. On peut se référer à [7] pour une introduction complète de ces outils combinatoires.

Dans cette partie  $(Z, d)$  est un espace métrique compact. Pour  $z \in Z$  et  $0 < r \leq \text{diam } Z$ , on désigne par  $B(z, r)$  la boule ouverte de centre  $z$  et de rayon  $r$ . En pratique, on veut appliquer les techniques suivantes au bord d'un groupe hyperbolique.

##### 4.1. Modules combinatoires

Il est à noter que les définitions suivantes sont rigoureusement parallèles à celles de la Partie 2. De plus, les propriétés élémentaires des modules combinatoires se démontrent de manières analogues à celles des modules analytiques.

Pour  $k \geq 0$  et  $\kappa > 1$ , on appelle  $\kappa$ -approximation de  $Z$  à l'échelle  $k$  un recouvrement fini de  $Z$ , noté  $G_k$ , par des ouverts tels que pour tout  $v \in G_k$  il existe  $z_v \in v$  vérifiant la propriété suivante :

- $B(z_v, \kappa^{-1}2^{-k}) \subset v \subset B(z_v, \kappa 2^{-k})$ ,
- pour tout  $v \neq w \in G_k$  on a  $B(z_v, \kappa^{-1}2^{-k}) \cap B(z_w, \kappa^{-1}2^{-k}) = \emptyset$ .

Une suite de recouvrement  $\{G_k\}_{k \geq 0}$  est appelée une  $\kappa$ -approximation de  $Z$ .

On fixe  $\{G_k\}_{k \geq 0}$  une telle approximation et on construit des modules combinatoires, de courbes grâce à cette approximation. Soient  $\rho : G_k \rightarrow$

$[0, +\infty[$  une fonction positive et  $\gamma$  une courbe dans  $Z$ . La  $\rho$ -longueur de  $\gamma$  est donnée par

$$L_\rho(\gamma) = \sum_{\substack{\gamma \cap v \neq \emptyset \\ v \in G_k}} \rho(v).$$

Pour  $p \geq 1$ , la  $p$ -masse de  $\rho$  est donnée par

$$M_p(\rho) = \sum_{v \in G_k} \rho(v)^p.$$

On fixe maintenant  $p \geq 1$ . Soit  $\mathcal{F}$  un ensemble non-vide de courbes de  $Z$ . Une fonction  $\rho : G_k \rightarrow [0, +\infty[$  est dite  $\mathcal{F}$ -admissible si  $L_\rho(\gamma) \geq 1$  pour toute courbe  $\gamma \in \mathcal{F}$ .

DÉFINITION 4.1. — On appelle  $p$ -module  $G_k$ -combinatoire de  $\mathcal{F}$

$$\text{Mod}_p(\mathcal{F}, G_k) = \inf\{M_p(\rho)\}$$

où infimum est pris sur l'ensemble des fonctions  $\mathcal{F}$ -admissibles et avec la convention

$$\text{Mod}_p(\emptyset, G_k) = 0.$$

Comme annoncé, les modules combinatoires sont des « mesures extérieures discrètes sur les ensembles de courbes ».

PROPOSITION 4.2 ([7, Proposition 2.1]).

(1) Pour deux ensembles de courbes  $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$  on a

$$\text{Mod}_p(\mathcal{F}_1, G_k) \leq \text{Mod}_p(\mathcal{F}_2, G_k).$$

(2) Pour des ensembles de courbes  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$  on a

$$\text{Mod}_p\left(\bigcup_{i=1}^n \mathcal{F}_i, G_k\right) \leq \sum_{i=1}^n \text{Mod}_p(\mathcal{F}_i, G_k).$$

Il est important de noter que, contrairement aux modules analytiques, les modules combinatoires ne distinguent pas les courbes rectifiables et non-rectifiables.

À partir de maintenant, on suppose que  $Z$  est un espace métrique compact et *doublant*. Cela signifie qu'il existe une constante uniforme  $N \geq 1$  telle que toute boule de rayon  $0 < r \leq \text{diam } Z$  puisse être recouverte par  $N$  boules de rayon  $r/2$ . Dans un espace métrique doublant le comportement asymptotique du  $p$ -module  $G_k$ -combinatoire ne dépend pas du choix de l'approximation. Comme cela est montré dans [7, Proposition 3.3], le bord d'un groupe hyperbolique muni d'une métrique visuelle est doublant. En pratique, on manipule donc les modules combinatoires à changement d'approximation près.

