

Institut Fourier — Université de Grenoble I

*Actes du séminaire de*  
**Théorie spectrale  
et géométrie**

Davide BARILARI, Ugo BOSCAIN,  
Grégoire CHARLOT & Robert W. NEEL

**Asymptotiques en temps petit du noyau de la chaleur des métriques  
riemanniennes et sous-riemanniennes**

Volume 31 (2012-2014), p. 55-70.

[http://tsg.cedram.org/item?id=TSG\\_2012-2014\\_\\_31\\_\\_55\\_0](http://tsg.cedram.org/item?id=TSG_2012-2014__31__55_0)

© Institut Fourier, 2012-2014, tous droits réservés.

L'accès aux articles du Séminaire de théorie spectrale et géométrie (<http://tsg.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://tsg.cedram.org/legal/>).

**cedram**

*Article mis en ligne dans le cadre du*  
*Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*  
<http://www.cedram.org/>

# ASYMPTOTIQUES EN TEMPS PETIT DU NOYAU DE LA CHALEUR DES MÉTRIQUES RIEMANNIENNES ET SOUS-RIEMANNIENNES

Davide Barilari, Ugo Boscain,  
Grégoire Charlot & Robert W. Neel

RÉSUMÉ. — Nous établissons l'asymptotique en temps petit du noyau de la chaleur au lieu de coupure dans les situations génériques, en géométrie riemannienne en dimension inférieure ou égale à 5, en géométrie sous-riemannienne de contact en dimension 3 ou de quasi-contact en dimension 4. La preuve nous permet de montrer qu'en dimension inférieure ou égale à 5 les seules singularités d'une application exponentielle riemannienne générique qui peuvent apparaître le long d'une géodésique minimisante sont  $A_3$  et  $A_5$ .

ABSTRACT. — Abstract. We provide the small-time asymptotics of the heat kernel at the cut locus in three cases: generic Riemannian manifolds in dimension less or equal to 5, generic 3D contact and 4D quasi-contact sub-Riemannian manifolds (close to the starting point). As a byproduct we show that, for generic Riemannian manifolds of dimension less or equal to 5, the only possible singularities of the exponential map along a minimizing geodesic are  $A_3$  and  $A_5$ .

## 1. Résultats connus en riemannien et sous-riemannien

En géométrie riemannienne, le laplacien est généralement défini de la façon suivante. La divergence d'un champ de vecteur est définie à partir du volume riemannien par

$$\operatorname{div}(X)\operatorname{vol} = L_X\operatorname{vol}.$$

et le gradient riemannien d'une fonction par

$$df = \langle \operatorname{grad}(f), \cdot \rangle.$$

On définit alors le laplacien par

$$\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f)).$$

Pour une variété sous-riemannienne  $(M, \mathcal{D}, g)$ , il n'y a pas toujours de volume naturel. Définissons la suite de distribution  $\mathcal{D}^i$  par  $\mathcal{D}^1 = \mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}^{i+1} = \mathcal{D}^i + [\mathcal{D}^i, \mathcal{D}]$ . Dans le cas d'une distribution équirégulière, c'est-à-dire quand les  $\mathcal{D}^i$  sont de dimension constante sur toute la variété, le volume de Popp prolonge naturellement le volume riemannien (voir [20, 3, 8, 7]). Mais, de façon générale, pour pouvoir définir partout un laplacien en sous-riemannien, il faut choisir un volume lisse. Une fois le volume  $\mu$  choisi, on définit la divergence par

$$\operatorname{div}(X)\mu = L_X\mu.$$

Le gradient sous-riemannien est défini par

$$df|_{\mathcal{D}} = \langle \operatorname{grad}_{SR}(f), \cdot \rangle$$

et le laplacien par

$$\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad}_{SR}(f)).$$

Si la condition de Hérmander (voir [1]) est vérifiée (ce qui est trivial en riemannien), et si la métrique est complète, alors l'opérateur  $\Delta$  admet un noyau de la chaleur symétrique lisse  $p_t(x, y)$  (voir [15, 23]).

La question de relier les asymptotiques en temps petit de  $p_t(x, y)$  avec les propriétés de la distance a été étudiée à partir des années 40 dans le cas riemannien puis dans les années 80 pour ce qui concerne le sous-riemannien. En particulier, en 1988, généralisant au sous-riemannien un résultat de Molchanov de 1975 ([19]), Ben Arous démontre dans [9] que si  $x$  et  $y$  sont tels que  $x \neq y$ ,  $x$  et  $y$  ne sont pas points de coupure l'un de l'autre, et s'ils ne sont pas reliés par une anormale stricte (voir [1]) minimisante, alors en temps petit

$$p_t(x, y) = \frac{C(x, y) + O(t)}{t^{n/2}} e^{-d^2(x, y)/4t},$$

où  $C$  est une fonction lisse strictement positive et  $O(t)$  est uniforme sur les compacts. De même Léandre démontre dans [18, 17], en généralisant la formule de Varadhan ([24]), que pour tout couple de points

$$\lim_{t \rightarrow 0} 4t \log(p_t(x, y)) = -d^2(x, y).$$

Généraliser les résultats de Ben Arous et Molchanov au cas où  $x$  et  $y$  sont dans le lieu de coupure l'un de l'autre est resté une question ouverte jusqu'à récemment. Il a été étudié en riemannien en particulier dans [21, 22]. Dans le cas sous-riemannien, le lieu de coupure était très peu connu jusque dans

les années 90 où les travaux d'Agrachev, Gauthier et El-Alaoui ([2, 12]) ont permis de décrire complètement le lieu de coupure générique dans le cas des distributions de contact sur les variétés de dimension 3, motivés en particulier par les travaux de Ben Arous et Léandre sur le noyau de la chaleur sous-riemannien. Les résultats qui suivent font avancer grandement les choses en riemannien et en sous-riemannien.

## 2. Résultats de [6]

Dans [6], une avancée importante est faite dans la compréhension du lien entre singularité de l'application exponentielle au lieu de coupure et l'asymptotique du noyau de la chaleur. Suivant une idée de Molchanov, les auteurs font ce lien par l'intermédiaire de l'étude de la fonction  $h_{xy}$  définie par

$$h_{xy}(z) = \frac{d^2(x, z) + d^2(y, z)}{2},$$

au voisinage de l'ensemble  $\Gamma_{xy}$  des points  $z$  où cette fonction  $h_{xy}$  est minimale. Ils s'intéressent en particulier aux points  $y$  qui sont dans l'intersection du lieu conjugué et du lieu de coupure de  $x$ , qui apportent une contribution d'ordre différent au noyau de la chaleur.

