Institut Fourier — Université de Grenoble I

Actes du séminaire de

Théorie spectrale et géométrie

Julie Rowlett

La géométrie de Bakry-Émery et l'écart fondamental

Volume 28 (2009-2010), p. 147-157.

<http://tsg.cedram.org/item?id=TSG_2009-2010__28__147_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
Volume 28 (2009-2010) 147-157

LA GÉOMÉTRIE DE BAKRY-ÉMERY ET L'ÉCART FONDAMENTAL

Julie Rowlett

RÉSUMÉ. — Cet article est une présentation rapide, d'une part de résultats de l'auteur et Z. Lu [14], et d'autre part, de la résolution de la conjecture de l'écart fondamental par Andrews et Clutterbuck [1]. Nous commençons par rappeler ce qu'est la géométrie de Bakry-Émery, nous poursuivons en montrant les liens entre valeurs propres du laplacien de Dirichlet et de Neumann. Nous démontrons ensuite un rapport entre l'écart fondamental et la géométrie de Bakry-Émery, puis nous présentons les idées principales de la preuve de la conjecture de l'écart fondamental de [1]. Nous concluons par des résultats pour l'écart des triangles et des simplexes.

ABSTRACT. — This is a brief survey of recent results culminating in the proof of the fundamental gap conjecture by Andrews and Clutterbuck [1]. Recalling the Bakry-Émery geometry and Laplacian, we present our joint results with Z. Lu [14] which demonstrate an intimate connection between the first non-trivial eigenvalue of a certain Bakry-Émery Laplacian and the fundamental gap. This is a special case of our more general results relating Dirichlet and Neumann eigenvalues and Bakry-Émery eigenvalues. Ideas particularly germane to the recent proof of the fundamental gap conjecture are discussed. In conclusion, we present recent results for the fundamental gap on the moduli spaces of n-simplices in general and triangles in particular.

1. La géométrie de Bakry-Émery

Soit (M, g) une variété riemannienne (avec ou sans bord) ; Bakry et Émery ont introduit une géométrie qu'ils ont utilisée pour étudier les processus de diffusion [3]. Une *variété Bakry-Émery* est un triplet (M, g, ϕ), où la fonction $\phi \in \mathcal{C}^\infty(M)$. La mesure sur M est la mesure à poids $e^{-\phi} dV_g$, où dV_g est la mesure associée à la métrique g. Le laplacien de Bakry-Émery est donné par

$$\Delta_\phi = \Delta_g - \nabla\phi \cdot \nabla.$$

Mots-clés : écart fondamental, valeurs propres du laplacian, valeurs propres Dirichlets, valeurs propres Neumann, géométrie Bakry-Émery, laplacien dérive, simplexes.
Classification math. : 35P05, 58J50.

La courbure de Bakry-Émery-Ricci est [1]

$$\mathrm{Ric}_\infty = \mathrm{Ric} + \mathrm{Hess}(\phi).$$

On s'intéresse à la géométrie de Bakry-Émery pour généraliser la géométrie différentielle aux variétés singulières ; voir Sturm [18], Wei-Wylie [20], et Lott [13]. Il est possible de généraliser la notion de courbure de Ricci aux variétés singulières qui sont la limite de Gromov-Hausdorff pointée de variétés riemanniennes lisses à courbure de Ricci bornée inférieurement. Ces limites sont des espaces métriques-mesurés, et sont aussi étudiées dans le transport optimal ; voir Villani [19].

Le résultat suivant montre que pour une variété de Bakry-Émery de dimension n donnée, il existe une famille à un paramètre (positif) de domaines de dimension $n+1$, qui s'effondrent sur la variété quand le paramètre tend vers 0 de sorte que la famille à un paramètre de valeurs propres associées convergent vers celles de la variété.