## 4.2. Propriété de Loewner combinatoire (CLP)

Dans ce paragraphe  $(Z, d)$  est un espace métrique compact connexe par arc et doublant. On fixe  $\kappa > 1$ ,  $\{G_k\}_{k \geq 0}$  une  $\kappa$ -approximation de  $Z$  et  $p \geq 1$ . La définition qui suit est l'analogie combinatoire de la Définition 2.3.

De nouveau, pour deux continua non-dégénérés et disjoints on note  $\mathcal{F}(A, B)$  l'ensemble de toutes les courbes de  $Z$  joignant  $A$  et  $B$ , et on écrit  $\text{Mod}_p(A, B, G_k) := \text{Mod}_p(\mathcal{F}(A, B), G_k)$ .

DÉFINITION 4.3. — *Pour  $p > 1$ , on dit que  $(Z, d)$  vérifie la  $p$ -Propriété de Loewner Combinatoire (CLP) s'il existe deux fonctions croissantes  $\phi$  et  $\psi$  sur  $]0, +\infty[$  avec  $\lim_{t \rightarrow 0} \psi(t) = 0$ , telles que*

- (1) *pour toute paire de continua non-dégénérés et disjoints  $A$  et  $B$  et pour tout  $k \geq 0$  avec  $2^{-k} \leq \min\{\text{diam } A, \text{diam } B\}$  on a*

$$\phi(\Delta(A, B)^{-1}) \leq \text{Mod}_p(A, B, G_k),$$

- (2) *pour toute paire de boules ouvertes  $B_1, B_2$  de même centre et telles que  $B_1 \subset B_2$ , et pour tout  $k \geq 0$  avec  $2^{-k} \leq \text{diam } B_1$  on a*

$$\text{Mod}_p(\overline{B_1}, Z \setminus B_2, G_k) \leq \psi(\Delta(\overline{B_1}, Z \setminus B_2)^{-1}).$$

On peut interpréter les inégalités de la définition de manière analogue à la Partie 2.

- (i) « il y a toujours beaucoup de courbes joignant deux continua »,  
 (ii) « plus deux continua sont éloignés moins il y a de courbes les joignant ».

La proposition suivante est à mettre en parallèle avec le Théorème 3.3.

PROPOSITION 4.4 ([7, Corollary 3.7]). — *Soit  $(\partial\Gamma, d)$  le bord d'un groupe hyperbolique muni d'une métrique visuelle. Si  $\partial\Gamma$  vérifie la  $p$ -propriété de Loewner combinatoire alors  $p = \text{Confdim}(\partial\Gamma)$ .*

Comme la propriété de Loewner analytique, la CLP est donc une propriété qui apparaît lorsqu'on se place à la bonne dimension. Néanmoins, dans le cas analytique la métrique qui réalise la dimension conforme sert aussi, en amont, à définir une mesure qui permet de calculer les modules analytiques. Dans le cas combinatoire seul la métrique intervient pour définir les modules des courbes. Cela autorise, en particulier, la CLP à être stable par homéomorphismes Q.M.

THÉORÈME 4.5 ([7, Theorem 2.6]). — *Si  $Z'$  est Q.M équivalent à un espace métrique compact  $Z$  vérifiant la  $p$ -propriété de Loewner combinatoire, alors  $Z'$  vérifie aussi la  $p$ -propriété de Loewner combinatoire.*

Cette invariance en fait une propriété plus naturelle et plus facile à vérifier au bord des groupes hyperboliques. Elle permet notamment de formuler une condition à satisfaire en toute dimension qui implique la CLP (voir Proposition 6.1).

### 4.3. Propriétés de Loewner combinatoire et analytique

Dans le cas où  $Z$  est un espace métrique mesuré compact et AR, les modules combinatoires et analytiques sont essentiellement les mêmes.