Comme leur travail s'appuie sur le résultat de Ben Arous, les auteurs demandent qu'il n'y ait pas d'anormale minimisante qui intervienne dans la partie de la synthèse optimale que l'on va considérer.

*Hypothèse.* — Pour simplifier l'exposé, dans la suite on supposera qu'il n'y a pas d'anormale minimisante.

Les auteurs montrent que

PROPOSITION 2.1. — *L'ensemble  $\Gamma_{xy}$  est en fait l'ensemble des points  $z$  tels que*

$$d(x, z) = d(y, z) = \frac{1}{2}d(x, y).$$

*Il est compact et, en l'absence d'extremale anormale minimisante, il est à distance finie strictement positive du lieu de coupure.*

Fixons maintenant  $z$  dans  $\Gamma_{xy}$  et  $\lambda$  la condition initiale qui correspond à la géodésique qui atteint  $z$  en temps 1 en restant optimale. Une conséquence immédiate de la proposition précédente est que l'application exponentielle est un difféo d'un voisinage de  $\lambda$  dans un voisinage de  $z$ . La fonction distance à  $x$  est donc lisse au voisinage de  $z$  et le développement de Ben Arous pour

$(x, z)$  s'applique. Il en va de même pour la distance à  $y$  au voisinage de  $z$  et pour le développement de Ben Arous pour  $(y, z)$ .

Par compacité de  $\Gamma_{xy}$ , il existe un voisinage de  $\Gamma_{xy}$ , noté  $N(\Gamma_{xy})$  sur lequel le développement de Ben Arous pour  $(x, z)$  s'applique et  $h_{xy}$  est lisse sur ce voisinage.

L'idée qu'utilise Molchanov dans le cas riemannien est d'appliquer la propriété de semi-groupe pour estimer le noyau en  $(x, y)$  combinée avec les estimations en  $(x, z)$  et  $(y, z)$ , puis de montrer que la contribution principale va venir des passages à mi-parcours par  $\Gamma_{xy}$ . Plus précisément, les auteurs montrent dans un premier temps, le

**THÉORÈME 2.2.** — *Soit  $M$  une variété sous-riemannienne complète et  $x$  et  $y$  deux points de  $M$ . Alors, pour tout voisinage  $N(\Gamma_{xy})$  de  $\Gamma_{xy}$ , il existe une constante  $\delta > 0$  et une fonction  $c_0$  lisse et strictement positive sur  $N(\Gamma_{xy}) \times N(\Gamma_{xy})$  telles que*

$$p_t(x, y) = \int_{N(\Gamma_{xy})} \frac{2^n}{t^n} e^{-h_{xy}(z)/t} (c_0(x, z)c_0(y, z) + O(t)) \mu(dz) + o\left(\exp\left(\frac{-d(x, y)^2 - \delta}{4t}\right)\right)$$

où  $O(t)$  est uniforme sur  $N(\Gamma_{xy})$ .

La propriété de semi-groupe (ou équation de Chapman-Kolmogorov) est

$$p_t(x, y) = \int_M p_{t/2}(x, z) p_{t/2}(z, y) \mu(dz).$$

L'intégrale dans la formule du théorème est directement issue de cette propriété en utilisant le développement asymptotique de Ben Arous, qui est valable pour  $z \in N(\Gamma_{xy})$ , et en utilisant son uniformité sur les compacts. Le  $o(\cdot)$  de la formule utilise le résultat de Léandre pour évaluer l'intégrale sur  $M \setminus N(\Gamma_{xy})$ .

Puis ils étudient la partie intégrale de la formule grâce aux propriétés des développements de Laplace (voir [13]), ainsi qu'en utilisant les formes normales des fonctions au voisinage d'un de leur minimum local.

**PROPOSITION 2.3** (Asymptotique de Laplace). — *Soit  $g$  définie sur  $\mathbb{R}^n$  par  $g(u) = \sum_{i=1}^n u_i^{2m_i}$  où  $1 \leq m_1 \leq \dots \leq m_n$ ,  $D$  un compact de  $\mathbb{R}^n$  contenant 0 dans son intérieur et  $f$  une fonction lisse sur  $D$ . Alors*

$$\int_D f(u) e^{-g(u)/t} du = t^{\frac{1}{2m_1} + \dots + \frac{1}{2m_n}} \left( f(0) \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(1/2m_i)}{m_i} + O(t^{1/m_n}) \right),$$

où  $\Gamma$  est ici la fonction Gamma usuelle.

Ainsi, si l'on s'intéresse de nouveau à

$$\int_{N(\Gamma_{xy})} \frac{2^n}{t^n} e^{-h_{xy}(z)/t} (c_0(x, z)c_0(y, z))\mu(dz)$$

et si au voisinage d'un minimum il existe un système de coordonnées tel que  $h_{xy} = d(x, y)^2/4 + \sum_i z_i^{2m_i}$ , alors on obtient l'asymptotique pour  $t$  petit suivant

$$p_t(x, y) = \frac{2^n}{t^{n - \frac{1}{2m_1} - \dots - \frac{1}{2m_n}}} e^{-d(x, y)^2/4t} \left( f(0) \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(1/2m_i)}{m_i} + O(t^{1/m_n}) \right),$$

où  $f(z)dz = c_0(x, z)c_0(y, z)\mu(dz)$ .

Ce résultat motive fortement l'intérêt d'étudier la fonction  $h_{xy}$  et sa dégénérescence au voisinage de  $\Gamma_{xy}$ , ce que font les auteurs en mettant ensuite en évidence la relation qu'il y a entre dégénérescence de  $h_{xy}$  en  $z \in \Gamma_{xy}$  et appartenance de  $y$  au lieu conjugué à  $x$ .

**THÉORÈME 2.4.** — *Soit  $z$  dans  $\Gamma_{xy}$  et  $\lambda$  un élément de  $T_x^*M$  tel que  $Exp_x(\lambda) = z$  et donc  $Exp_x(2\lambda) = y$ . Soit  $\lambda(\cdot)$  une courbe dans  $T_x^*M$  définie au voisinage de 0 telle que  $\lambda(0) = \lambda$ , et les deux courbes définies par  $z(s) = Exp_x(\lambda(s))$  et  $y(s) = Exp_x(2\lambda(s))$ . Alors  $\dot{y}(0) = 0$  si et seulement si  $\dot{z}(0)$  est dans le noyau de la hessienne de  $h_{xy}$  en  $z$ .*

Les arguments principaux qui permettent de prouver ce résultat sont les suivants.