Théorème 1.1 (Lu-R.). — *Soit (M, g, ϕ) une variété de Bakry-Émery (avec ou sans bord). Soit*

$$M_\varepsilon := \{(x,y) \in M \times \mathbb{R}^+ | \quad 0 \leqslant y \leqslant \varepsilon e^{-\phi(x)}\} \subset M \times \mathbb{R}^+.$$

Soient $\{\mu_k\}_{k=0}^\infty$ les valeurs propres du laplacien de Bakry-Émery de M ; lorsque $\partial M \neq \emptyset$ on considère la condition Neumann au bord. Soient $\mu_{k,\varepsilon}$ les valeurs propres (de Neumann si $\partial M \neq \emptyset$) du laplacien

$$\tilde{\Delta} := \Delta_g + \partial_y^2,$$

sur M_ε, où Δ_g est le laplacien pour la métrique g sur M. Alors,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mu_{k,\varepsilon} = \mu_k \quad \forall \quad k \in \mathbb{N}.$$

Une conséquence immédiate de ce théorème est le

Corollaire 1.2 (Lu-R.). — *Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^n$, et soit ϕ_1 la première fonction propre du laplacien euclidien sur Ω. Soit*

$$\Omega_\varepsilon := \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in \Omega, 0 \leqslant y \leqslant \varepsilon \phi_1(x)^2\}.$$

Soient $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ les valeurs propres de Dirichlet de Ω, et soient $\{\mu_{k,\varepsilon}\}_{k=0}^\infty$ les valeurs propres de Neumann de Ω_ε. Alors,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mu_{k-1,\varepsilon} = \lambda_k - \lambda_1, \quad \forall \quad k \in \mathbb{N},\, k \geqslant 1.$$

1. Dans Lott [13], elle est appelée ∞-courbure-Bakry-Émery-Ricci.

Rappelons que pour un domaine Ω de $\mathbb{R}^n$, *l'écart fondamental de* Ω est la différence entre les deux premières valeurs propres de Dirichlet, $\lambda_2 - \lambda_1$. Le corollaire a des implications intéressantes pour l'écart fondamental ; pour $k = 2$ on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mu_{1,\varepsilon} = \lambda_2 - \lambda_1.$$

1.1. Techniques utiles

Rappelons les principes variationnels classiques. Notre convention pour le laplacien associé à une métrique riemannienne g est

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \sum_{i,j} \partial_i g^{ij} \sqrt{\det(g)} \partial_j.$$

Le laplacien euclidien est donc

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

Les valeurs propres de Dirichlet (de Neumann) sont les nombres réels λ pour lesquels il existe une fonction, alors dite propre, $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ telle que

$$-\Delta u = \lambda u \text{ et } \ u|_{\partial\Omega} = 0, \ (\text{Neumann} : \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0),$$

où n est le champ de vecteur normal de $\partial\Omega$. Les valeurs propres de Dirichlet sont notées λ et indicées par $\mathbb{N}_{\geqslant 1}$. Les valeurs propres de Neumann sont notées μ et indicées par $\mathbb{N}$. Les valeurs propres de Dirichlet et de Neumann satisfont les principes variationnels (voir par exemple Chavel [7] et Courant-Hilbert [8])

$$\lambda_1 = \inf_{f \in \mathcal{C}^1(\Omega)} \left\{ \frac{\int_\Omega |\nabla f|^2}{\int_\Omega f^2} \;\middle|\; f|_{\partial\Omega} = 0, \, f \not\equiv 0 \right\},$$

$$\mu_0 = \inf_{f \in \mathcal{C}^1(\Omega)} \left\{ \frac{\int_\Omega |\nabla f|^2}{\int_\Omega f^2} \;\middle|\; f \not\equiv 0 \right\},$$

et pour $k > 1$, $j > 0$,

$$\lambda_k = \inf_{f \in \mathcal{C}^1(\Omega)} \left\{ \frac{\int_\Omega |\nabla f|^2}{\int_\Omega f^2} \;\middle|\; f|_{\partial\Omega} = 0, \, f \not\equiv 0 = \int_\Omega f \phi_j, \, 0 < j < k \right\},$$

$$\mu_j = \inf_{f \in \mathcal{C}^1(\Omega)} \left\{ \frac{\int_\Omega |\nabla f|^2}{\int_\Omega f^2} \;\middle|\; f \not\equiv 0 = \int_\Omega f \varphi_l, \, 0 \leqslant l < j \right\},$$

où ϕ_j et φ_l sont les fonctions propres associées à λ_j et à μ_j, respectivement. Si on n'impose aucune condition au bord, la condition de Neumann est alors immédiatement satisfaite par la fonction réalisant l'infimum.