PROPOSITION 4.6 ([20, Proposition B.2]). — *Soit  $Z$  un espace métrique mesuré compact et  $Q$ -AR. Supposons que  $Z$  soit muni d'une approximation  $\{G_k\}_{k \geq 0}$ . Alors pour toute paire de continua non-dégénérés et disjoints  $A, B$  et pour  $k \geq 0$  assez grand on a*

$$\text{Mod}_Q(A, B, G_k) \asymp \text{Mod}_Q(A, B)$$

dès que  $\text{Mod}_Q(A, B) > 0$  et  $\lim \text{Mod}_Q(A, B, G_k) = 0$  sinon.

En particulier, la propriété de Loewner implique la propriété de Loewner combinatoire.

THÉORÈME 4.7 ([7, Theorem 2.6]). — *Si  $Z$  est un espace métrique compact  $Q$ -AR et Loewner, alors  $Z$  vérifie la  $Q$ -propriété de Loewner combinatoire.*

La conjecture suivante justifie l'attention portée à la CLP au bord des espaces hyperboliques.

CONJECTURE 4.8 ([25, Conjecture 7.5]). — *Supposons que  $Z$  soit quasi-Möbius équivalent au bord d'un groupe hyperbolique. Si  $Z$  vérifie la CLP alors  $Z$  est quasi-Möbius équivalent à un espace de Loewner.*

Si la conjecture est vraie, la CLP au bord de groupes hyperboliques entraînera de nouveaux résultats de rigidité. Les espaces suivants vérifient la CLP sans que l'on sache s'ils sont quasi-Möbius équivalents à des espaces de Loewner.

*Exemple 4.9.*

- (i) Le tapis de Sierpiński, l'éponge de Menger et leurs généralisations en dimensions supérieures plongés dans l'espace euclidien (cf. [7, Theorem 4.1]),



- (ii) des bords de groupes de Coxeter de plusieurs types : les groupes simpliciaux, des groupes prismaux, des groupes hautement symétriques et des groupes à bords plans (cf. [7, Section 8]),
- (iii) des bords d'immeubles hyperboliques à angles droits de dimension 3 et 4 homéomorphe à des objets universels de Menger (cf. [15]).

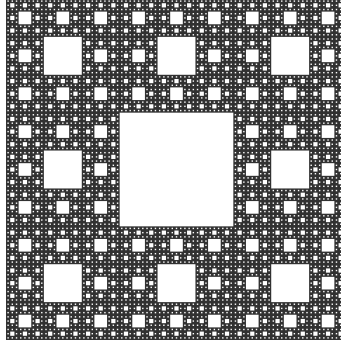


FIGURE 4.1. *Le tapis de Sierpiński vérifie la CLP. Est-il Q.M équivalent à un espace de Loewner ? Quelle-est sa dimension conforme ?*

Toute résolution de la Conjecture 4.8 dans un cas particulier des exemples précédents serait un résultat intéressant. Dans le cas des espaces auto-similaires, le tapis de Sierpiński devrait être le plus facile à étudier. Pour l'instant, B. Kleiner dans un travail non-publié et indépendamment S. Keith et T. Laakso dans [24] ont montré que la métrique euclidienne sur le tapis de Sierpiński ne réalise pas la dimension conforme. La dimension conforme du tapis reste inconnue.

Les immeubles hyperboliques de l'Exemple 4.9(iii) sont fortement suspectés d'être rigides (voir Partie 7). On pourrait prouver cela en montrant que leurs bords sont de Loewner.

## 5. Utilisation des modules combinatoires aux bords

Jusqu'à la fin de ce survol,  $\Gamma$  un groupe hyperbolique non-élémentaire à bord connexe,  $d$  désigne une métrique visuelle sur  $\partial\Gamma$ ,  $d_0 > 0$  est une constante suffisamment petite devant les constantes géométriques de  $\partial\Gamma$  et  $\mathcal{F}_0$  est l'ensemble de toutes les courbes de  $\partial\Gamma$  de diamètre au moins

$d_0$ . Comme nous allons le voir, le comportement asymptotique des modules combinatoires se réduit au comportement asymptotique du module  $\text{Mod}_p(\mathcal{F}_0, G_k)$ .

