

SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

LAURENT GUILLOPÉ

Sur la théorie spectrale de quelques variétés non compactes

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 4 (1985-1986), p. 115-126

http://www.numdam.org/item?id=TSG_1985-1986__4__115_0

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Chambéry-Grenoble), 1985-1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA THÉORIE SPECTRALE DE QUELQUES VARIÉTÉS NON COMPACTES

par *Laurent GUILLOPÉ*

On s'intéresse ici à la théorie spectrale d'opérateurs différentiels (en pratique des laplaciens) définis sur des variétés riemanniennes X non compactes. Voici quelques situations où nos résultats s'appliqueront naturellement :

- X est une variété cylindrique à l'infini i.e. X est l'union d'une variété à bord compacte et d'un nombre fini de produits riemanniens du type $Y \times \mathbb{R}^+$ avec Y compacte. On prendra pour hamiltonien le laplacien sur les fonctions (comme dans les deux situations suivantes) ([2]);

- X est un espace localement symétrique $\Gamma \backslash S$ non compact, de volume fini dont la compactification de Borel-Serre est une variété à bord. S est l'espace symétrique associé à un groupe de Lie réel semi-simple G_∞ contenant Γ comme sous-groupe discret ([6]);

- X est une variété à pointes, union d'une partie compacte et d'un nombre fini de parties cylindriques ou de pointes (i.e. parties non compactes élémentaires des espaces localement symétriques du type précédent). On citera l'exemple des variétés avec un nombre fini de pointes et à courbure constante en dehors d'un compact ([5]);

- dans un des cas précédents, on ajoute à la donnée de X celle d'un fibré hermitien, par exemple un fibré spinoriel avec coefficient, avec son laplacien provenant d'opérateurs de Dirac ([7]).

Abandonnant ce cadre géométrique, on citera l'opérateur de Schrödinger H sur la droite réelle, avec potentiel régulier et constant en dehors d'un compact. Cet exemple emprunté à la mécanique quantique peut, en fait, être considéré comme le paradigme des situations que l'on vient d'énumérer : plus, il inspire le modèle abstrait introduit ci-dessous et dont l'étude est au cœur de cet exposé. Nous utiliserons par la suite tout à fait librement une terminologie empruntée à la quantique, cela donnera, selon nous, quelques images analogiques commodes, on

évitera d'en demander plus.

Soit $S(\mu)$ le système, qu'on dira au potentiel $\tilde{\mu}(\mu)$ ($\tilde{\mu}(\mu) \geq 0$), dont l'espace des états est l'espace de Hilbert $\mathcal{X}(\mu) = L^2(\mathbb{R}^+, dx_\mu)$ et l'énergie donnée par la forme quadratique

$$Q(\mu)(f) = \int_0^\infty \{|f'(x_\mu)|^2 + \tilde{\mu}(\mu)|f(x_\mu)|^2\} dx_\mu$$

de domaine $H^1(\mathbb{R}^+, dx_\mu)$. Soit S_{int} un système dit d'interaction, dont l'espace des états est l'espace de Hilbert \mathcal{X}_{int} et l'énergie donnée par une forme quadratique Q_{int} de domaine \mathcal{D}_{int} telle que l'injection $\mathcal{D}_{\text{int}} \hookrightarrow \mathcal{X}_{\text{int}}$ soit compacte (ce qui correspondra à une interaction à courte portée).

Etant donnée une famille $\mathcal{M} = \{\mu\}$ et un système d'interaction S_{int} , nous noterons S_0 le système (dit libre) associé, dont l'espace des états est la somme hilbertienne $\mathcal{X} = \mathcal{X}_{\text{int}} \oplus \bigoplus_{\mu \in \mathcal{M}} \mathcal{X}(\mu)$ et la forme quadratique $Q_0 = Q_{\text{int}} \oplus \bigoplus_{\mu \in \mathcal{M}} Q_\mu$.

Par système avec interaction (associé à la famille \mathcal{M} et au système \mathcal{X}_{int}), nous entendons un système S d'espace d'états \mathcal{X} et d'énergie donnée par une forme quadratique Q , de domaine $\mathcal{D}(Q)$ inclus dans $\mathcal{D}(Q_0)$, telle que, si l'on note $\mathcal{X}_\varepsilon(\mu) = L^2([\varepsilon, +\infty], dx_\mu)$ et $\mathcal{D}_\varepsilon(\mu) = H^1([\varepsilon, +\infty], dx_\mu)$, on ait

$$\mathcal{D}(Q) \cap \bigoplus_{\mu} \mathcal{X}_\varepsilon(\mu) = \bigoplus_{\mu} \mathcal{D}_\varepsilon(\mu) \text{ et } Q|_{\mathcal{D}_\varepsilon(\mu)} = Q(\mu) \quad (\forall \varepsilon > 0).$$

L'interaction des systèmes $S(\mu)$ est donnée par leur couplage via le système d'interaction S_{int} .

Au système S on associe le spectre de potentiel $\sigma_p(S) = \{\tilde{\mu}(\mu) \mid \mu \in \mathcal{M}\}$ et on note $m(\tilde{\mu})$ (resp. $M(\tilde{\mu})$) le nombre de systèmes avec potentiel $\tilde{\mu}$ (resp. au plus égal à $\tilde{\mu}$). On fera l'hypothèse suivante :

(H0) $M(\tilde{\mu})$ est à croissance polynomiale.

L'analyse spectrale de l'hamiltonien H du système S est résumée dans le théorème suivant :

THÉORÈME 0.1. — (a) H a un spectre ponctuel avec comme seul point d'accumulation éventuel $+\infty$.

(b) L'opérateur H a pour spectre absolument continu $[\tilde{\mu}_1, +\infty[$ et opère sur son sous-espace d'absolue continuité de manière unitairement équivalente à H_0 .

(c) Le spectre singulier continu de H est vide.

Les arguments de Donnelly [2] donnent l'énoncé (a) tandis que la théorie de la diffusion à la Enss, telle qu'explicitée par Perry [8], livre les résultats sur le spectre continu. On se rapportera aux notes de l'auteur pour les adaptations nécessaires.

Affiner l'étude du spectre absolument continu de l'hamiltonien H en introduisant l'analogie des ondes planes monochromatiques de la mécanique quantique,

qui apparaissent comme des séries d'Eisenstein dans l'étude spectrale des quotients $\Gamma \backslash G$, permet de préciser la forme des opérateurs d'onde et de l'opérateur (et des matrices) de diffusion, puis de prouver des identités de Maaß-Selberg utilisées dans les calculs de formule de trace et de théorème d'indice.