Comme il existe une unique géodésique optimale entre  $x$  et  $z(s)$  pour  $s$  petit on peut définir  $\bar{\lambda}(s)$  l'élément de  $T_{z(s)}^*M$  comme la valeur du relevé de cette géodésique en  $z(s)$ . De même, comme il existe une unique géodésique optimale entre  $y$  et  $z(s)$  pour  $s$  petit on peut définir  $\bar{\eta}(s)$  l'élément de  $T_{z(s)}^*M$  comme la valeur du relevé de cette géodésique en  $z(s)$ . Alors on a :

$$dh_{x, y}|_{z(s)} = \bar{\lambda}(s) + \bar{\eta}(s).$$

Notons que l'image par l'exponentiel en  $z(s)$  de  $\bar{\lambda}(s)$  est  $y(s)$  quand celle de  $-\bar{\eta}(s)$  est  $y$ . Or comme l'exponentielle en  $z$  est un difféomorphisme d'un voisinage de  $\bar{\lambda}(0)$  dans un voisinage de  $y$ , on en déduit que pour  $s$  assez petit, l'exponentielle en  $z(s)$  est un difféomorphisme d'un voisinage de  $-\bar{\eta}(s)$  dans un voisinage de  $y$ . Ainsi  $y(s)$  est d'ordre  $m$  en  $s$  si et seulement si  $\bar{\lambda}(s) + \bar{\eta}(s)$  est d'ordre  $m$ , c'est-à-dire si  $dh_{x, y}|_{z(s)}$  est d'ordre  $m$ .

Supposons que  $\dot{y}(0) = 0$  c'est-à-dire  $y(s)$  est un  $o(s)$ . Alors  $dh_{x, y}|_{z(s)}$  est un  $o(s)$ , donc aussi  $dh_{x, y}|_{z(s)}(\dot{z}(s))$ , et ainsi  $h(z(s))$  est un  $o(s^2)$  ce qui implique que  $\dot{z}(0)$  est dans le noyau de la hessienne de  $h_{xy}$ .

Réciproquement supposons que le noyau de la hessienne soit de dimension  $n - k$  et que  $\dot{z}(0)$  est dans ce noyau.  $h_{xy}$  étant minimal en  $z$ , il existe un système de coordonnées centré sur  $z$  tel que

$$h_{xy}(z) = z_1^2 + \cdots + z_k^2 + \varphi(z_1, \dots, z_n)$$

où  $\varphi$  a toutes ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à deux nulles et  $\dot{z}_1(0) = \cdots = \dot{z}_k(0) = 0$ . Alors  $dh_{xy}|_{z(s)} = z_1(s)dz_1 + \cdots + z_k(s)dz_k + d\varphi|_{z(s)}$  est un  $o(s)$ . Ainsi  $y(s)$  est un  $o(s)$  et donc  $\dot{y}(0) = 0$ . Ce qui termine la démonstration. Et qui permet de montrer

LEMME 2.5. — *Soit  $x$  et  $y$  deux points de  $M$  et  $z \in \Gamma_{xy}$ . Alors il existe un système de coordonnées au voisinage de  $z$  tel que*

$$\frac{1}{4}d^2(x, y) + u_1^2 \leq h_{xy}(u_1, \dots, u_n) \leq \frac{1}{4}d^2(x, y) + u_1^2 + \cdots + u_n^2,$$

et, si la géodésique passant par  $z$  est conjuguée en  $y$ , alors il existe un système de coordonnées au voisinage de  $z$  tel que

$$h_{xy}(u_1, \dots, u_n) \leq \frac{1}{4}d^2(x, y) + u_1^2 + \cdots + u_{n-1}^2 + u_n^4.$$

Ce lemme permet alors naturellement de prouver le théorème

THÉORÈME 2.6. — *Soit  $x$  et  $y$  deux points de  $M$  alors il existe deux constantes strictement positives  $C_1$  et  $C_2$  telles que*

$$\frac{C_1}{t^{n/2}} e^{-d^2(x,y)/4t} \leq p_t(x, y) \leq \frac{C_2}{t^{n-1/2}} e^{-d^2(x,y)/4t}.$$

Si de plus  $x$  et  $y$  sont conjugués le long d'au moins une géodésique alors il existe  $C_3$  tel que

$$p_t(x, y) \geq \frac{C_3}{t^{(n/2)+(1/4)}} e^{-d^2(x,y)/4t},$$

et si, au contraire,  $x$  et  $y$  ne sont conjugués le long d'aucune géodésique alors il existe  $C_4$  tel que

$$p_t(x, y) = \frac{C_4 + O(t)}{t^{n/2}} e^{-d^2(x,y)/4t}.$$

### 3. Singularités génériques de l'application exponentielle et asymptotiques du noyau de la chaleur en dimension inférieure ou égale à 5

L'article [5] que nous présentons ici ne concerne pas que les petites dimensions mais nous choisissons de présenter les résultats qui concernent les dimensions inférieures ou égales à 5.

### 3.1. Deux lemmes techniques importants

Les lemmes 3.3 et 3.4 ci-dessous forment les arguments principaux qui permettent d'affiner les résultats précédents.

Pour les démontrer on utilise

LEMME 3.1 (Splitting Lemma, [14]). — Soit  $g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lisse avec  $U$  un voisinage de l'origine. Si  $g(0) = 0$  and  $dg|_0 = 0$  et si  $0$  est un minimum local isolé de  $g$  avec  $\dim(\ker(d^2g|_0)) = k$  alors il existe un système de coordonnées locales au voisinage de  $0$  tel que

$$g(u) = u_1^2 + \cdots + u_{n-k}^2 + \varphi(u_{n-k+1}, \dots, u_n)$$

où  $\varphi$  vérifie  $\varphi(0) = 0$ ,  $d\varphi|_0 = 0$   $d^2\varphi|_0 = 0$ .