Les valeurs propres satisfont aussi les principes "min-max" suivants :

$$\lambda_k = \inf \left\{ \sup \left\{ \frac{\int_\Omega |\nabla f|^2}{\int_\Omega f^2} \,\middle|\, f \in L \right\} \,\middle|\, \dim(L) = k,\ f|_{\partial\Omega} = 0 \,\forall\, f \in L \right\},$$

$$\mu_k = \inf \left\{ \sup \left\{ \frac{\int_\Omega |\nabla f|^2}{\int_\Omega f^2} \,\middle|\, f \in L \right\} \,\middle|\, \dim(L) = k \right\},$$

où $L \subset H^1(\Omega)$. Les principes variationnels et min-max sont identiques pour un opérateur Schrödinger $\Delta + V$, où le potentiel V est une fonction lisse.

Rappelons la proposition suivante [14] :

Proposition 1.3. — *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine de $\mathbb{R}^n$ à bord lisse et soit une base orthonormale de fonctions propres $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$ respectivement associées aux valeurs propres Dirichlet $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\psi_k = \frac{\phi_k}{\phi_1}$ est lisse jusqu'au bord et satisfait :*

$$\Delta\psi_k + 2\nabla \log \phi_1 \nabla \psi_k = -(\lambda_k - \lambda_1)\psi_k. \tag{1.1}$$

$$\left.\frac{\partial \psi_k}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1.2}$$

De plus, $\nabla \log \phi_1 \nabla \psi_k$ est lisse jusqu'au bord. Si le bord est seulement lisse par morceaux, l'égalité (1.1) est encore satisfaite, $\nabla \log \phi_1 \nabla \psi_k$ est lisse jusqu'aux parties lisses de $\partial\Omega$, et de plus l'égalité (1.2) est vérifiée sur chaque composante lisse de $\partial\Omega$.

Une conséquence immédiate de la proposition précédente (pour $k = 2$ on retouve un résultat de Ma-Liu [16]) est

Proposition 1.4 (Lu-R./Ma-Liu). — *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ et soit $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$ une base orthonormale de fonctions propres respectivement associées aux valeurs propres de Dirichlet $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ du laplacien eucildien. Soient $\{\mu_k\}_{k=0}^\infty$ les valeurs propres de Neumann du laplacien de Bakry-Émery pour la fonction poid $-2\log\phi_1$. Alors,*

$$\lambda_k - \lambda_1 = \mu_{k-1} \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N},\, k \geqslant 1.$$

Motivé par cette proposition, nous avons démontré les principes variationnels pour le laplacien de Bakry-Émery ; pour $k = 2$ et $M \subset \mathbb{R}^n$, c'est le corollaire 1.3 de Kirsch-Simon [9].

Proposition 1.5 (Lu-R./Kirsch-Simon). — *Soit (M, g, ϕ) une variété de Bakry-Émery (avec ou sans bord). Les valeurs propres du laplacien de*

Bakry-Émery satisfont :
pour la condition Dirichlet si $\partial M \neq \emptyset$:

$$\lambda_1 = \inf_{\varphi \in \mathcal{C}^1(M)} \left\{ \frac{\int_M |\nabla\varphi|^2 e^{-\phi}}{\int_M \varphi^2 e^{-\phi}} \;\middle|\; \varphi \not\equiv 0,\, \varphi|_{\partial M} = 0 \right\};$$

pour la condition Neumann si $\partial M = \emptyset$:

$$\mu_0 = \inf_{\varphi \in \mathcal{C}^1(M)} \left\{ \frac{\int_M |\nabla\varphi|^2 e^{-\phi}}{\int_M \varphi^2 e^{-\phi}} \;\middle|\; \varphi \not\equiv 0, \right\}.$$

Pour $k \geqslant 2$,

$$\lambda_k = \inf_{\varphi \in \mathcal{C}^1(M)} \left\{ \frac{\int_M |\nabla\varphi|^2 e^{-\phi}}{\int_M \varphi^2 e^{-\phi}} \;\middle|\; \varphi \not\equiv 0 = \int_M \varphi\varphi_j e^{-\phi},\, 1 \leqslant j < k, \varphi|_{\partial M} = 0 \right\},$$

$$\mu_k = \inf_{\varphi \in \mathcal{C}^1(M)} \left\{ \frac{\int_M |\nabla\varphi|^2 e^{-\phi}}{\int_M \varphi^2 e^{-\phi}} \;\middle|\; \varphi \not\equiv 0 = \int_M \varphi\varphi_j e^{-\phi},\, 0 \leqslant j < k \right\},$$

où φ_j est la fonction minimisante quand $k = j$.