On définit ainsi la notion de systèmes d'ondes planes $E_{\bar{\mu}}(\lambda)$ dépendant de deux nombres quantiques : le potentiel $\bar{\mu}$ et une énergie complexe λ dans un ensemble FP , dit feuillet physique. Le système $E_{\bar{\mu}}(\lambda)$ est un élément de $\text{HOM}(\mathcal{C}^m(\bar{\mu}), \mathcal{H}_{\text{loc}})$ où \mathcal{H}_{loc} est l'espace de Banach des fonctions d'états localement dans \mathcal{H} . En utilisant d'autres nombres quantiques (qui existent de manière naturelle dans certains systèmes cités ci-dessus), on aurait pu introduire des véritables fonctions d'ondes planes. Le lecteur se convaincra aisément de l'intérêt à ne pas introduire trop tôt ces règles de sélection.

En fait c'est le bord du feuillet FP , contenant le spectre d'énergie réelle qui nous intéresse. On introduit la surface spectrale Σ du système S : c'est une surface de Riemann contenant le feuillet FP , revêtement ramifié de \mathbb{C} au-dessus du spectre de potentiel $\sigma_p(S)$. On a alors le résultat fondamental :

THÉORÈME 0.2. — *Pour tout $\bar{\mu}$, $E_{\bar{\mu}}(\lambda)$ ($\lambda \in FP$) se prolonge méromorphiquement à Σ .*

La méthode de démonstration consiste en une extension de celle employée par Colin de Verdière pour le prolongement des séries d'Eisenstein sur une surface de Riemann ([1]).

On obtient comme corollaire immédiat un ensemble d'équations fonctionnelles, ensemble paramétré par les automorphismes du revêtement (Σ, \mathbb{C}) . En fait ce n'est que la version explicite de la monodromie du faisceau localement constant, de base $\mathbb{C} \setminus \sigma_p(S)$, engendré localement par les sections $E_{\bar{\mu}}$.

Après avoir exprimé les opérateurs d'onde $W_{\pm} = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH} e^{-itH_0}$ en terme des systèmes d'ondes, on peut donner une forme quasi-explicite aux matrices de diffusion à l'aide de coefficients intervenant dans l'écriture des équations fonctionnelles. Nous donnons dans le paragraphe 5 les énoncés précis de ces résultats.

Le caractère unitaire des matrices de diffusion donne une première famille de relations entre ces coefficients évalués aux énergies réelles. On en obtient d'autres à partir de relations à la Maaß-Selberg i.e. du calcul de fonctions d'onde tronquées. Remarquons que ces relations de Maaß-Selberg sont à la base des démonstrations classiques ([3]) du prolongement méromorphe des séries d'Eisenstein.

On termine en appliquant les résultats précédents à la situation archétype, celle de l'opérateur de Schrödinger unidimensionnel avec un potentiel constant à l'infini. Les situations géométriques sont plus riches, mais demandent un matériel qu'on ne peut développer ici : signalons toutefois que, pour un laplacien sur un espace symétrique de rang 1, les coefficients de transfert $T_{\bar{\mu}, \bar{\mu}'}$ introduits ci-dessous sont nuls pour $\bar{\mu} \neq \bar{\mu}'$ et des matrices diagonales de blocs 2×2 sinon (cela résulte de l'étude d'Harish-Chandra sur le terme constant des séries d'Eisenstein).

1. La surface spectrale

Soit Σ la surface de Riemann associée aux fonctions racine carrée ($z \rightarrow \sqrt{z - \tilde{\mu}}, \tilde{\mu} \in \sigma_p$). C'est un revêtement de \mathbb{C} , d'ordre fini si $\#\sigma_p$ est fini et infini sinon, ramifié au dessus de σ_p , dont on notera $\tilde{\lambda}$ la projection. Dans la suite, λ (resp. Λ) notera la variable générique dans $\mathbb{C} \setminus [\tilde{\mu}_1, +\infty[$ (resp. Σ) et on identifiera $\mathbb{C} \setminus [\tilde{\mu}_1, +\infty[$ à un feuillet FP (le feuillet physique) de Σ de telle sorte que les fonctions racine carrée ($\Lambda \rightarrow \sqrt{\Lambda - \tilde{\mu}}, \tilde{\mu} \in \sigma_p$) définies sur Σ (par construction de Σ) prennent des valeurs complexes de partie imaginaire non négative sur FP ($\lambda \rightarrow \sqrt{\lambda - \tilde{\mu}}$, ainsi que d'autres fonctions de la variable λ , notent des fonctions définies sur FP . Remplacer λ par Λ indiquera un prolongement méromorphe à Σ qu'on aura justifié). La surface Σ sera appelée *surface spectrale* du système S .

S'il n'y a qu'une seule masse, $(\Sigma, \mathbb{C}, \tilde{\lambda})$ s'identifie au revêtement de \mathbb{C} par lui-même avec la projection ($\sigma \rightarrow (a\sigma + b)^2 + \tilde{\mu}$) (a, b complexes, a non nul), le feuillet physique FP est alors $\{\sigma \in \mathbb{C} \mid \Im m(a\sigma + b) > 0\}$ et l'application racine carrée $\sqrt{\Lambda - \tilde{\mu}} = a\sigma + b$. S'il y a deux masses, Σ s'identifie à la courbe de \mathbb{C}^2 $\{\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \mid \lambda_1^2 + \tilde{\mu}_1 = \lambda_2^2 + \tilde{\mu}_2\}$, avec application projection $\tilde{\lambda}(\Lambda) = \lambda_1^2 + \tilde{\mu}_1$ et racines carrées $\sqrt{\Lambda - \tilde{\mu}_i} = \lambda_i$; on a un plongement de Σ dans \mathbb{R}^3 comme un hyperboloïde à une nappe. En général, on peut prendre pour Σ la partie de \mathbb{C}^{σ_p} d'équation $\lambda_{\tilde{\mu}_1}^2 + \tilde{\mu}_1 = \lambda_{\tilde{\mu}_2}^2 + \tilde{\mu}_2 = \dots$.

Le groupe G d'automorphismes du revêtement $(\Sigma, \mathbb{C}, \tilde{\lambda})$ est décrit en termes de générateurs et relations de la manière suivante : A chaque lacet $\gamma_{\tilde{\mu}}$, générateur de $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{\tilde{\mu}\}, i)$, de degré 1 avec l'orientation standard de \mathbb{C} et homotope à zéro dans $(\mathbb{C} \setminus \sigma_m) \cup \{\tilde{\mu}\}$, on associe un générateur, noté $\gamma_{\tilde{\mu}}$. Les uniques relations, en sus des relations de commutativité $\gamma_{\tilde{\mu}} \gamma_{\tilde{\mu}'} \gamma_{\tilde{\mu}}^{-1} \gamma_{\tilde{\mu}'}^{-1} = 1$, sont $\gamma_{\tilde{\mu}}^2 = 1$.

Le groupe G possède un autre système $\{\gamma(\tilde{\mu})\}$ de générateurs (avec les mêmes relations) définis par $\gamma(\tilde{\mu}) = \prod_{\tilde{\nu} \leq \tilde{\mu}} \gamma_{\tilde{\nu}}$. Le premier sera utilisé pour écrire les équations fonctionnelles de la partie 4 alors que le second interviendra dans le calcul des opérateurs d'ondes et des matrices de diffusion.