DÉFINITION 3.2. — Soit  $f$  une application de  $M$  dans  $N$  de même dimension  $n$ . On dit que  $f$  a une singularité de type  $(1, m)$  en  $x \in M$  si  $\dim(\ker(D_x f)) = 1$  et si en coordonnées on a

$$m = \max\{k \in \mathbb{N} \mid \exists c(\cdot) \in \mathcal{C}_x$$

$$\text{avec } \dot{c}(0) \neq 0 \text{ et } f(c(t)) = f(x) + t^k v + o(t^k) \text{ où } v \neq 0\}$$

où  $\mathcal{C}_x$  est l'ensemble des courbes lisses qui passent en  $x$  à  $t = 0$ .

On peut alors énoncer

LEMME 3.3. — Soient  $x$  et  $y$  conjugués le long d'une géodésique  $\gamma(t) = \text{Exp}_x(2t\lambda)$  avec  $t \in [0, 1]$  et soit  $z_0 = \text{Exp}_x(\lambda)$ . Alors  $\text{Exp}_x$  a une singularité de type  $(1, m)$  en  $2\lambda$  si et seulement s'il existe un système de coordonnées autour de  $z_0$  tel que

$$h_{xy}(z) = d(x, y)^2/4 + z_1^2 + \cdots + z_{n-1}^2 + z_n^{m+1}.$$

ainsi que

LEMME 3.4. — Soient  $x$  et  $y$  conjugués le long d'une géodésique  $\gamma(t) = \text{Exp}_x(2t\lambda)$  avec  $t \in [0, 1]$  et soit  $z_0 = \text{Exp}_x(\lambda)$ . Pour tout  $\xi \in \ker(d\text{Exp}_x|_{2\lambda})$  il existe une courbe  $s \mapsto \lambda(s)$  à valeurs dans  $T_x^*M$  telle que  $\lambda(0) = \lambda$ ,  $\dot{\lambda}(0) = \xi$  et telle que si on note  $y(s) = \text{Exp}_x(2\lambda(s))$  alors en coordonnées  $y - y(s) = O(s^3)$ .

Dans le cas où  $z_0$  est isolé dans  $\Gamma_{xy}$ , les preuves de ces deux lemmes s'appuient toutes les deux sur la mise sous forme normale de la fonction  $h_{xy}$ , via le splitting lemma.

Dans le cas du lemme 3.3, le fait que  $\text{Exp}_x$  a une singularité de type  $(1, m)$  en  $2\lambda$  implique que localement  $2\lambda$  est le seul antécédent de  $y$  et donc



que  $z_0$  est un minimum local strict et donc isolé de  $h_{xy}$ . Le théorème 2.4 permet de dire que le noyau de la hessienne de  $h_{xy}$  en  $z_0$  est de dimension 1 et le splitting lemma d'affirmer alors qu'il existe un système de coordonnées autour de  $z_0$  tel que

$$h_{xy}(z) = d(x, y)^2/4 + z_1^2 + \dots + z_{n-1}^2 + \varphi(z_n).$$

Notons  $\lambda(s)$  l'antécédent de  $(0, \dots, 0, s)$  dans  $T_x^*M$  par  $Exp_x$ ,  $y(s) = Exp_x(2\lambda(s))$  et  $k$  l'ordre de  $y(s)$ . Alors  $dh_{xy}|_{z(s)}$  est d'ordre  $k$  mais  $dh_{xy}|_{z(s)} = \varphi'(s)dz_n$  donc  $\varphi'(s)$  est d'ordre  $k$  ce qui implique que  $\varphi(s)$  est d'ordre  $k+1$ . Maintenant, si on prend une autre courbe  $\bar{z}(s)$  passant par  $z_0$ , on a

$$dh_{xy}|_{\bar{z}(s)} = \bar{z}_1(s)dz_1 + \dots + \bar{z}_{n-1}(s)dz_{n-1} + \varphi'(\bar{z}_n)dz_n.$$

On en déduit que l'ordre de  $dh_{xy}|_{\bar{z}(s)}$  est au plus  $k$  et que la courbe  $\bar{y}(s)$  correspondante est au plus d'ordre  $k$ .

On s'intéresse maintenant au lemme 3.4. On sait que la dimension du noyau de  $Exp_x$  en  $2\lambda$  est égale à la dimension du noyau de la hessienne de  $h_{xy}$  en  $z_0$ .

Dans le cas où  $z_0$  est isolé dans  $\Gamma_{xy}$  on peut utiliser le splitting lemma : Si la dimension du noyau de la hessienne de  $h_{xy}$  en  $z_0$  est  $n - k$  alors il existe un système de coordonnées autour de  $z_0$  tel que

$$h_{xy}(z) = d(x, y)^2/4 + z_1^2 + \dots + z_k^2 + \varphi(z_{k+1}, \dots, z_n),$$

avec  $\varphi$  dont toutes les dérivées d'ordre inférieur ou égal à 2 sont nulles. En fait le fait que  $\varphi$  ait un minimum local en 0 entraîne de plus que les dérivées d'ordre 3 sont aussi nulles. Ainsi, si  $w$  est dans le noyau de la hessienne de  $h_{xy}$  il s'écrit  $w = (0, \dots, 0, w_{k+1}, \dots, w_n)$  et, le long de la courbe  $s \mapsto sw$ ,  $d\varphi$  est d'ordre au moins 3 et donc le  $y(s)$  correspondant est aussi au moins d'ordre 3.

Quand  $z_0$  n'est pas isolé, on peut adapter la preuve. On peut écrire

$$h_{xy}(z) = d(x, y)^2/4 + z_1^2 + \dots + z_k^2 + \varphi(z_1, \dots, z_n),$$

où  $\varphi$  a toutes ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à 2 nulles et dépend maintenant de toutes les variables  $z_i$ . Pour conclure comme précédemment il reste à montrer qu'il existe un changement de variables pour lequel la série de Taylor en 0 de  $\varphi$  n'a plus de termes d'ordre 3. Pour discuter les différents termes on note  $i_1, i_2$  etc les indices inférieurs ou égaux à  $k$  et  $j_1, j_2$  etc les indices strictement supérieurs à  $k$ . Comme les indices  $i$  ne correspondent pas au noyau, on peut supposer que  $h_{xy}(z_1, \dots, z_k, 0, \dots, 0) = z_1^2 + \dots + z_k^2$  donc il n'y a pas de termes d'ordre 3 du type  $z_{i_1}z_{i_2}z_{i_3}$ . D'autre part, comme  $h_{xy}(0, \dots, 0, z_{k+1}, \dots, z_n)$  est minimal en 0 les termes de plus bas degré de