Plusieurs applications présentées ici concernent les groupes de Coxeter hyperboliques et les immeubles hyperboliques à angles droits. On peut se référer à [7, Section 5] et à [15, Section 5] pour des introductions sur les groupes de Coxeter et les immeubles hyperboliques en vu de ces applications.

Indépendamment de la Conjecture 4.8, les modules combinatoires sont utiles en eux-mêmes pour étudier la structure quasi-conforme du bord d'un groupe hyperbolique.

### 5.1. Bord sphérique

Dans [4] il est établi une condition sur les modules combinatoires pour que le bord d'un groupe homéomorphe à  $\mathbb{S}^2$  soit Q.M équivalent à la sphère euclidienne. Combiné à [7, Proposition 3.4] et au théorème p. 468 de [37], cela entraîne le corollaire suivant.

**COROLLAIRE 5.1.** — *Soit  $\Gamma$  un groupe hyperbolique dont le bord est homéomorphe à  $\mathbb{S}^2$ . Supposons qu'il existe  $C \geq 1$  tel que pour tout  $k \geq 1$  on ait*

$$\text{Mod}_2(\mathcal{F}_0, G_k) \leq C.$$

*Alors  $\Gamma$  agit géométriquement sur  $\mathbb{H}^3$ .*

Dans [7], ce corollaire permet de donner une nouvelle preuve de la conjecture de Cannon pour les groupes de Coxeter.

### 5.2. Dimension conforme

Par ailleurs, S. Keith et B. Kleiner dans un travail non-publié, puis M. Carrasco dans [14], dans un contexte plus général, ont montré que la dimension conforme est égale à un exposant critique pour les modules combinatoires. Plus précisément,

$$(5.1) \quad \text{Confdim}(\partial\Gamma) = \inf\{p \in [1, +\infty) : \lim_{k \rightarrow +\infty} \text{Mod}_p(\mathcal{F}_0, G_k) = 0\}.$$

Dans le cas des immeubles hyperboliques à angles droits, la structure combinatoire au bord de l'immeuble est contrôlée par celle au bord d'un

appartement. Cela implique que la dimension conforme du bord de l'immeuble est égale à un exposant critique calculé au bord d'un appartement (cf. [15]).

Plus précisément, si  $\Delta$  est un immeuble hyperbolique à angles droits de type  $W$  et d'épaisseur constante  $q \geq 2$ , on note  $G_k^W$  une approximation du bord  $\partial W$  du bord du groupe de Coxeter,  $\text{Mod}_p^W(\cdot)$  le  $p$ -module combinatoire calculé dans  $\partial W$  et  $\mathcal{F}_0^W$  l'ensemble de toutes les courbes de  $\partial W$  de diamètre au moins  $d_0$ . Alors

$$\text{Confdim}(\partial\Delta) = \inf\{p \in [1, +\infty) : \lim_{k \rightarrow +\infty} (q-1)^k \text{Mod}_p^W(\mathcal{F}_0^W, G_k^W) = 0\}.$$

Dans [16] cette caractérisation est utilisée pour contrôler la dimension conforme du bord de l'immeuble par la dimension conforme du bord d'un appartement

$$(5.2) \quad \text{Confdim}(\partial W) \cdot \left(1 + \frac{\log(q-1)}{\tau}\right) \leq \text{Confdim}(\partial\Delta) \leq C \log(q-1),$$

où  $\tau = \limsup_k \frac{1}{k} \log(\#\{g \in W : |g| \leq k\})$  est le taux de croissance de  $W$  et  $C > 0$  une constante indépendante de  $q$ . L'inégalité de gauche est optimale dans le cas fuchsien.

## 6. Une méthode géométrique pour prouver la CLP

La proposition suivante permet d'établir la CLP sans avoir connaissance de la dimension conforme et de dégager un critère géométrique pour la CLP.