2. Systèmes d'ondes planes

Commençons par quelques notations.

Etant donné un système S et son espace d'états \mathcal{H} , on introduit

$$(2.1) \quad \mathcal{H}_{\text{loc}} = \mathcal{H}_{\text{int}} \oplus \bigoplus_{\mu \in \mathcal{M}} \mathcal{H}_{\text{loc}}(\mu)$$

avec $\mathcal{H}_{\text{loc}}(\mu) = L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+, dx_\mu)$. Sur $\mathcal{H}_\varepsilon(\mu) \cap \mathcal{D}(H)$, l'hamiltonien H opère comme $H(\mu) = -d^2/dx_\mu^2 + \tilde{\mu}(\mu)$. On notera H_{loc} le prolongement de H à $\mathcal{D}(H) + \bigoplus_{\mu \in \mathcal{M}} \mathcal{H}_{\text{loc}}(\mu)$, défini sur $L^2_{\text{loc}}([\varepsilon, \infty[, dx_\mu)$ ($\varepsilon > 0$) par $H_{\text{loc}} = H(\mu)$ au sens distribution. Adoptant la décomposition (2.1), on parlera pour un élément h de \mathcal{H}_{loc} de ses composantes dans \mathcal{H}_{int} , dans $\mathcal{H}(\mu)$ et on écrira $h = (h_{\text{int}}, (h_\mu))$.

Pour une fonction χ régulière sur \mathbb{R}^+ , valant 1 sur $[1, \infty[$ et nulle au voisinage de l'origine, on notera aussi par χ l'opérateur de multiplication par χ induit sur \mathcal{H}_{loc} et défini par $\chi \cdot (h_{\text{int}}, (h_\mu)) = (0, (\chi(x_\mu)h_\mu))$.

Notons alors par $\Psi_{\mu}^{\pm}(\lambda)$ ($\lambda \in FP$) l'élément de \mathcal{H}_{loc} dont la seule composante non nulle est dans \mathcal{H}_{loc} et vérifie $\Psi_{\mu}^{\pm}(\lambda)(x_{\mu}) = \chi(x_{\mu})e^{\pm i\sqrt{\lambda - \bar{\mu}(\mu)}x_{\mu}}$, $\mathcal{V}_{\mu}^{\pm}(\lambda)$ l'opérateur d'identification naturelle de $C^{m(\bar{\mu})} = \bigoplus_{\mu: \bar{\mu}(\mu) = \bar{\mu}} C$ avec le sous-espace $\bigoplus_{\mu: \bar{\mu}(\mu) = \bar{\mu}} C\Psi_{\mu}^{\pm}(\lambda)$ de \mathcal{H}_{loc} . Remarquons que $(H_{loc} - \lambda)\Psi_{\mu}^{\pm}(\lambda)$ est dans \mathcal{H} .

Pour h_1 et h_2 dans \mathcal{H}_{loc} , on écrira $h_1 \sim h_2$ si h_1 et h_2 ont des composantes dans $\mathcal{H}_{loc}(\mu)$ égales pour $x_{\mu} \geq 2$, et ce pour tout μ . On utilisera une notation analogue pour les applications à valeurs dans \mathcal{H}_{loc} .

DÉFINITION 2.1. — Soit λ dans FP et $\bar{\mu}$ un potentiel de $\sigma_p(S)$. Le système d'ondes planes, d'énergie λ et de potentiel $\bar{\mu}$, est l'endomorphisme $E_{\bar{\mu}}(\lambda)$ de $C^{m(\bar{\mu})}$ dans \mathcal{H}_{loc} défini par

$$E_{\bar{\mu}}(\lambda) = \mathcal{V}_{\bar{\mu}}^{-}(\lambda) - (H - \lambda)^{-1}(H_{loc} - \lambda)\mathcal{V}_{\bar{\mu}}^{-}(\lambda).$$

Remarque 2.2. — Si $m(\bar{\mu}) = 1$, $E_{\bar{\mu}}(\lambda)$ est déterminé par la fonction d'ondes $E_{\bar{\mu}}(\lambda)1$, on identifiera système d'ondes et fonction d'ondes dans le cas d'un potentiel $\bar{\mu}$ sans multiplicité.

PROPOSITION 2.3. — (a) Il existe des fonctions méromorphes $T_{\bar{\mu}'\bar{\mu}}(\lambda)$, définies pour λ dans FP , à valeurs dans $\text{HOM}(C^{m(\bar{\mu})}, C^{m(\bar{\mu}')})$, telles que

$$E_{\bar{\mu}}(\lambda) \sim \mathcal{V}_{\bar{\mu}}^{-}(\lambda) + \sum_{\bar{\mu}' \in \sigma_p} \mathcal{V}_{\bar{\mu}'}^{+}(\lambda)T_{\bar{\mu}'\bar{\mu}}(\lambda).$$

(b) Le système d'ondes $E_{\bar{\mu}}(\lambda)$ est caractérisé par les deux propriétés suivantes :

- (i) $E_{\bar{\mu}}(\lambda)\Phi - \mathcal{V}_{\bar{\mu}}^{-}(\lambda)\Phi \in \mathcal{H}$, $\Phi \in C^{m(\bar{\mu})}$, $\lambda \in FP$;
- (ii) $(H_{loc} - \lambda)E_{\bar{\mu}}(\lambda) = 0$, $\lambda \in FP$.

(c) Pour tout potentiel $\bar{\mu}$, $T_{\bar{\mu}\bar{\mu}}(\lambda)$ est inversible (en tant que fonction méromorphe) pour λ dans FP .

Preuve. — La composante de $(H - \lambda)^{-1}((H_{loc} - \lambda)\mathcal{V}_{\bar{\mu}}^{-}(\lambda)\Phi)$ dans $\mathcal{H}(\mu)$ est une combinaison linéaire d'exponentielles $\Psi_{\mu}^{\pm}(\lambda)$ ($x_{\mu} \geq 2$), dont seule $\Psi_{\mu}^{+}(\lambda)$ est de carré intégrable : le (a) en résulte. Le (b) se déduit de la définition des systèmes $E_{\bar{\mu}}(\lambda)$ et du fait que H étant autoadjoint, $FP \setminus \mathbb{R}$ ne contient pas de valeurs propres. Enfin, si $T_{\bar{\mu}\bar{\mu}}(\lambda)$ était non inversible, pour Φ élément non trivial de son noyau, les composantes de potentiel $\bar{\mu}$ de $(H - \lambda)^{-1}((H_{loc} - \lambda)\mathcal{V}_{\bar{\mu}}^{-}(\lambda)\Phi)$ seraient nulles sans que cela soit vrai pour $(H_{loc} - \lambda)\mathcal{V}_{\bar{\mu}}^{-}(\lambda)\Phi$, ce qui est impossible, d'après la théorie des équations différentielles linéaires du second ordre. \square

Inspiré par la théorie de la diffusion sur la droite, on introduit les définitions :

DÉFINITION 2.4. — On appelle coefficients de transfert les matrices $T_{\bar{\mu}'\bar{\mu}}$. On notera $T_{\bar{\mu}'\bar{\mu}}$ par $C_{\bar{\mu}}$.