sa série de Taylor ne peuvent pas être de degré impair. Ainsi, il n'y a pas de termes en  $z_{j_1} z_{j_2} z_{j_3}$  dans la série de Taylor de  $h_{xy}$  en  $z = 0$ . Reste à régler la question des termes mixtes qui mélangent les variables  $z_i$  et  $z_j$  mais ceux-ci peuvent être pris en charge : par exemple si on a un terme du type  $\alpha z_1 z_n^2$  alors par le changement de variable  $\bar{z}_1 = z_1 + \frac{\alpha}{2} z_n^2$  alors  $\bar{z}_1^2 = z_1^2 + \alpha z_1 z_n^2 + \frac{\alpha^2}{4} z_n^4$  et dans les nouvelles variables le terme considéré a disparu sans qu'aucun nouveau terme d'ordre 3 n'apparaisse. De même, si on a un terme du type  $\alpha z_1^2 z_n$  ou pourra faire le changement de variable  $\bar{z}_1 = z_1 + \frac{\alpha}{2} z_1 z_n$ . On peut donc supposer que  $\varphi$  a toutes ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à 3 nulles et on peut reprendre la preuve faite dans le cas où  $z_0$  est isolé.

Ces lemmes ont deux corollaires immédiats. Le lemme 3.3 a pour conséquence

**COROLLAIRE 3.5.** — *Soient  $x$  et  $y$  conjugués le long d'une géodésique optimale  $\gamma(t) = \text{Exp}_x(2t\lambda)$  avec  $t \in [0, 1]$  et soit  $z_0 = \text{Exp}_x(\lambda)$ . Supposons que  $\text{Exp}_x$  a une singularité de type  $(1, m)$  en  $2\lambda$  alors  $m$  est impair et il existe des coordonnées telles que*

$$h_{xy}(z) = d^2(x, y)/4 + z_1^2 + \cdots + z_{n-1}^2 + z_n^{m+1}.$$

*Si de plus cette géodésique est la seule qui relie  $x$  et  $y$  de façon optimale alors*

$$p_t(x, y) = \frac{C + O(t^{\frac{2}{m+1}})}{t^{n - \frac{n-1}{2} - \frac{1}{m+1}}} \exp\left(-\frac{d^2(x, y)}{4t}\right).$$

Le lemme 3.4 entraîne

**COROLLAIRE 3.6.** — *Soient  $x$  et  $y$  conjugués le long d'une géodésique optimale  $\gamma(t) = \text{Exp}_x(2t\lambda)$  avec  $t \in [0, 1]$  et soit  $z_0 = \text{Exp}_x(\lambda)$ . Si la dimension du noyau de  $\text{Exp}_x$  en  $2\lambda$  vaut  $n-k$  alors il existe des coordonnées telles que*

$$h_{xy}(z) \leq d^2(x, y)/4 + z_1^2 + \cdots + z_k^2 + z_{k+1}^4 + \cdots + z_n^4$$

*ce qui donne l'information suivante sur le développement asymptotique*

$$p_t(x, y) \geq \frac{C}{t^{n - \frac{k}{2} - \frac{n-k}{4}}} \exp\left(-\frac{d^2(x, y)}{4t}\right).$$

### 3.2. Applications au cas riemannien

On applique maintenant les lemmes 3.3 et 3.4 au cas des structures riemanniennes.

Grâce aux travaux d'Arnold et de son groupe [4], on connaît la liste des singularités lagrangiennes génériques jusqu'en dimension 5. Elle coïncide avec la liste des singularités lagrangiennes stables à savoir :

En dimension 1 :

$$\mathcal{A}_2 : x \mapsto x^2.$$

En dimension 2 : la précédente plus

$$\mathcal{A}_3 : (x, y) \mapsto (x^3 + yx, y).$$

En dimension 3 : les précédentes plus

$$\mathcal{A}_4 : (x, y, z) \mapsto (x^4 + yx^2 + zx, y, z),$$

$$\mathcal{D}_{4+} : (x, y, z) \mapsto (x^2 + y^2 + xz, xy, z),$$

$$\mathcal{D}_{4-} : (x, y, z) \mapsto (x^2 - y^2 + xz, xy, z).$$

En dimension 4 : les précédentes plus

$$\mathcal{A}_5 : (x, y, z, t) \mapsto (x^5 + yx^3 + zx^2 + tx, y, z, t),$$

$$\mathcal{D}_{5+} : (x, y, z, t) \mapsto (x^3 + y^2 + zx^2 + tx, xy, z, t),$$

$$\mathcal{D}_{5-} : (x, y, z, t) \mapsto (-x^3 + y^2 + zx^2 + tx, xy, z, t).$$

En dimension 5 : les précédentes plus

$$\mathcal{A}_6 : (x, y, z, t, u) \mapsto (x^6 + yx^4 + zx^3 + tx^2 + ux, y, z, t, u),$$

$$\mathcal{D}_{6+} : (x, y, z, t, u) \mapsto (x^4 + y^2 + zx^3 + tx^2 + ux, xy, z, t, u),$$

$$\mathcal{D}_{6-} : (x, y, z, t, u) \mapsto (-x^4 + y^2 + zx^3 + tx^2 + ux, xy, z, t, u),$$

$$\mathcal{E}_{6+} : (x, y, z, t, u) \mapsto (x^2 + xyz + ty + ux, y^3 + x^2z, z, t, u),$$

$$\mathcal{E}_{6-} : (x, y, z, t, u) \mapsto (x^2 + xyz + ty + ux, -y^3 + x^2z, z, t, u).$$

De plus, il est démontré dans [16] que les singularités riemanniennes génériques au lieu conjugué sont des singularités lagrangiennes génériques. C'est donc dans cette liste qu'il faut chercher les singularités possibles au lieu de coupure conjugué.

Les singularités  $\mathcal{A}_n$  sont de type  $(1, n)$ . Faisons en la preuve pour  $\mathcal{A}_6$ . Le noyau de la différentielle est de dimension 1 et engendré par  $\frac{\partial}{\partial x}$ . De plus on a que pour  $x(s) = s$  et  $y(s) = z(s) = t(s) = u(s) = 0$  on trouve  $(x^6 + yx^4 + zx^3 + tx^2 + ux, y, z, t, u)(s) = (s^6, 0, 0, 0, 0)$ . Enfin, si une courbe  $s \mapsto (x(s), y(s), z(s), t(s), u(s))$  a pour image une courbe en  $O(s^7)$  alors  $y, z, t$  et  $u$  sont des  $O(s^7)$  ce qui implique, en regardant la première coordonnée, que  $x(s)^6 = O(s^7)$  et donc que  $\dot{x}(0) \neq 0$  et donc que la courbe  $s \mapsto (x(s), y(s), z(s), t(s), u(s))$  est singulière en 0. Une courbe non singulière en 0 ne peut donc pas avoir pour image une courbe en  $O(s^7)$  ce qui finit de démontrer que  $\mathcal{A}_6$  est de type  $(1, 6)$ . La démonstration dans le cas général est la même.