**PROPOSITION 6.1** ([7, Proposition 4.5]). — *Soit  $\{G_k\}_{k \geq 0}$  une  $\kappa$ -approximation de  $\partial\Gamma$  muni d'une métrique visuelle. Pour  $p = 1$ , on suppose que  $\text{Mod}_p(\mathcal{F}_0, G_k)$  est non-borné. Pour  $p \geq 1$ , on suppose que pour toute courbe non-constante  $\eta \subset \partial\Gamma$  et tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $C = C(p, \eta, \epsilon)$  tel que pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :*

$$\text{Mod}_p(\mathcal{F}_0, G_k) \leq C \cdot \text{Mod}_p(\mathcal{U}_\epsilon(\eta), G_k).$$

*Supposons de plus que  $C$  puisse être choisi indépendamment de  $p$  lorsque  $p$  appartient à un compact de  $[1, +\infty[$ . Alors  $\partial\Gamma$  vérifie la CLP.*

Ici, pour une courbe  $\eta$  de  $\partial\Gamma$ , on désigne par  $\mathcal{U}_\epsilon(\eta)$  le  $\epsilon$ -voisinage de  $\eta$  pour la distance  $C^0$ . C'est-à-dire qu'une courbe  $\eta' \in \mathcal{U}_\epsilon(\eta)$  si et seulement si, il existe une paramétrisation  $s : t \in [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  de  $\eta$  telle que  $d(\eta(s(t)), \eta'(t)) < \epsilon$  pour tout  $t \in [0, 1]$ .

Dans le cas des immeubles hyperboliques à angles droits, la structure combinatoire au bord de l'immeuble est contrôlée par celle au bord d'un appartement. En particulier, [15, Théorèmes 8.9 et 9.1] combinés à la proposition ci-dessus impliquent le corollaire suivant.

**COROLLAIRE 6.2.** — *Soit  $\Delta$  un immeuble hyperbolique à angles droits de type  $W$  et d'épaisseur constante  $q \geq 2$ . Supposons que les hypothèses de la Proposition 6.1 soient vérifiées dans  $\partial W$ , alors  $\partial\Delta$  vérifie la CLP.*

Revenant au cas général, la première hypothèse de la Proposition 6.1 est vérifiée si le bord est de dimension de Hausdorff strictement plus grande que 1. En effet, dans ce cas on peut montrer que pour tout  $N \geq 1$  il existe  $N$  courbes disjointes de diamètre au moins  $d_0$  dans  $\partial\Gamma$ . Cela entraîne que pour  $k \geq 1$  suffisamment grand  $\text{Mod}_1(\mathcal{F}_0, G_k) > N$ .

Par les arguments habituellement utilisés pour comparer les modules combinatoires de deux ensembles de courbes (cf. par exemple la preuve de [7, Theorem 6.1] ou de [15, Theorem 6.12]), la deuxième hypothèse est vérifiée si la propriété suivante est vérifiée.

(S) : Pour tout  $\epsilon > 0$  et pour toute courbe  $\eta$  de  $\partial\Gamma$ , il existe  $F$  un ensemble fini d'homéomorphismes bi-Lipschitz  $f : \partial\Gamma \rightarrow \partial\Gamma$ , tel que pour toute courbe  $\gamma \in \mathcal{F}_0$  le sous-ensemble  $\bigcup_{f \in F} f(\gamma)$  de  $\partial\Gamma$  contient une courbe qui appartient à  $\mathcal{U}_\epsilon(\eta)$ .

Dans les groupes de Coxeter, les symétries de la chambre de Davis se prolongent au bord du groupe. Quand ces symétries sont suffisamment nombreuses, on peut vérifier la propriété (S) et montrer la CLP.

## 7. Questions

Cette dernière partie résume les problématiques abordées précédemment en insistant sur des exemples.

### 7.1. Rigidité des immeubles de dimension supérieure

Notons  $D$  le dodécaèdre régulier à angles droits de  $\mathbb{H}^3$ , notons  $W_D$  le groupe de réflexions engendré par les faces de  $D$  et notons enfin  $\Delta_D$  un immeuble de type  $W_D$  et d'épaisseur constante  $q \geq 2$ .

**QUESTION 7.1.** — *L'immeuble  $\Delta_D$  est-il Mostow rigide ? Ou même  $Q.I$  rigide ?*

Les réponses à ces questions ont de grandes chances d'être positives. En effet, les immeubles fuchsien (les analogues de  $\Delta_D$  en dimension 2) vérifient la rigidité Q.I alors même que leurs appartements ne sont pas rigides, ces derniers étant des plans hyperboliques  $\mathbb{H}^2$ . Les appartements de  $\Delta_D$  sont au contraire Mostow rigides, ce sont des espaces hyperboliques  $\mathbb{H}^3$ . La rigidité des appartements devrait donc être renforcée par la structure immobilière.