3. Le prolongement des systèmes d'ondes planes

Ce paragraphe est consacré tout entier à la démonstration du théorème suivant :

THÉORÈME 3.1. — *Pour tout potentiel $\tilde{\mu}$, le système d'ondes planes $E_{\tilde{\mu}}(\lambda)$ ($\lambda \in FP$) admet un prolongement méromorphe à Σ .*

Nous allons nous limiter à montrer le prolongement méromorphe à Σ de l'onde plane $E_{\tilde{\mu}_1}(\lambda)\Phi_{\mu_1}$ ($\lambda \in FP$). La démonstration vaut évidemment pour toutes les fonctions d'ondes $E_{\tilde{\mu}}(\lambda)\Phi$ ($\tilde{\mu} \in \sigma_m, \Phi \in C^m(\tilde{\mu})$) : le théorème en résultera.

Soit $\Sigma_l = \tilde{\lambda}^{-1}(C \setminus [\tilde{\mu}_l, +\infty])$ et Σ_l^P la composante connexe du feuillet physique FP dans Σ_l . Vu que $\Sigma = \bigcup_{l \geq 1} \Sigma_l^P$, il suffit d'effectuer le prolongement méromorphe à Σ_l^P pour l quelconque, afin d'obtenir le prolongement méromorphe à Σ tout entier. Soit donc l arbitraire, fixé jusqu'à la fin de ce paragraphe. On note par Λ_l le point générique de Σ_l^P .

Soit $M_l = \{\mu \mid \tilde{\mu}(\mu) < \tilde{\mu}_l\}$. Pour a dans $A_l = (\mathbf{R}_+^+)^{M_l}$ (avec $a_{\mu_1} = 2$), notons par S^a le système d'interaction d'espace d'états $\mathcal{H}(S^a) = \mathcal{H}_{\text{int}} \oplus \bigoplus_{\mu \in P} L^2([0, a_\mu], dx_\mu)$ et d'énergie donnée par la restriction de la forme quadratique Q . Introduisons l'onde plane $E^a(\lambda)$ ($\lambda \in FP$) définie par

$$E^a(\lambda) = \mathcal{V}_{\tilde{\mu}_1}^-(\lambda)\Phi_{\mu_1} - (H(S^a) - \lambda)^{-1}((H_{\text{loc}} - \lambda)\mathcal{V}_{\tilde{\mu}_1}^-(\lambda)\Phi_{\mu_1}).$$

A priori, $E^a(\lambda)$ est un élément de $\mathcal{H}(S^a)_{\text{loc}}$ vérifiant $(H_{\text{loc}}^a - \lambda)E^a(\lambda) = 0$. Par prolongement analytique (en les variables $x_\mu, \mu \in M_l$), on considère dans la suite $E^a(\lambda)$ comme un élément de $\mathcal{H}(S)_{\text{loc}}$. Les composantes de $E^a(\lambda)$ dans $\mathcal{H}(\mu)_{\text{loc}}$ sont précisées dans le tableau suivant :

$\mathcal{H}(\mu_1)$	$e^{-i\sqrt{\lambda - \tilde{\mu}_1} x_{\mu_1}} + t_{\mu_1}^a(\lambda) \cos \sqrt{\lambda - \tilde{\mu}_1}(x_{\mu_1} - a_{\mu_1})$
$\mathcal{H}(\mu), \mu \in M_l - \{\mu_1\}$	$t_\mu^a(\lambda) \cos \sqrt{\lambda - \tilde{\mu}(\mu)}(x_\mu - a_\mu)$
$\mathcal{H}(\mu), \mu \notin M_l$	$t_\mu^a(\lambda) e^{i\sqrt{\lambda - \tilde{\mu}(\mu)}(x_\mu - a_\mu)}$

Les fonctions $t_\mu^a(\lambda)$ sont méromorphes sur FP et analytiques par rapport au paramètre a . On note $K' = \{\mu \in M_l \setminus \{\mu_1\} \mid t_\mu^a \equiv 0 \quad \forall a \in A_l\}$ et $K = M_l \setminus K'$. On suppose M totalement ordonné de telle manière que la projection $M \rightarrow \sigma_p$ soit croissante et μ' désignera le successeur de μ .

LEMME 3.2. — *Soit $(a(k))$ une suite d'éléments de \mathbf{R}^{M_l} indexée par K telle que, pour tout k dans K , on ait :*

- (i) $a(k)_{\mu_1} = 2$;
- (ii) $a(k^+)_{k^+} \neq a(k)_{k^+}$;
- (iii) $a(j)_{k^+} = a(k^+)_{k^+}$, $j \geq k^+$.

La famille $(E^{a(k)}(\lambda))_{k \in K}$ est libre pour λ dans le complémentaire d'un ensemble dénombrable du feuillet FP .

Preuve. — Soit U un ouvert dense de \mathbb{C} dont le complémentaire contient l'ensemble des zéros et des pôles des $t_k^{a(k)}$ ($k \in K \setminus \{\mu_1\}$) et celui des zéros des fonctions $\sin \sqrt{\lambda - \tilde{\mu}(\mu)}(a(\mu^+)_{\mu^+} - (a(\mu)_{\mu^+}))$ pour tous les μ dans K . Vu la construction de K , $PF \setminus U$ est dénombrable. On suppose désormais λ dans U .

Soit (α_k) une suite de \mathbb{C}^K telle que $\sum_{k \in K} \alpha_k E^{a(k)}(\lambda) = 0$. Montrons par récurrence que α_k est nul pour tout k dans K . Si $K = \{\mu_1\}$, on a $\alpha_{\mu_1} = 0$.

Sinon, on a

$$\sum_{k \in K} \alpha_k \frac{dE^{a(k)}}{dx_{\mu_1^+}}(\lambda) (a(\mu_1^+)_{\mu_1^+}) = \\ - \alpha_{\mu_1} t_{\mu_1^+}^{a(\mu_1)} \sqrt{\lambda - \tilde{\mu}_1} \sin \sqrt{\lambda - \tilde{\mu}_1} (a(\mu_1^+)_{\mu_1^+} - a(\mu_1)_{\mu_1^+})$$

et la définition de U implique la nullité de α_{μ_1} .