Si $M \subset \mathbb{R}^n$ avec valeurs propres de Dirichlet $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ et fonctions propres orthonormales associées $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$, et si la fonction poid est $\phi = -2\log\phi_1$, le principe variationnel pour (M, g_{eucl}, ϕ) est alors

$$\lambda_k - \lambda_1 = \inf_{\varphi \in \mathcal{C}^1(\Omega)} \left\{ \frac{\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 \phi_1^2}{\int_\Omega \varphi^2 \phi_1^2} \;\middle|\; \varphi \not\equiv 0 \right\},$$

et pour $k \geqslant 2$,

$$\lambda_k - \lambda_1 = \inf_{\varphi \in \mathcal{C}^1(\Omega)} \left\{ \frac{\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 \phi_1^2}{\int_\Omega \varphi^2 \phi_1^2} \;\middle|\; \varphi \not\equiv 0 = \int_\Omega \varphi\varphi_j \phi_1^2,\, 1 \leqslant j < k \right\}.$$

Naturellement, si il y a un principe variationnel, il y a aussi un principe min-max.

Proposition 1.6 (Lu-R.). — *Soit (M, g, ϕ) une variété de Bakry-Émery (avec ou sans bord). Alors les valeurs propres du laplacien de Bakry-Émery satisfont : pour la condition Dirichlet si $\partial M \neq \emptyset$*

$$\lambda_k = \inf \left\{ \sup \left\{ \frac{\int_M |\nabla\varphi|^2 e^{-\phi}}{\int_M \varphi^2 e^{-\phi}} \;\middle|\; \varphi \in L \right\} \;\middle|\; dim(L) = k,\; f|_{\partial\Omega} = 0\, \forall\, f \in L \right\},$$

et pour la condition Neumann si $\partial M = \emptyset$:

$$\mu_k = \inf \left\{ \sup \left\{ \frac{\int_M |\nabla\varphi|^2 e^{-\phi}}{\int_M \varphi^2 e^{-\phi}} \;\middle|\; \varphi \in L \right\} \;\middle|\; dim(L) = k \right\},$$

où $L \subset H^1(M, e^{-\phi} dV_g)$.

Une estimation utile est donnée par la proposition suivante :

PROPOSITION 1.7 (Lu-R.). — *Soient $k \geqslant 1$, et $\xi_1, \cdots, \xi_k$ orthogonales (et non triviales) dans (M, g, ϕ), c'est-à-dire que $\xi_i \not\equiv 0$, $1 \leqslant i \leqslant k$ et*

$$\int_M \xi_i \xi_j e^{-\phi} = 0, \quad i \neq j.$$

Alors, si $\partial M = \emptyset$, ou si $\partial M \neq \emptyset$ et on considère alors la condition de Neumann au bord, les valeurs propres du laplacien de Bakry-Émery $\{\mu_j\}$ satisfont

$$\sum_{j=0}^{k} \mu_j \leqslant \sum_{j=1}^{k} \frac{\int_M |\nabla \xi_j|^2 e^{-\phi}}{\int_M |\xi_j|^2 e^{-\phi}}.$$

2. L'écart fondamental

La fonction *écart* ξ sur l'espace des domaines de $\mathbb{R}^n$ est définie comme suit :

$$\xi : M \to \mathbb{R}, \quad \xi(M) = d^2(\lambda_2 - \lambda_1),$$

où d est le diamètre de M et $\lambda_1 < \lambda_2$ sont les premières valeurs propres du laplacien euclidien avec la condition de Dirichlet au bord. Le *problème de l'écart* consiste à estimer la fonction écart sur l'espace des domaines *convexes.* Lorsque les domaines ne sont pas convexes, en considérant des domaines qui ont la forme de deux sphères separées par une longue tube, l'écart tend vers zero. Si le domaine est normalisé de sorte à avoir diamètre un, la fonction écart est alors égale à *l'écart fondamental :*

$$\lambda_2 - \lambda_1.$$

Van den Berg [4] a conjecturé que la fonction écart (sur les domaines convexes) est bornée inférieurement par une constante ; il est donc naturel de conjecturer que la constante est $3\pi^2$, l'écart de l'intervalle $[0, 1]$. Par exemple, on peut calculer les valeurs propres de Dirichlet d'un rectangle $R \cong [0, a] \times [0, b]$, où $a \geqslant b$. Les valeurs propres sont alors

$$\lambda_{j,k} = \frac{\pi^2 j^2}{a^2} + \frac{\pi^2 k^2}{b^2},$$

et l'écart fondamental est

$$\frac{3\pi^2}{a^2}.$$

La fonction écart est

$$\frac{3\pi^2(a^2 + b^2)}{a^2}.$$

On voit dans cet exemple que la fonction écart sur les rectangles est maximisée par le carré et tend vers son infimum $3\pi^2$ quand un rectangle s'écrase sur un intervalle.