On sait déjà que le bord de  $\Delta_D$  vérifie la CLP (voir Exemple 4.9(iii)). Cependant, la résolution de la Conjecture 4.8 dans ce cas particulier s'annonce difficile. Une étape décisive serait de trouver une métrique visuelle qui réalise la dimension conforme. Dans le cas fuchsien, il est fait usage de manière cruciale du fait suivant : pour obtenir une métrique sur un cercle, il suffit de disposer d'une mesure sur ce cercle, et de définir la distance entre deux points comme la mesure de l'arc de cercle qui les joint (cf. [6, Lemme 3.1.4]). Ce fait ne peut bien sûr pas être étendu à la sphère de dimension 2.

Une étape vers la résolution de ce problème serait d'améliorer les inégalités 5.2. L'inégalité de gauche est optimale en dimension 2 mais il est difficile d'intuiter si elle sera optimale dans le cas de  $\Delta_D$ . Quoiqu'il en soit, l'amélioration des ces inégalités reposerait sur une compréhension très fine du comportement des modules combinatoires au bord d'un appartement. Par ailleurs, comme mentionné dans la Remarque 1.6, une approche reposant sur les volumes simpliciaux est aussi envisageable.

Notons enfin que la question et les remarques précédentes trouvent un analogue en dimension 4 en substituant l'hécatonicosachore (aussi appelé le 120-cellules) régulier à angles droits de  $\mathbb{H}^4$  au dodécaèdre. Pour l'instant, il est raisonnable de penser que la résolution de la Question 7.1 pour les immeubles « dodécaédriques » permettra sa résolution pour les immeubles « hécatonicosachoriques ».

## 7.2. Dimension conforme du bord d'un immeuble ni épais ni fin

Nous appelons maintenant immeuble d'épaisseur *intermédiaire* un immeuble de type  $(W, S)$  dont toutes les cloisons d'un type donné  $s \in S$  sont d'épaisseurs  $q \geq 3$  et toutes les cloisons de type  $s' \in S \setminus \{s\}$  sont fines. Le groupe de Coxeter du dodécaèdre régulier à angles droits de  $\mathbb{H}^3$  est toujours noté  $W_D$  et  $\Delta_{int}$  désigne un immeuble de type  $W_D$  d'épaisseur intermédiaire.

QUESTION 7.2. — *La dimension conforme de  $\partial\Delta_{int}$  est-elle 2 ?*

De nouveau, cette question est suggérée par le cas fuchsien. Dans ce cas, le bord d'un immeuble d'épaisseur intermédiaire possède des points de coupures locaux et sa dimension conforme est 1 (voir Exemple 3.2(ii)). En dimension 3, les points de coupures locaux sont remplacés par des « cercles de coupures locaux ». De manière générale, il est beaucoup plus difficile de comprendre l'influence d'un cercle de coupure locale sur le groupe. Cependant, dans ce cas précis une analyse fine du module combinatoire au bord de l'appartement pourrait servir à répondre positivement à la question. Cela constituerait un exemple intéressant de groupe avec un bord non-sphérique de dimension conforme 2.

De nouveau, on peut substituer l'hécatonicosachore au dodécaèdre et se demander si le bord de l'immeuble d'épaisseur intermédiaire ainsi obtenu est de dimension conforme 3.

### 7.3. Généricité

Disons pour conclure que la CLP et, a fortiori, la propriété analytique de Loewner sont des propriétés qui apparaissent de manière exotique au bord des groupes. Pour le moment, nous ne connaissons pas de cadre dans lequel ces propriétés soient génériques. Tout résultat de ce type serait un progrès majeur pour l'utilisation de ces techniques. Cependant rien n'indique qu'un tel cadre existe et tous les nouveaux exemples, aussi exotiques soient ils, sont intéressants à étudier.

QUESTION 7.3. — *Dans quelle classe de groupes la CLP est-elle une propriété générique ?*

Des candidats naturels pourraient être les groupes aléatoires, dans le modèle à peu de relateurs ou à densité, dont la dimension conforme est déjà connue.