Supposons α_k nul pour $k < \nu$ ($k \in K$). Si ν est maximal dans K , on a clairement $\alpha_\nu = 0$. Sinon, par l'hypothèse de récurrence, on tire de l'égalité

$$\sum_{k \in K} \alpha_k E^{a(k)}(\lambda) = \sum_{k \geq \nu} \alpha_k E^{a(k)}(\lambda)$$

la nullité de α_ν en utilisant la relation

$$\sum_{k \geq \nu} \alpha_k \frac{dE^{a(k)}}{dx_{\nu^+}}(\lambda) (a(\nu^+)_{\nu^+}) = \\ - \alpha_\nu t_{\nu^+}^{a(\nu)} \sqrt{\lambda - \tilde{\mu}(\nu)} \sin \sqrt{\lambda - \tilde{\mu}(\nu)} (a(\nu^+)_{\nu^+} - a(\nu)_{\nu^+}). \quad \square$$

PROPOSITION 3.3. — *L'onde plane $E_{\tilde{\mu}_1}(\lambda)\Phi_1$ ($\lambda \in FP$) admet un prolongement méromorphe à Σ_1^P .*

Preuve. — D'après le théorème 0.1, l'hamiltonien $H(S^a)$ a pour spectre essentiel $[\tilde{\mu}_1, +\infty[$, vu que $\tilde{\mu}_1(S^a) = \tilde{\mu}_1(S)$ par construction. Ainsi la résolvante $(H(S^a) - \tilde{\lambda}(\Lambda_l))^{-1}$ est méromorphe sur Σ_1^P . On en déduit le prolongement méromorphe de $E^a(\lambda)$ (et par suite des coefficients $t_\mu^a(\lambda)$) en une fonction méromorphe notée $E^a(\Lambda_l)$ (resp. $t_\mu^a(\Lambda_l)$) sur Σ_1^P .

Soit $(a(k))_{k \in K}$ une suite d'éléments de \mathcal{A}_l comme dans le lemme précédent. Soit $(\beta_k(\Lambda_l))_{k \in K}$ une suite de fonctions sur Σ_1^P telle que

$$(3.1) \quad \sum_{k \in K} \beta_k(\Lambda_l) t_\nu^{a(k)}(\Lambda_l) e^{i\sqrt{\Lambda_l - \tilde{\mu}(\nu)} a(k)_\nu} = 0, \quad \nu \in K \setminus \{\mu_1\}.$$

Un tel système (β_k) non trivial de fonctions définies sur Σ_1^P (qu'on peut supposer méromorphes) existe, vu que le système linéaire (3.1) a une inconnue de plus que d'équations. Pour λ dans FP , la somme précédente représente le coefficient de l'exponentielle non L_2 de la composante dans $\mathcal{X}(\nu)_{loc}$ ($\nu \in K \setminus \{\mu_1\}$) de $\sum_{k \in K} \beta_k(\lambda) E^{a(k)}(\lambda)$. Ainsi par construction, les composantes de $\sum_{k \in K} \beta_k(\lambda) E^{a(k)}(\lambda)$ dans $\mathcal{X}(\nu)_{loc}$ sont toutes de carré intégrable pour $\nu \neq \mu_1$.

D'autre part, le coefficient $t_1(\lambda)$ de l'exponentielle non L_2 de la composante dans $\mathcal{H}(\mu_1)_{\text{loc}}$ de $\sum_{k \in K} \beta_k(\lambda) E^{a(k)}(\lambda)$ est

$$t_1(\lambda) = \sum_{k \in K} \beta_k(\lambda) (1 + t_{\mu_1}^{a(k)}(\lambda) e^{i\sqrt{\lambda - \bar{\mu}_1} a(k) \mu_1 / 2})$$

et n'est pas indument nul pour λ dans U . Sinon $\sum_{k \in K} \beta_k(\lambda) E^{a(k)}(\lambda)$ serait un élément de \mathcal{H} , solution de $(H - \lambda)u = 0$ avec un λ non réel éventuellement et donc serait nul, puisque $H(S)$ est un opérateur auto-adjoint : d'après le lemme 3.2, on aurait alors tous les $\beta_k(\lambda)$ indument nuls, ce qui n'est pas.

On en déduit, grâce à la caractérisation de la proposition 2.3, que

$$E_{\bar{\mu}_1}(\lambda) \Phi_{\mu_1} = t_1(\lambda)^{-1} \sum_{k \in K} \beta_k(\lambda) E^{a(k)}(\lambda)$$

et le prolongement méromorphe de $E_{\bar{\mu}_1}(\lambda) \Phi_{\mu_1}$ ($\lambda \in FP$) à Σ_1^P . \square

4. Monodromie et équations fonctionnelles

Sur $\mathbb{C} \setminus \sigma_p$, considérons le faisceau $\mathcal{E}_{\text{loc}}^H$ défini de la manière suivante : Si U est un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C} \setminus \sigma_p$, $\mathcal{E}_{\text{loc}}^H(U)$ est l'espace des solutions $f(\zeta)$ ($\zeta \in U$) dans \mathcal{H}_{loc} , avec dépendance méromorphe en ζ , de $(H_{\text{loc}} - \zeta)f(\zeta) = 0$ telles que $f(\zeta)$ ait au plus un nombre fini de composantes dans $\bigoplus_{\mu \in \mathcal{M}} \mathcal{H}_{\text{loc}}(\mu)$ non de carré intégrable.

D'après ce qui précède, $\mathcal{E}_{\text{loc}}^H$ est engendré localement par les sections $E_{\bar{\mu}}(Z(\zeta)) \Phi$ ($\Phi \in \mathbb{C}^{m(\bar{\mu})}$), où $\zeta \rightarrow Z(\zeta)$ est une section locale du revêtement $(\tilde{\Sigma}, \mathbb{C} \setminus \sigma_p, \tilde{\lambda})$ avec $\tilde{\Sigma} = \Sigma \setminus \tilde{\lambda}^{-1}(\sigma_p)$. Le prolongement analytique définit un transport parallèle le long de tout arc de $\mathbb{C} \setminus \sigma_p$ et la monodromie en chaque point ζ se réduit à une représentation de G dans la fibre $(\mathcal{E}_{\text{loc}}^H)_{\zeta}$. D'après le théorème 3.1, le faisceau $\tilde{\lambda}^* \mathcal{E}_{\text{loc}}^H$, image réciproque de $\mathcal{E}_{\text{loc}}^H$ via $\tilde{\lambda}$ sur $\tilde{\Sigma}$, est isomorphe au faisceau constant de fibre \mathbb{C}^M . La monodromie s'exprime alors par des isomorphismes entre les fibres $(\tilde{\lambda}^* \mathcal{E}_{\text{loc}}^H)_Z$ et $(\tilde{\lambda}^* \mathcal{E}_{\text{loc}}^H)_{gZ}$ (Z au dessus du complexe ζ donné, g dans G). Les équations fonctionnelles, données par les théorèmes suivants, déterminent explicitement ces isomorphismes.