Les premiers résultats estimant l'écart utilisent des estimations de gradient dans l'esprit de Li-Yau [12] ; Singer-Wong-Yau-Yau [17] ont montré que l'écart satisfait

$$\xi \geqslant \frac{\pi^2}{4}.$$

En raffinant péniblement les mêmes techniques, Yu-Zhong [21] prouve l'estimation

$$\xi \geqslant \pi^2;$$

voir aussi Li-Treibergs [11].

Le corollaire 1 montre que si le diamètre de M est un alors

$$\xi = \lim_{\varepsilon \to 0} \mu_{1,\varepsilon}.$$

En utilisant ce corollaire directement avec les estimations de gradient de[12], on obtient les résultats de [17] et [21] avec des preuves beaucoup plus courtes. Nous avons remarqué [14] que le Hessien du logarithme de la première fonction propre joue le rôle de la courbure Ricci pour les estimations de gradient de Li-Yau. On peut obtenir tous les résultats d'estimations de gradient pour la géométrie de Bakry-Émery ; c'est un projet intéressant que d'appliquer de tels résultats aux espaces métriques-mesurés [18]. Dans tous les cas, l'observation que *le Hessien du logarithme de la première fonction propre joue le rôle de la courbure Ricci* a été une des clés de la preuve de la conjecture de l'écart fondamental.

L'autre clé est l'écart associé à un opérateur Schrödinger à potentiel convexe en dimension une ; en dimension une, ce problème a été resolu par Lavine [10, Theorem 3.1].

Théorème 2.1 (Lavine). — *Soit V une fonction convexe sur $[0, R]$ et soient λ_1, λ_2 les deux premières valeurs propres de Dirichlet (respectivement Neumann) de l'opérateur Schrödinger $-d^2/dx^2 + V$ sur $[0, R]$. Alors*

$$\lambda_2 - \lambda_1 \geqslant \Gamma_0,$$

où Γ_0 est l'écart fondamental pour $V =$ constante pour l'opérateur de Dirichlet (respectivement de Neumann), et il y a égalité si et seulement si $V =$ constante. Alors, pour l'opérateur de Dirichlet,

$$\lambda_2 - \lambda_1 \geqslant \frac{3\pi^2}{R^2},$$

et pour l'opérateur de Neumann

$$\lambda_2 - \lambda_1 \geqslant \frac{\pi^2}{R^2}.$$

Pour utiliser le théorème de Lavine, Andrews et Clutterbuck introduisent les *module de continuité* et *module de convexité/concavité.*

Définition 2.2 (Andrews-Clutterbuck). — *Soient une fonction $\eta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ et une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$, où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un domaine. La fonction η est un* module de continuité *pour la fonction f si*

$$|f(y) - f(x)| \leqslant 2\eta\left(\frac{|y-x|}{2}\right).$$

Pour définir le *module de convexité et concavité* il faut d'abord définir le *module d'expansion* et *module de contraction.*

Définition 2.3 (Andrews-Clutterbuck). — *Soit une fonction $\omega : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ et soit X un champ de vecteur défini sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. La fonction ω est un* module d'expansion *pour X si*

$$(X(y) - X(x)) \cdot \frac{y-x}{|y-x|} \geqslant 2\omega\left(\frac{|y-x|}{2}\right), \quad \forall\, x, y \in \Omega,\ y \neq x.$$

La fonction ω est un module de contraction *pour X si $-\omega$ est un module d'expansion pour $-X$.*

Définition 2.4 (Andrews-Clutterbuck). — *Soit une fonction $\omega : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ et soit f une fonction semi-convexe sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. La fonction ω est un* module de convexité *pour f si ω est un module d'expansion pour le champ de vecteur donné par le gradient de la fonction f, ∇f. La fonction ω est un* module de concavité *pour f si elle est un module de contraction pour ∇f.*