Le corollaire 1 permet alors d'éliminer les singularités  $\mathcal{A}_{2n}$  car on aurait

$$h_{xy}(z) = d(x, y)^2/4 + z_1^2 + \cdots + z_{n-1}^2 + z_n^{2n+1},$$

qui ne peut avoir un minimum en  $z = 0$  à cause du terme  $z_n^{2n+1}$ .

Le lemme 3.4 permet d'éliminer toutes les singularités non  $\mathcal{A}$  de la liste. Pour chacune de ces singularités le noyau de la différentielle est de dimension 2 et est engendré par  $\frac{\partial}{\partial x}$  et  $\frac{\partial}{\partial y}$ . Montrons sur deux exemples comment utiliser le lemme 3.4.

D'abord pour  $\mathcal{D}_{4-}$ . Si une courbe  $(x, y, z)(s)$  est telle que  $(x, y, z)(0) = 0$ ,  $(\dot{x}, \dot{y})(0) \neq 0$  et  $\dot{z}(0) = 0$  et si elle est un  $o(s^2)$  alors  $z(s)$  est un  $o(s^2)$  ce qui entraîne que  $x^2(s) - y^2(s)$  et  $x(s)y(s)$  sont des  $o(s^2)$  et ceci n'est possible que si  $\dot{x}(0)$  et  $\dot{y}(0)$  sont nuls et qui est contradictoire avec  $(\dot{x}, \dot{y})(0) \neq 0$ . Donc pour aucun vecteur du noyau il n'existe de courbe ayant cette vitesse initiale telle que l'image soit un  $O(s^3)$ . Et ainsi le lemme 3.4 disqualifie  $\mathcal{D}_{4-}$  comme singularité de l'exponentielle riemannienne en un point de coupure conjugué.

Regardons ensuite  $\mathcal{E}_{6\pm}$ . Si  $(x^2 + xyz + ty + ux, -y^3 + x^2z, z, t, u)(s)$  est un  $o(s^2)$  alors en particulier  $(z, t, u)(s)$  est un  $o(s^2)$  et donc  $(xyz + ty + ux)(s)$  est un  $o(s^2)$  ce qui entraîne que  $x^2$  est un  $o(s^2)$ . Et on a donc  $\dot{x}(0) = \dot{z}(0) = \dot{t}(0) = \dot{u}(0) = 0$ . Il y a donc une seule direction  $v$  du noyau pour laquelle il existe une courbe ayant  $v$  comme vitesse initiale dont l'image est un  $o(s^2)$  alors que la dimension du noyau de la différentielle est deux. Ceci est contradictoire avec le lemme 3.4 et disqualifie donc  $\mathcal{E}_{6\pm}$ .

Ainsi, jusqu'à la dimension 5, les seules singularités génériques possibles aux points de coupure conjugués sont  $\mathcal{A}_3$  et  $\mathcal{A}_5$ . On connaît déjà plusieurs exemples où  $\mathcal{A}_3$  est effectivement une singularité correspondant à un point de coupure conjugué. On sait maintenant grâce à ce que l'on vient de montrer que pour les dimensions 2 et 3 c'est la seule singularité générique possible pour la partie optimale du front d'onde. Par contre, pour ce qui concerne  $\mathcal{A}_5$ , on n'a pas d'exemple où elle est la singularité correspondant à un point de coupure conjugué.

On obtient donc la liste des asymptotiques en temps petit du noyau de la chaleur génériques :

**THÉORÈME 3.7.** — *Soit  $M$  une variété de dimension inférieure ou égale à 5 et  $x \in M$ . Pour toute métrique riemannienne générique complète sur  $M$  et tout  $y$  dans  $M$  on a*

— *si aucune géodésique optimale reliant  $x$  à  $y$  n'est conjuguée alors*

$$p_t(x, y) = \frac{C + O(t)}{t^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{d^2(x, y)}{4t}\right),$$

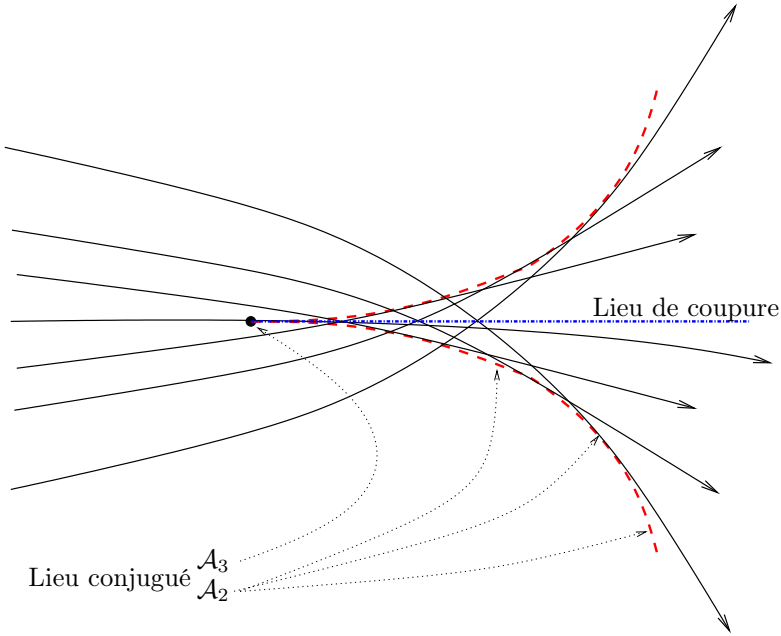


FIGURE 3.1. Les géodésiques au voisinage d'une singularité  $\mathcal{A}_3$

- si au moins une géodésique minimale reliant  $x$  et  $y$  est  $\mathcal{A}_3$ -conjuguée mais aucune n'est  $\mathcal{A}_5$ -conjuguée alors

$$p_t(x, y) = \frac{C + O(t)}{t^{\frac{n}{2} + \frac{1}{4}}} \exp\left(-\frac{d^2(x, y)}{4t}\right),$$

- si au moins une géodésique minimale reliant  $x$  et  $y$  est  $\mathcal{A}_5$ -conjuguée alors

$$p_t(x, y) = \frac{C + O(t)}{t^{\frac{n}{2} + \frac{1}{3}}} \exp\left(-\frac{d^2(x, y)}{4t}\right),$$

ce dernier cas ne pouvant apparaître que lorsque  $\dim(M) \geq 4$ .