THÉORÈME 4.1. — On a les équations fonctionnelles sur Σ :

$$(4.1) \quad E_{\bar{\mu}}(\gamma_{\bar{\mu}} \Lambda) = E_{\bar{\mu}}(\Lambda) T_{\bar{\mu}\bar{\mu}}^{-1}(\Lambda)$$

$$(4.2) \quad E_{\bar{\mu}'}(\gamma_{\bar{\mu}} \Lambda) = E_{\bar{\mu}'}(\Lambda) - E_{\bar{\mu}}(\Lambda) T_{\bar{\mu}\bar{\mu}}^{-1}(\Lambda) T_{\bar{\mu}\bar{\mu}'}(\Lambda) \quad , \quad \bar{\mu} \neq \bar{\mu}' .$$

Preuve. — Il suffit d'établir les équations pour Λ dans le feuillet physique. Les systèmes $E_{\bar{\mu}}(\lambda)$ ($\lambda \in FP$) sont caractérisés par l'équation différentielle de la proposition 2.3 et l'intégrabilité ou non de leurs composantes dans $\bigoplus_{\mu \in \mathcal{M}} \mathcal{H}(\mu)$. L'automorphisme $\gamma_{\bar{\mu}}$ a une action sur celles-ci déterminée par son action sur les fonctions racine carrée $\sqrt{\Lambda - \bar{\nu}}$ ($\bar{\nu} \in \sigma_p$).

On a

$$E_{\tilde{\mu}}(\lambda) \sim \mathcal{V}_{\tilde{\mu}}^{-}(\lambda) + \sum_{\tilde{\mu}'} \mathcal{V}_{\tilde{\mu}'}^{+}(\lambda) T_{\tilde{\mu}'\tilde{\mu}}(\lambda).$$

Vu les relations $\mathcal{V}_{\tilde{\mu}}^{\pm}(\gamma_{\tilde{\mu}}\lambda) = \mathcal{V}_{\tilde{\mu}}^{\mp}(\lambda)$, $\mathcal{V}_{\tilde{\mu}'}^{\pm}(\gamma_{\tilde{\mu}}\lambda) = \mathcal{V}_{\tilde{\mu}'}^{\pm}(\lambda)$ ($\tilde{\mu} \neq \tilde{\mu}'$), on obtient

$$\begin{aligned} E_{\tilde{\mu}}(\gamma_{\tilde{\mu}}\lambda) &\sim \mathcal{V}_{\tilde{\mu}}^{+}(\lambda) + \mathcal{V}_{\tilde{\mu}}^{-}(\lambda) T_{\tilde{\mu}\tilde{\mu}}(\gamma_{\tilde{\mu}}\lambda) + \sum_{\tilde{\mu}' \neq \tilde{\mu}} \mathcal{V}_{\tilde{\mu}'}^{+}(\lambda) T_{\tilde{\mu}'\tilde{\mu}}(\gamma_{\tilde{\mu}}\lambda) \\ E_{\tilde{\mu}'}(\gamma_{\tilde{\mu}}\lambda) &\sim \mathcal{V}_{\tilde{\mu}'}^{-}(\lambda) + \mathcal{V}_{\tilde{\mu}'}^{-}(\lambda) T_{\tilde{\mu}\tilde{\mu}'}(\gamma_{\tilde{\mu}}\lambda) + \sum_{\tilde{\nu} \neq \tilde{\mu}} \mathcal{V}_{\tilde{\nu}}^{+}(\lambda) T_{\tilde{\nu}\tilde{\mu}'}(\gamma_{\tilde{\mu}}\lambda) \end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned} E_{\tilde{\mu}'}(\gamma_{\tilde{\mu}}\lambda) - E_{\tilde{\mu}}(\lambda) T_{\tilde{\mu}\tilde{\mu}'}(\gamma_{\tilde{\mu}}\lambda) &\sim \mathcal{V}_{\tilde{\mu}'}^{-}(\lambda) + \mathcal{V}_{\tilde{\mu}'}^{+}(\lambda) (T_{\tilde{\mu}'\tilde{\mu}}(\gamma_{\tilde{\mu}}\lambda) - T_{\tilde{\mu}'\tilde{\mu}}(\lambda) T_{\tilde{\mu}\tilde{\mu}'}(\gamma_{\tilde{\mu}}\lambda)) \\ &\quad + \sum_{\tilde{\nu} \neq \tilde{\mu}', \tilde{\mu}} \mathcal{V}_{\tilde{\nu}}^{+}(\lambda) (T_{\tilde{\nu}\tilde{\mu}'}(\lambda) - T_{\tilde{\nu}\tilde{\mu}}(\gamma_{\tilde{\mu}}\lambda) T_{\tilde{\mu}\tilde{\mu}'}(\gamma_{\tilde{\mu}}\lambda)) \\ &\quad - \mathcal{V}_{\tilde{\mu}}^{+}(\lambda) T_{\tilde{\mu}\tilde{\mu}}(\lambda) T_{\tilde{\mu}\tilde{\mu}'}(\gamma_{\tilde{\mu}}\lambda). \end{aligned}$$

Grâce à la caractérisation des systèmes d'ondes donnée par la proposition 2.3, on obtient

$$\begin{aligned} E_{\tilde{\mu}}(\gamma_{\tilde{\mu}}\lambda) &= E_{\tilde{\mu}}(\lambda) T_{\tilde{\mu}\tilde{\mu}}(\gamma_{\tilde{\mu}}\lambda) \\ E_{\tilde{\mu}'}(\gamma_{\tilde{\mu}}\lambda) - E_{\tilde{\mu}}(\lambda) T_{\tilde{\mu}\tilde{\mu}'}(\gamma_{\tilde{\mu}}\lambda) &= E_{\tilde{\mu}'}(\lambda). \end{aligned}$$

En utilisant $\gamma_{\tilde{\mu}}^2 = 1$ et l'inversibilité des coefficients $T_{\tilde{\mu}\tilde{\mu}}$, on termine la démonstration du théorème 4.1. \square

Les équations fonctionnelles (4.1) et (4.2) donnent des relations entre les coefficients de transfert, qu'on résume dans le théorème suivant.

THÉORÈME 4.2. — On a les relations fonctionnelles :

- (i) $T_{\tilde{\mu}\tilde{\mu}}(\gamma_{\tilde{\mu}}\Lambda) = T_{\tilde{\mu}\tilde{\mu}}^{-1}(\Lambda)$
 $T_{\tilde{\mu}'\tilde{\mu}}(\gamma_{\tilde{\mu}}\Lambda) = T_{\tilde{\mu}'\tilde{\mu}}(\Lambda) T_{\tilde{\mu}\tilde{\mu}}^{-1}(\Lambda)$, $\tilde{\mu}' \neq \tilde{\mu}$;
- (ii) pour $\tilde{\mu}' \neq \tilde{\mu}$
 $T_{\tilde{\mu}\tilde{\mu}'}(\gamma_{\tilde{\mu}}\Lambda) = -T_{\tilde{\mu}\tilde{\mu}}^{-1}(\Lambda) T_{\tilde{\mu}\tilde{\mu}'}(\Lambda)$
 $T_{\tilde{\nu}\tilde{\mu}'}(\gamma_{\tilde{\mu}}\Lambda) = T_{\tilde{\nu}\tilde{\mu}'}(\Lambda) - T_{\tilde{\nu}\tilde{\mu}}(\Lambda) T_{\tilde{\mu}\tilde{\mu}}^{-1}(\Lambda) T_{\tilde{\mu}\tilde{\mu}'}(\Lambda)$, $\tilde{\nu} \neq \tilde{\mu}$.