*Remarque 7.4.* — La topologie au bord des immeubles d'épaisseur intermédiaire  $\Delta_{int}$  est plus rigide que celle au bord des immeubles épais. En particulier, elle suffit à montrer que ces immeubles vérifient la rigidité de Mostow (cf. [26]).

## Remerciements

L'auteur remercie vivement Pierre Will, pour lui avoir donné l'opportunité de publier ce survol, ainsi que Marc Bourdon, pour les quatre années de discussions qui ont nourri ce texte. Il est aussi reconnaissant au relecteur pour ses remarques et corrections précises.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] B. BEEKER & N. LAZAROVICH, « Sphere boundaries of hyperbolic groups », <https://arxiv.org/abs/1512.00866>, 2016.
- [2] R. BENEDETTI & C. PETRONIO, *Lectures on hyperbolic geometry*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1992, xiv+330 pages.
- [3] M. BONK & B. KLEINER, « Quasisymmetric parametrizations of two-dimensional metric spheres », *Invent. Math.* **150** (2002), n° 1, p. 127-183.
- [4] ———, « Conformal dimension and Gromov hyperbolic groups with 2-sphere boundary », *Geom. Topol.* **9** (2005), p. 219-246.
- [5] M. BOURDON, « Mostow type rigidity theorems », to appear in *Handbook of Group Actions*.
- [6] ———, « Immeubles hyperboliques, dimension conforme et rigidité de Mostow », *Geom. Funct. Anal.* **7** (1997), n° 2, p. 245-268.
- [7] M. BOURDON & B. KLEINER, « Combinatorial modulus, the combinatorial Loewner property, and Coxeter groups », *Groups Geom. Dyn.* **7** (2013), n° 1, p. 39-107.
- [8] M. BOURDON & H. PAJOT, « Poincaré inequalities and quasiconformal structure on the boundary of some hyperbolic buildings », *Proc. Amer. Math. Soc.* **127** (1999), n° 8, p. 2315-2324.
- [9] ———, « Rigidity of quasi-isometries for some hyperbolic buildings », *Comment. Math. Helv.* **75** (2000), n° 4, p. 701-736.
- [10] ———, « Cohomologie  $l_p$  et espaces de Besov », *J. Reine Angew. Math.* **558** (2003), p. 85-108.
- [11] B. H. BOWDITCH, « Cut points and canonical splittings of hyperbolic groups », *Acta Math.* **180** (1998), n° 2, p. 145-186.
- [12] M. BUCHER, M. BURGER & A. IOZZI, « A dual interpretation of the Gromov-Thurston proof of Mostow rigidity and volume rigidity for representations of hyperbolic lattices », in *Trends in harmonic analysis*, Springer INdAM Ser., vol. 3, Springer, Milan, 2013, p. 47-76.
- [13] J. W. CANNON & E. L. SWENSON, « Recognizing constant curvature discrete groups in dimension 3 », *Trans. Amer. Math. Soc.* **350** (1998), n° 2, p. 809-849.
- [14] M. CARRASCO PIAGGIO, « On the conformal gauge of a compact metric space », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **46** (2013), n° 3, p. 495-548 (2013).
- [15] A. CLAIS, « Combinatorial Modulus on Boundary of Right-Angled Hyperbolic Buildings », *Anal. Geom. Metr. Spaces* **4** (2016), p. Art. 1.
- [16] ———, « Conformal dimension on boundary of right-angled hyperbolic buildings », <https://arxiv.org/abs/1602.08611>, 2016.
- [17] M. COORNAERT, T. DELZANT & A. PAPADOPOULOS, *Géométrie et théorie des groupes*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1441, Springer-Verlag, Berlin, 1990, Les groupes hyperboliques de Gromov. [Gromov hyperbolic groups], With an English summary, x+165 pages.