Ensuite, Andrews et Clutterbuck ont utilisé ces idées pour raffiner le résultat de Brascamp-Lieb [6] : Hess $\log \phi_1 \leqslant 0$. Andrews et Clutterbuck démontrent que $(\log \tilde{\phi}_1)'$ est un module de concavité pour $\log \phi_1$, où $\tilde{\phi}_1$ est la fonction propre pour un opérateur Schrödinger en dimension une. Ce résultat signifie que ϕ_1 est "davantage log-concave" que la première fonction propre du problème en dimension une. Puisque le problème a été resolu en dimension une, Andrews et Clutterbuck obtiennent l'estimation pour l'écart en dimension n [1, Theorem 1.3] suivante :

Théorème 2.5 (Andrews-Clutterbuck). — *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine convexe de diamètre R. Soient λ_1 et λ_2 les premières valeurs propres Dirichlet de $\Delta + V$ sur Ω. Soit une fonction $\tilde{V} \in \mathcal{C}^1([0,R])$, et soient E_1 et E_2*

les premières valeurs propres Dirichlet de $-d^2/dx^2 + \tilde{V}$ *sur* $[0, R]$*. Si* $\tilde{V}'$ *est un module de convexité pour* V*, alors*

$$\lambda_2 - \lambda_1 \geqslant E_2 - E_1.$$

Enfin, ils ont montré la conjecture de l'écart fondamental.

Corollaire 2.6 (Andrews-Clutterbuck). — *Si* V *est convexe alors*

$$\lambda_2 - \lambda_1 \geqslant \frac{3\pi^2}{R^2}.$$

Si on considère l'écart sur l'espace des modules du triangle, il se comporte totalement différemment.

3. L'écart de simplexes

Dans la dernière section de cet article, nous considérons un problème plus concret. Rappelons qu'un n-simplexe X est un ensemble de $n+1$ vecteurs $\{v_0, \cdots, v_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ tels que $v_1 - v_0, \cdots, v_n - v_0$ sont linéairement indépendants. Le domaine convexe

$$\left\{ \sum_{j=0}^{n} t_j v_j \,\middle|\, \sum_{j=0}^{n} t_j = 1,\ t_j \geqslant 0 \text{ for } 0 \leqslant j \leqslant n \right\}$$

est l'enveloppe convexe de $\{v_0, \cdots, v_n\}$. Ce domaine est borné, à bord lisse par morceaux. Par simplicité, nous écrivons le simplexe X pour signifier à la fois $\{v_0, \cdots, v_n\}$ et l'enveloppe convexe de $\{v_0, \cdots, v_n\}$. Si $n = 2$, un simplexe est simplement un triangle. L'espace des modules du n-simplexe est parametré par l'ensemble des n-simplexes de diamètre un. En contraste du théorème de Andrews et Clutterbuck, la fonction écart sur l'espace des modules du n-simplexe *n'est pas* minimisé par l es simplexes qui s'effondrent en dimension inférieure.

Théorème 3.1 (Lu-R.). — *Soit* Y *un* $(n-1)$*-simplexe, où* $n \geqslant 2$*. Soit* $\{X_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *une suite de* n*-simplexes, telle que chacun est un graphe sur* Y *et la hauteur de* X_j *sur* Y *tend vers zero quand* $j \to \infty$*. Alors,*

$$\xi(X_j) \to \infty, \quad j \to \infty.$$

Il existe alors une constante $C > 0$ *dépendant seulement de* n *et de* Y *telle que*

$$\xi(X_j) \geqslant C h(X_j)^{-4/3},$$

où $h(X_j)$ *est la hauteur de* X_j *sur* Y*.*

Dans le cas des triangles ($n = 2$), le théorème implique alors le corollaire suivant : [(2)]

Corollaire 3.2 (Friedlander-Solomyak). — *Soit P l'espace des modules du triangle. Alors, la fonction écart $\xi : P \to \mathbb{R}$ est propre.*

Le corollaire implique l'existence d'un triangle minimisant l'écart ; en collaboration avec T. Betcke [5], on montre la conjecture d'Antunes-Freitas [2] :

Théorème 3.3 (Betcke-Lu-Rowlett). — *Soit T un triangle. Alors,*

$$\xi(T) \geqslant \frac{64\pi^2}{9},$$

et il y a égalité si et seulement si T est équilatéral.