Remarque 4.3. — Il se peut que les coefficients de transfert non diagonaux soient tous nuls (ou partiellement). Ce phénomène survient trivialement dans le cas où il n'y a pas d'interaction entre les systèmes S_{μ} (par exemple pour le système S_0). On l'observe aussi dans le cas des espaces localement symétriques avec leurs séries d'Eisenstein.

Remarque 4.4. — Supposons tous les coefficients de transfert non diagonaux nuls. Alors les équations fonctionnelles pour les systèmes d'ondes et les coefficients de transfert diagonaux (nécessairement non nuls puisque inversibles) s'écrivent:

$$\begin{aligned} E_{\tilde{\mu}}(\gamma_{\tilde{\mu}}\Lambda) &= E_{\tilde{\mu}}(\Lambda) C_{\tilde{\mu}}^{-1}(\Lambda) & C_{\tilde{\mu}}(\gamma_{\tilde{\mu}}\Lambda) &= C_{\tilde{\mu}}^{-1}(\Lambda) \\ E_{\tilde{\mu}}(\gamma_{\tilde{\mu}'}\Lambda) &= E_{\tilde{\mu}}(\Lambda) & C_{\tilde{\mu}}(\gamma_{\tilde{\mu}'}\Lambda) &= C_{\tilde{\mu}}(\Lambda) \quad \tilde{\mu}' \neq \tilde{\mu}. \end{aligned}$$

On en déduit que $E_{\bar{\mu}}$ et $C_{\bar{\mu}}$ sont définis sur la surface de Riemann $\Sigma_{\bar{\mu}}$ (revêtement ramifié d'ordre 2 de \mathbb{C}) de la fonction $\zeta \rightarrow \sqrt{\zeta - \bar{\mu}}$ ($\Sigma_{\bar{\mu}}$, est le quotient de Σ par le groupe $G \setminus \{\gamma_{\bar{\mu}}\}$). Si on identifie $(\Sigma_{\bar{\mu}}, \mathbb{C})$ avec le revêtement $(C_{\bar{\sigma}_{\bar{\mu}}}, \mathbb{C}, \pi_{\bar{\mu}})$ (où la projection de revêtement est définie par $\pi_{\bar{\mu}}(\sigma_{\bar{\mu}}) = (a\bar{\sigma}_{\bar{\mu}} + b)^2 + \bar{\mu}$), les équations fonctionnelles de $E_{\bar{\mu}}$ et $C_{\bar{\mu}}$ prennent la forme habituelle :

$$\begin{aligned} E_{\bar{\mu}}(-\sigma_{\bar{\mu}} - 2b/a) &= E_{\bar{\mu}}(\sigma_{\bar{\mu}})C_{\bar{\mu}}^{-1}(\sigma_{\bar{\mu}}) \\ C_{\bar{\mu}}(-\sigma_{\bar{\mu}} - 2b/a) &= C_{\bar{\mu}}(\sigma_{\bar{\mu}})^{-1}. \end{aligned}$$

5. Opérateurs d'ondes et matrices de diffusion

Une représentation spectrale de H_0 , opérant sur $\Theta_{\mu \in \mathcal{M}} \mathcal{H}(\mu)$, est donnée par l'isométrie \mathcal{T} de $\Theta_{\mu \in \mathcal{M}} \mathcal{H}(\mu)$ sur $\Theta_{\mu \in \mathcal{M}} L^2(|\bar{\mu}(\mu), +\infty[, d\sigma_{\bar{\mu}}(\tau_{\mu}))$ (où $d\sigma_{\bar{\mu}}(\tau)$ est la mesure définie sur $|\bar{\mu}, +\infty[$, absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et de densité $(\pi(\tau - \bar{\mu}))^{-1/2}$),

telle que, si $\varphi = (\varphi_{\mu})$, on ait $\mathcal{T}(\varphi) = (\hat{\varphi}_{\mu})$ où

$$\hat{\varphi}_{\mu}(\tau_{\mu}) = \int_0^{+\infty} \cos \sqrt{\tau_{\mu} - \bar{\mu}(\mu)} x_{\mu} \varphi_{\mu}(x_{\mu}) dx_{\mu} \quad , \tau_{\mu} \geq \bar{\mu}(\mu).$$

On a la formule d'inversion

$$(5.1) \quad \varphi_{\mu}(x_{\mu}) = \int_{\bar{\mu}(\mu)}^{+\infty} \cos \sqrt{\tau_{\mu} - \bar{\mu}(\mu)} x_{\mu} \hat{\varphi}_{\mu}(\tau_{\mu}) d\sigma_{\bar{\mu}}(\tau_{\mu}) \quad , x_{\mu} \geq 0$$

et l'action du groupe unitaire e^{-itH_0} est donnée par

$$(e^{-itH_0} \varphi)_{\mu}(x_{\mu}) = \int_{\bar{\mu}(\mu)}^{+\infty} e^{-it\tau_{\mu}} \cos \sqrt{\tau_{\mu} - \bar{\mu}(\mu)} x_{\mu} \hat{\varphi}_{\mu}(\tau_{\mu}) d\sigma_{\bar{\mu}}(\tau_{\mu}).$$

THÉORÈME 5.1. — Pour φ dans $\Theta_{\mu \in \mathcal{M}} \mathcal{H}(\mu)$, on a

$$\begin{aligned} W_+ \varphi &= \sum_{\mu \in \mathcal{M}} \int_{\bar{\mu}(\mu)}^{+\infty} E_{\bar{\mu}(\mu)}(\gamma(\bar{\mu}(\mu))\tau_{\mu}) \Phi_{\mu} \hat{\varphi}_{\mu}(\tau_{\mu}) d\sigma_{\bar{\mu}}(\tau_{\mu}) \\ W_- \varphi &= \sum_{\mu \in \mathcal{M}} \int_{\bar{\mu}(\mu)}^{+\infty} E_{\bar{\mu}(\mu)}(\tau_{\mu}) \Phi_{\mu} \hat{\varphi}_{\mu}(\tau_{\mu}) d\sigma_{\bar{\mu}}(\tau_{\mu}). \end{aligned}$$