- [18] É. GHYS & P. DE LA HARPE, « Espaces métriques hyperboliques », in *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov (Bern, 1988)*, Progr. Math., vol. 83, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, p. 27-45.
- [19] M. GROMOV, « Hyperbolic groups », in *Essays in group theory*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 8, Springer, New York, 1987, p. 75-263.
- [20] P. HAÏSSINSKY, « Empilements de cercles et modules combinatoires », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **59** (2009), n° 6, p. 2175-2222.
- [21] ———, « Géométrie quasiconforme, analyse au bord des espaces métriques hyperboliques et rigidités [d'après Mostow, Pansu, Bourdon, Pajot, Bonk, Kleiner...] », *Astérisque* (2009), n° 326, p. Exp. No. 993, ix, 321-362 (2010), Séminaire Bourbaki. Vol. 2007/2008.
- [22] J. HEINONEN, *Lectures on analysis on metric spaces*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2001, x+140 pages.
- [23] J. HEINONEN & P. KOSKELA, « Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry », *Acta Math.* **181** (1998), n° 1, p. 1-61.
- [24] S. KEITH & T. J. LAAKSO, « Conformal Assouad dimension and modulus », *Geom. Funct. Anal.* **14** (2004), n° 6, p. 1278-1321.
- [25] B. KLEINER, « The asymptotic geometry of negatively curved spaces : uniformization, geometrization and rigidity », in *International Congress of Mathematicians. Vol. II*, Eur. Math. Soc., Zürich, 2006, p. 743-768.
- [26] J.-F. LAFONT, « Rigidity of hyperbolic  $P$ -manifolds : a survey », *Geom. Dedicata* **124** (2007), p. 143-152.
- [27] C. LOEWNER, « On the conformal capacity in space », *J. Math. Mech.* **8** (1959), p. 411-414.
- [28] J. M. MACKAY, « Spaces and groups with conformal dimension greater than one », *Duke Math. J.* **153** (2010), n° 2, p. 211-227.
- [29] ———, « Conformal dimension via subcomplexes for small cancellation and random groups », to appear in *Math. Annalen.*, <https://arxiv.org/abs/1409.0802>, 2014.
- [30] J. M. MACKAY & J. T. TYSON, *Conformal dimension*, University Lecture Series, vol. 54, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010, Theory and application, xiv+143 pages.
- [31] J. M. MACKAY, J. T. TYSON & K. WILDRICK, « Modulus and Poincaré inequalities on non-self-similar Sierpiński carpets », *Geom. Funct. Anal.* **23** (2013), n° 3, p. 985-1034.
- [32] V. MARKOVIC, « Criterion for Cannon's conjecture », *Geom. Funct. Anal.* **23** (2013), n° 3, p. 1035-1061.
- [33] G. D. MOSTOW, « Quasi-conformal mappings in  $n$ -space and the rigidity of hyperbolic space forms », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1968), n° 34, p. 53-104.
- [34] P. PANSU, « Dimension conforme et sphère à l'infini des variétés à courbure négative », *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.* **14** (1989), n° 2, p. 177-212.
- [35] ———, « Métriques de Carnot-Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un », *Ann. of Math. (2)* **129** (1989), n° 1, p. 1-60.
- [36] F. PAULIN, « Un groupe hyperbolique est déterminé par son bord », *J. London Math. Soc. (2)* **54** (1996), n° 1, p. 50-74.
- [37] D. SULLIVAN, « On the ergodic theory at infinity of an arbitrary discrete group of hyperbolic motions », in *Riemann surfaces and related topics : Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference (State Univ. New York, Stony Brook, N.Y., 1978)*, Ann. of Math. Stud., vol. 97, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1981, p. 465-496.
- [38] W. P. THURSTON, « The Geometry and Topology of Three-Manifolds », Notes of Princeton University, <http://library.msri.org/books/gt3m/>, 1980.



- [39] J. T. TYSON, « Quasiconformality and quasisymmetry in metric measure spaces », *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* **23** (1998), n° 2, p. 525-548.
- [40] J. VÄISÄLÄ, *Lectures on  $n$ -dimensional quasiconformal mappings*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 229, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971, xiv+144 pages.
- [41] ———, « Quasi-Möbius maps », *J. Analyse Math.* **44** (1984/85), p. 218-234.
- [42] X. XIE, « Quasi-isometric rigidity of Fuchsian buildings », *Topology* **45** (2006), n° 1, p. 101-169.

Antoine CLAIS  
Technion  
Department of Mathematics  
32000 Haifa (Israel)  
aclais@tx.technion.ac.il