Il est alors naturel de proposer la généralisation suivante :

Conjecture 3.4. — *Soit $\mathfrak{M}_n$ l'espace des modules du n-simplexe, $n \geqslant 2$. Alors la fonction écart $\xi : M_n \to \mathbb{R}$ est propre, et le simplexe défini par $p_0, p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{R}^n$ de sorte que*

$$|p_i - p_j| = 1 \text{ for } 0 \leqslant i \neq j \leqslant n$$

minimise uniquement la fonction écart sur $\mathfrak{M}_n$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. Andrews & J. Clutterbuck, « Proof of the fundamental gap conjecture », arXiv 1006.1686, (2010).

[2] P. Antunes & P. Freitas, « A numerical study of the spectral gap », *J. Phys. A* **41** (2008), n° 5, p. 055201, 19.

[3] D. Bakry & M. Émery, « Diffusions hypercontractives », in *Séminaire de probabilités, XIX, 1983/84*, Lecture Notes in Math., vol. 1123, Springer, Berlin, 1985, p. 177-206.

[4] M. van den Berg, « On condensation in the free-boson gas and the spectrum of the Laplacian », *J. Statist. Phys.* **31** (1983), n° 3, p. 623-637.

[5] T. Betcke, Z. Lu & J. Rowlett, « The fundamental gap of triangles », en préparation.

[6] H. J. Brascamp & E. H. Lieb, « On extensions of the Brunn-Minkowski and Prékopa-Leindler theorems, including inequalities for log concave functions, and with an application to the diffusion equation », *J. Functional Analysis* **22** (1976), n° 4, p. 366-389.

[7] I. Chavel, *Eigenvalues in Riemannian geometry*, Pure and Applied Mathematics, vol. 115, Academic Press Inc., Orlando, FL, 1984, Including a chapter by Burton Randol, With an appendix by Jozef Dodziuk, xiv+362 pages.

2. Une preuve indépendante de ce théorème se trouve dans [15].

[8] R. Courant & D. Hilbert, *Methods of mathematical physics. Vol. I*, Interscience Publishers, Inc., New York, N.Y., 1953, xv+561 pages.

[9] W. Kirsch & B. Simon, « Comparison theorems for the gap of Schrödinger operators », *J. Funct. Anal.* **75** (1987), n° 2, p. 396-410.

[10] R. Lavine, « The eigenvalue gap for one-dimensional convex potentials », *Proc. Amer. Math. Soc.* **121** (1994), n° 3, p. 815-821.

[11] P. Li & A. Treibergs, « Applications of eigenvalue techniques to geometry », in *Contemporary geometry*, Univ. Ser. Math., Plenum, New York, 1991, p. 21-52.

[12] P. Li & S. T. Yau, « Estimates of eigenvalues of a compact Riemannian manifold », in *Geometry of the Laplace operator (Proc. Sympos. Pure Math., Univ. Hawaii, Honolulu, Hawaii, 1979)*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXVI, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1980, p. 205-239.

[13] J. Lott, « Some geometric properties of the Bakry-Émery-Ricci tensor », *Comment. Math. Helv.* **78** (2003), n° 4, p. 865-883.

[14] Z. Lu & J. Rowlett, « The fundamental gap », preprint (2009), arXiv 1003.0191v1.

[15] ———, « The fundamental gap conjecture on polygonal domains », arXiv :0810.4937, (2008).

[16] L. Ma & B. Liu, « Convex eigenfunction of a drifting Laplacian operator and the fundamental gap », *Pacific J. Math.* **240** (2009), n° 2, p. 343-361.

[17] I. M. Singer, B. Wong, S.-T. Yau & S. S.-T. Yau, « An estimate of the gap of the first two eigenvalues in the Schrödinger operator », *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* **12** (1985), n° 2, p. 319-333.

[18] K.-T. Sturm, « On the geometry of metric measure spaces. I », *Acta Math.* **196** (2006), n° 1, p. 65-131.

[19] C. Villani, *Topics in optimal transportation*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 58, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003, xvi+370 pages.

[20] G. Wei & W. Wylie, « Comparison geometry for the Bakry-Emery Ricci tensor », *J. Differential Geom.* **83** (2009), n° 2, p. 377-405.

[21] Q. H. Yu & J. Q. Zhong, « Lower bounds of the gap between the first and second eigenvalues of the Schrödinger operator », *Trans. Amer. Math. Soc.* **294** (1986), n° 1, p. 341-349.

Julie Rowlett
Universität Bonn
Hausdorff Center for Mathematics
Villa Maria
Endenicher Allee 62
D-53115 Bonn (Germany)
rowlett@mpim-bonn.mpg.de