La représentation spectrale introduite ci-dessus donne la structure spectrale absolument continue de H_0 : le H_0 -espace des vecteurs absolument continus de densité à support dans $|\bar{\mu}, \bar{\mu}^+[$ est isomorphe à $\mathcal{H}^{\bar{\mu}} = \Theta_{\bar{\nu} \leq \bar{\mu}} L^2(|\bar{\mu}, \bar{\mu}^+[, C^{m(\bar{\nu})}, d\sigma_{\bar{\nu}})$ avec l'opérateur de multiplication par τ . Par opérateur de diffusion S , on entend la classe d'équivalence unitaire de $W_-^* W_+$. Lu dans l'espace $\Theta_{\bar{\mu} \in \sigma_p} \mathcal{H}^{\bar{\mu}}$, S se diagonalise : sa restriction à $\mathcal{H}^{\bar{\mu}}$ est de la forme $\int_{\bar{\mu}}^{\bar{\mu}^+} S^{\bar{\mu}}(\tau) d\tau$ où $S^{\bar{\mu}}(\tau)$ (la matrice de diffusion) est un opérateur unitaire de $C^{M(\bar{\mu})} = \Theta_{\bar{\mu}(\mu) \leq \bar{\mu}} C^{m(\bar{\mu})}$, avec la métrique hermitienne convenable.

THÉORÈME 5.2. — La matrice de diffusion $S^{\tilde{\mu}}$ (dépendant du paramètre τ dans l'intervalle d'énergie $]\tilde{\mu}, \tilde{\mu}^+[$) est un endomorphisme de $\mathbb{C}^{M(\tilde{\mu})}$, de matrice décomposée par blocs suivant $S^{\tilde{\mu}} = (S_{\tilde{\nu}, \tilde{\pi}}^{\tilde{\mu}})$, où les matrices $S_{\tilde{\nu}, \tilde{\pi}}^{\tilde{\mu}}$ ($\tilde{\nu}, \tilde{\pi} \leq \tilde{\mu}$), d'ordre $(m(\tilde{\pi}), m(\tilde{\nu}))$, représentent les homomorphismes $S_{\tilde{\nu}, \tilde{\pi}}^{\tilde{\mu}}$ des équations fonctionnelles

$$E_{\tilde{\pi}}(\gamma(\tilde{\mu})\Lambda) = \sum_{\tilde{\nu} \leq \tilde{\mu}} E_{\tilde{\nu}}(\Lambda) S_{\tilde{\nu}, \tilde{\pi}}^{\tilde{\mu}}(\Lambda).$$

6. Opérateurs de Schrödinger unidimensionnels

Il s'agit d'étudier le système S d'espace d'états $L^2(\mathbb{R})$ et d'hamiltonien $H = -d^2/dx^2 + q(x)$ où q est un potentiel, constant en dehors d'un compact et supposé suffisamment régulier. On distingue deux cas, suivant que les valeurs q_+ et q_- de q aux infinis sont identiques ou non.

12.1. $q_+ = q_-$. — Dans ce cas, le spectre absolument continu est de multiplicité uniforme 2 et on a un unique coefficient de transfert, une matrice d'ordre 2, $T(\Lambda)$, dont le paramètre est usuellement noté k : nous le ferons donc nous aussi. En terme des coefficients habituels de réflexion (r_g, r_d) et de transmission (t), on a

$$T(k) = \begin{pmatrix} r_d(k) & t(k) \\ t(k) & r_g(k) \end{pmatrix}.$$

On notera que d'ordinaire la matrice de diffusion est prise égale à $\begin{pmatrix} t(k) & r_g(k) \\ r_d(k) & t(k) \end{pmatrix}$. Cela provient du choix de bases pour exprimer la monodromie du faisceau $\mathcal{E}_{\text{loc}}^H$.

Pour de tels potentiels, les coefficients de réflexion ne sont jamais nuls, à moins que q ne le soit. Rappelons, pour mémoire, que la matrice de diffusion est définie pour des potentiels à courte portée (i.e. à décroissance assez rapide à l'infini, par exemple dans la classe de Schwartz) et que c'est dans ce cadre, pareillement à la transformation de Fourier, qu'on étudie le problème spectral inverse : on montre qu'il existe des potentiels (les solitons de l'équation de Korteweg de Vries), non triviaux, à coefficients de réflexion nul i.e. dont la matrice de diffusion est antidiagonale ([4]).

12.2. $q_+ \neq q_-$. — On suppose $q_- < q_+$. l'hamiltonien H a un spectre de multiplicité 1 (resp. 2) sur $]q_-, q_+[$ (resp. $]q_+, +\infty[$).

On a deux séries de quatre équations fonctionnelles (dont trois non triviales). La série donnée par E_{q_-} (notée E_-) est :

$$\begin{aligned} E_- \circ \gamma_- &= E_- T_{--}^{-1} \\ E_- \circ \gamma_+ &= E_- - E_+ T_{++}^{-1} T_{+-} \\ E_- \circ \gamma_- \gamma_+ &= (E_- - E_+ T_{++}^{-1} T_{+-})(T_{--} - T_{-+} T_{++}^{-1} T_{+-})^{-1}. \end{aligned}$$

On en déduit les matrices de diffusion :

$$S^{q_-} = T_{--}^{-1}$$

$$S^{q+} = \begin{pmatrix} r_{+-} & t_{+-} \\ t_{-+} & r_{-+} \end{pmatrix}$$

$$\text{où } \begin{cases} r_{\pm\mp} &= (T_{\pm\pm} - T_{\pm\mp} T_{\mp\mp}^{-1} T_{\mp\pm})^{-1} \\ t_{\pm\mp} &= -T_{\pm\pm}^{-1} T_{\pm\mp} (T_{\mp\mp} - T_{\mp\pm} T_{\pm\pm}^{-1} T_{\pm\mp})^{-1} \end{cases} .$$

Bibliographie

- [1] Yves COLIN DE VERDIÈRE. — *Une nouvelle démonstration du prolongement méromorphe des séries d'Eisenstein*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math., **293** (1981), 361-363.
- [2] Harold DONNELLY. — *Eigenvalues estimates for certain noncompact manifolds*, Michigan Math. J., **31** (1984), 349-357.
- [3] HARISH-CHANDRA. — *Automorphic forms and semi-simple Lie groups*, Lecture Notes in Math. 62 Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1968.
- [4] R. MIURA. — *The KdV-equation : a survey of results*, SIAM Rev., **18** (1976), 412-457.
- [5] Werner MÜLLER. — *Spectral theory for Riemannian manifolds with cusps and a related trace formula*, Math. Nachr., **11** (1981), 197-288.
- [6] Werner MÜLLER. — *Signature defects of cusps of Hilbert modular varieties and values of L-series at $s = 1$* , J. Differential Geometry, **20** (1984), 55-119.
- [7] Werner MÜLLER. — *L^2 -index of elliptic operators on manifold with cusps of rank one*. Preprint. Berlin, 1985.
- [8] Peter A. PERRY. — *Mellin transforms and scattering theory I. Short range potentials*, Duke Math. J., **47** (1980), 187-193.