### 3.3. Applications aux cas sous-riemmanien de contact et de quasi-contact

Dans le cas sous-riemmanien, il n'y a pas encore de résultat équivalent à celui de S. Janeczko et T. Mostowski [16] même s'il semble qu'ils aient avancé dans cette direction. Cependant, dans le cas de contact on connaît très bien le lieu de coupure local : pour une structure sous-riemmanienne de contact

générique de dimension 3, le lieu de coupure à  $x$  vient s'accumuler sur  $x$  et les points de coupure conjugués correspondent tous à des singularités de type  $\mathcal{A}_3$  de l'application exponentielle (voir [2, 12]). Ainsi on a le théorème

**THÉORÈME 3.8.** — *Soit une structure sous-riemannienne de contact de dimension 3 générique et  $x \in M$ . Alors dans tout voisinage de  $x$  il existe des points de coupure conjugués  $y$ , où*

$$p_t(x, y) = \frac{C + O(t)}{t^{\frac{7}{4}}} \exp\left(-\frac{d^2(x, y)}{4t}\right).$$

*Pour les points  $y$  qui ne sont pas de coupure conjugués alors*

$$p_t(x, y) = \frac{C + O(t)}{t^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{d^2(x, y)}{4t}\right).$$

Pour les structures sous-riemanniennes de quasi-contact de dimension 4 génériques, il existe dans tout voisinage de  $x$  des points de coupure conjugués  $y$  reliés à  $x$  par une unique géodésique optimale où la singularité de l'application exponentielle correspondante est de type  $\mathcal{A}_3$ . On a alors

**THÉORÈME 3.9.** — *Soit une structure sous-riemannienne de quasi-contact de dimension 4 générique et  $x \in M$ . Alors dans tout voisinage de  $x$  il existe des points de coupure conjugués  $y$  où*

$$p_t(x, y) = \frac{C + O(t)}{t^{\frac{9}{4}}} \exp\left(-\frac{d^2(x, y)}{4t}\right).$$

*Pour les points  $y$  qui ne sont pas de coupure conjugués alors*

$$p_t(x, y) = \frac{C + O(t)}{t^2} \exp\left(-\frac{d^2(x, y)}{4t}\right).$$

### 3.4. Application au cas presque-riemannien

Les auteurs de [10] ont décrit les géodésiques, les sphères, le lieu de coupure et le premier lieu conjugué d'un point en dehors de  $\mathcal{Z} = \{x = 0\}$  pour la métrique de Grushin  $dx^2 + \frac{1}{x^2} dy^2$ . Sans perte de généralité, on peut prendre  $q = (-1, 0)$ . Les géodésiques issues de  $q$  doivent traverser  $\mathcal{Z}$  pour participer de la création du lieu de coupure et du lieu conjugué : en effet la courbure étant strictement négative en dehors de  $\mathcal{Z}$ , les géodésiques contenues dans le demi-plan  $x < 0$  ne peuvent engendrer ni lieu de coupure ni lieu conjugué. La géodésique issue de  $(-1, 0)$  avec le covecteur initial

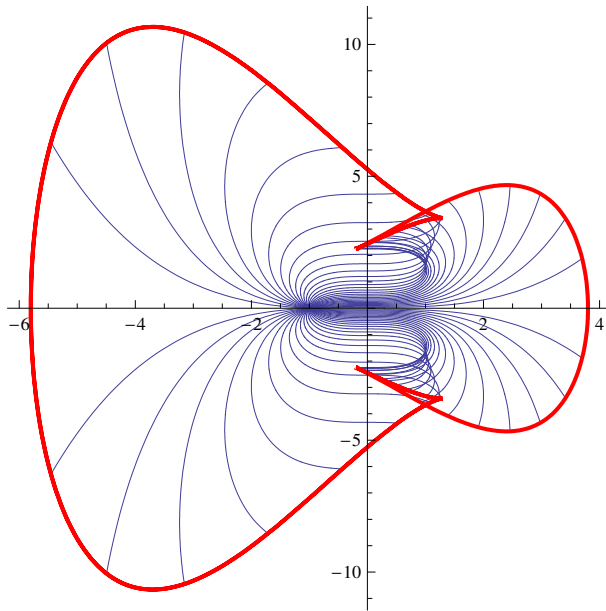


FIGURE 3.2. Geodesiques et front d'onde partant d'un point en dehors  $\mathcal{Z}$  pour la métrique de Grushin. Figure de [10].

$\lambda_x = \cos(\theta)$ ,  $\lambda_y = \sin(\theta)$  a pour expression

$$\left\{ \begin{array}{ll} x(t) = t - 1, & y(t) = 0 & \text{si } \theta = 0[2\pi] \\ x(t) = -t - 1, & y(t) = 0 & \text{si } \theta = \pi[2\pi] \\ \left\{ \begin{array}{l} x(t) = -\frac{\sin(\theta - t \sin(\theta))}{\sin(\theta)} \\ y(t) = \frac{2t - 2 \cos(\theta) + \frac{\sin(2\theta - 2t \sin(\theta))}{\sin(\theta)}}{4 \sin(\theta)} \end{array} \right. & \text{si } \theta \notin \pi\mathbf{Z} \end{array} \right.$$

Ce qui est intéressant à noter c'est qu'il existe deux points qui sont de coupure et conjugués à  $(-1, 0)$  de coordonnées  $(1, \pm \frac{\pi}{2})$ . En ces points un calcul assez simple montre que la singularité de l'application exponentielle est de type  $\mathcal{A}_3$ . Comme la métrique de Grushin est l'approximation nilpotente en un point de  $\mathcal{Z}$  de type Grushin, il est clair que pour  $q$  proche de  $\mathcal{Z}$  et loin des points de tangence, le même phénomène existe à savoir qu'il existe deux points de l'autre côté de  $\mathcal{Z}$  qui sont de coupure et conjugués à  $q$  et que la singularité de l'application exponentielle correspondante est de type  $\mathcal{A}_3$ . Grâce au Lemme 3.3, on peut donc en déduire (voir [11])

THÉORÈME 3.10. — Soit une structure presque-riemannienne de dimension 2 générique et un volume lisse. Si  $x$  est suffisamment proche de  $\mathcal{Z}$  sans être proche d'un point de tangence alors il a exactement deux points de coupure conjugués  $y_1$  et  $y_2$  proches où

$$p_t(x, y_i) = \frac{C + O(t)}{t^{\frac{5}{4}}} \exp\left(-\frac{d^2(x, y_i)}{4t}\right).$$

Pour  $y$  différent de  $y_1$  et  $y_2$  suffisamment proche de  $x$

$$p_t(x, y) = \frac{C + O(t)}{t} \exp\left(-\frac{d^2(x, y_i)}{4t}\right).$$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. A. AGRACHEV, D. BARILARI & U. BOSCAIN, « Introduction to Riemannian and Sub-Riemannian geometry », <http://www.math.jussieu.fr/~barilari/Notes.php>, 2014.
- [2] A. A. AGRACHEV, E.-H. CHAKIR EL-A. & J. P. GAUTHIER, « Sub-Riemannian metrics on  $\mathbf{R}^3$  », in *Geometric control and non-holonomic mechanics (Mexico City, 1996)*, CMS Conf. Proc., vol. 25, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, p. 29-78.
- [3] A. AGRACHEV, U. BOSCAIN, J.-P. GAUTHIER & F. ROSSI, « The intrinsic hypoelliptic Laplacian and its heat kernel on unimodular Lie groups », *J. Funct. Anal.* **256** (2009), n° 8, p. 2621-2655.
- [4] V. I. ARNOLD, S. M. GUSEIN-ZADE & A. N. VARCHENKO, *Singularities of differentiable maps. Volume 1*, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser/Springer, New York, 2012, Classification of critical points, caustics and wave fronts, Translated from the Russian by Ian Porteous based on a previous translation by Mark Reynolds, Reprint of the 1985 edition, xii+382 pages.
- [5] D. BARILARI, U. BOSCAIN, G. CHARLOT & R. W. NEEL, « On the heat diffusion for generic Riemannian and sub-Riemannian structures », soumis.
- [6] D. BARILARI, U. BOSCAIN & R. W. NEEL, « Small-time heat kernel asymptotics at the sub-Riemannian cut locus », *J. Differential Geom.* **92** (2012), n° 3, p. 373-416.
- [7] D. BARILARI & J. JENDREJ, « Small time heat kernel asymptotics at the cut locus on surfaces of revolution », *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **31** (2014), n° 2, p. 281-295.
- [8] D. BARILARI & L. RIZZI, « A formula for Popp's volume in sub-Riemannian geometry », *Anal. Geom. Metr. Spaces* **1** (2013), p. 42-57.
- [9] G. BEN AROUS, « Développement asymptotique du noyau de la chaleur hypoelliptique hors du cut-locus », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **21** (1988), n° 3, p. 307-331.
- [10] U. BOSCAIN & C. LAURENT, « The Laplace-Beltrami operator in almost-Riemannian geometry », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **63** (2013), n° 5, p. 1739-1770.
- [11] G. CHARLOT, « Cut locus and heat kernel at Grushin points of 2 dimensional almost Riemannian metrics », <http://arxiv.org/abs/1408.2120>.
- [12] E.-H. C. EL-ALAOUI, J.-P. GAUTHIER & I. KUPKA, « Small sub-Riemannian balls on  $\mathbf{R}^3$  », *J. Dynam. Control Systems* **2** (1996), n° 3, p. 359-421.
- [13] R. ESTRADA & R. P. KANWAL, *A distributional approach to asymptotics*, second éd., Birkhäuser Advanced Texts : Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts : Basel Textbooks], Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2002, Theory and applications, xvi+451 pages.



- [14] D. GROMOLL & W. MEYER, « On differentiable functions with isolated critical points », *Topology* **8** (1969), p. 361-369.
- [15] L. HÖRMANDER, « Hypoelliptic second order differential equations », *Acta Math.* **119** (1967), p. 147-171.
- [16] S. JANECZKO & T. MOSTOWSKI, « Relative generic singularities of the exponential map », *Compositio Math.* **96** (1995), n° 3, p. 345-370.
- [17] R. LÉANDRE, « Majoration en temps petit de la densité d'une diffusion dégénérée », *Probab. Theory Related Fields* **74** (1987), n° 2, p. 289-294.
- [18] ———, « Minoration en temps petit de la densité d'une diffusion dégénérée », *J. Funct. Anal.* **74** (1987), n° 2, p. 399-414.
- [19] S. A. MOLČANOV, « Diffusion processes, and Riemannian geometry », *Uspehi Mat. Nauk* **30** (1975), n° 1(181), p. 3-59.
- [20] R. MONTGOMERY, *A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 91, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002, xx+259 pages.
- [21] R. NEEL, « The small-time asymptotics of the heat kernel at the cut locus », *Comm. Anal. Geom.* **15** (2007), n° 4, p. 845-890.
- [22] R. NEEL & D. STROOCK, « Analysis of the cut locus via the heat kernel », in *Surveys in differential geometry. Vol. IX*, Surv. Differ. Geom., IX, Int. Press, Somerville, MA, 2004, p. 337-349.
- [23] R. S. STRICHARTZ, « Sub-Riemannian geometry », *J. Differential Geom.* **24** (1986), n° 2, p. 221-263.
- [24] S. R. S. VARADHAN, « On the behavior of the fundamental solution of the heat equation with variable coefficients », *Comm. Pure Appl. Math.* **20** (1967), p. 431-455.

Davide BARILARI  
 CNRS, CMAP Ecole Polytechnique and equipe  
 INRIA GECO Saclay-Île-de-France, Paris, France  
 barilari@cmap.polytechnique.fr

Ugo BOSCAIN  
 CNRS, CMAP Ecole Polytechnique and equipe  
 INRIA GECO Saclay-Île-de-France, Paris, France  
 boscain@cmap.polytechnique.fr

Grégoire CHARLOT  
 Institut Fourier, UMR 5582, Université Grenoble 1  
 and equipe INRIA GECO Saclay-Île-de-France,  
 Paris, France  
 charlot@ujf-grenoble.fr

Robert W. NEEL  
 Department of Mathematics, Lehigh University,  
 Bethlehem, PA, USA  
 robert.neel@lehigh.edu