Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Marc Burger

Grandes valeurs propres du laplacien et graphes

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 4 (1985-1986), p. 95-100

<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1985-1986__4__95_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
CHAMBÉRY-GRENOBLE
1985–1986 (95–100)

GRANDES VALEURS PROPRES DU LAPLACIEN ET GRAPHES

par *Marc BURGER*

Depuis [Se] on sait que si Γ est un sous-groupe arithmétique de $SL(2,\mathbf{R})$ la première valeur propre λ_1 du laplacien de la surface de Riemann associée est grande *i.e.* $\lambda_1 > 3/16$. Cela répond d'une certaine manière à la question de P. Buser [B] à savoir s'il existe une suite de surfaces de Riemann avec S_n de genre $g_n \to \infty$ et $\lambda_1(S_n)$ ne tend pas vers 0.

Nous allons traiter ce problème en remarquant que la question analogue pour les graphes se traite aisément moyennant la propriété (T) de Kajdan [D-K]. Nous montrerons alors que si $M' \to M$ est un revêtement galoisien de groupe G , les petites valeurs propres du Laplacien de M' sont minorées par les valeurs propres de l'opérateur de moyenne d'un graphe naturellement associé à G . On en déduira que si M est une variété riemannienne compacte et $\pi_1(M)$ "suffisamment libre" il existe des revêtements $M_n \to M$ tels que $\mathrm{vol}(M_n) \to \infty$ et $\lambda_1(M_n) \geq c > 0$.

Les résultats exposés ici ont paru (sous une forme un peu différente) dans [Bu].

1. La propriété (T)

Soit G un groupe localement compact et $\widehat{G}$ l'ensemble de ses classes d'équivalence de représentations unitaires continues irréductibles. On munit $\widehat{G}$ de la topologie de Fell : soit $\pi \in \widehat{G}$, $\varepsilon > 0$, K un compact de G et $v_1, \ldots, v_n$ des vecteurs de l'espace $\mathcal{H}_\pi$ de π. Alors

$$V(\varepsilon, v_1, \ldots, v_n, K; \pi) = \{\omega \in \widehat{G} \mid \exists w_1, \ldots, w_n \in \mathcal{H}_\omega \text{ avec } |\langle \pi(g)v_i, v_j\rangle - \langle \omega(g)w_i, w_j\rangle| < \varepsilon \ , \ \forall i,j \ , \ \forall g \in K\}$$

Les ensembles $V(\varepsilon, v_1, \ldots, v_n, K; \pi)$ forment un système fondamental de voisinage de π.

DÉFINITION. — *On dit que G a la propriété* $(\mathbf{T})$ *si la représentation identité* 1_G *est isolée dans* $\widehat{G}$ *muni de la topologie de Fell.*

On vérifie aisément que dans $\widehat{G}$ une suite π_α converge vers π si et seulement si pour tout $v \in \mathcal{H}_\pi$ il existe $v_\alpha \in \mathcal{H}_{\pi_\alpha}$ tels que la suite $\langle \pi_\alpha(g)v_\alpha, v_\alpha\rangle$ converge vers $\langle \pi(g)v, v\rangle$ uniformément sur les parties compactes de G .

L'intérêt de la propriété $(\mathbf{T})$ provient des résultats suivants : Si Γ est discret dénombrable et possède la propriété $(\mathbf{T})$ alors

a) Γ est engendré par un nombre fini de générateurs.

b) Pour toute représentation orthogonale $\pi : \Gamma \to O(n, \mathbf{R})$ on a $H^1(\Gamma, \pi) = 0$.

c) Γ a la propriété FA [S], en particulier n'est pas un amalgame.

d) si Γ est un sous-groupe discret de covolume fini de G et si G a la propriété $(\mathbf{T})$ alors Γ a la propriété $(\mathbf{T})$.

Enfin, cette dernière propriété et le théorème suivant de Kajdan [D-K] montrent que les groupes discrets ayant la propriété $(\mathbf{T})$ existent en profusion.

THÉORÈME. — *Un groupe algébrique semi-simple sur un corps localement compact non discret, dont toutes les composantes simples sont de rang déployé* ≥ 2, *possède la propriété* $(\mathbf{T})$.

En particulier, pour $n \geq 3$, $SL(n, \mathbf{Z}), SP(n, \mathbf{Z})$ possèdent la propriété $(\mathbf{T})$.

2. Graphes ayant grande valeur propre

Soit Γ un groupe discret ayant un nombre fini de générateurs S tel que $S = S^{-1}$, Γ' un sous-groupe normal de Γ et $\mathcal{G}$ le graphe sur $\Gamma' \backslash \Gamma$ déduit de S *i.e.* les arêtes entre $\dot\gamma$ et $\dot\gamma'$ sont en bijection avec $\gamma'^{-1}\gamma\Gamma' \cap S$. Soit pour $F \in \mathbf{C}[\Gamma'\backslash\Gamma]$,

$$MF(\dot\gamma) = \sum_{\gamma' \equiv \gamma} F(\dot\gamma') \,,$$

$$Q(F) = \sum_{\gamma' \equiv \gamma} |F(\dot\gamma') - F(\dot\gamma)|^2 = 2((r - M)F, F)$$

où $r = \operatorname{Card} S$. On désigne par $0 < \lambda_1(\mathcal{G}) \leq \lambda_2(\mathcal{G}) \leq \cdots$ les valeurs propres de la forme hermitienne Q . Soit ρ la représentation régulière de Γ dans $\mathbf{C}[\Gamma'\backslash\Gamma]$ et π une représentation irréductible de Γ telle que $\pi \subseteq \rho$. Comme M commute à $\rho(\gamma)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$, M laisse invariant la composante isotypique $\mathbf{C}[\Gamma'\backslash\Gamma, \pi]$ de π dans ρ . Soient $0 \leq \lambda_1(\pi) \leq \lambda_2(\pi) \leq \cdots$ les valeurs propres de Q restreinte à ce sous-espace. Il est clair que $\lambda_1(\pi) = 0$ si et seulement si $\pi = 1_\Gamma$.

LEMME. — *Soit $\Gamma_n \triangleleft \Gamma$, $\mathcal{G}_n$, $\pi_n \leq \rho_n$, $\lambda_1(\pi_n)$ comme ci-dessus. Alors $\pi_n \to 1_\Gamma$ dans la topologie de Fell de $\widehat{\Gamma}$ si et seulement si $\lambda_1(\pi_n) \to 0$, $n \to \infty$.*

En effet : $\lambda_1(\pi_n) = 2\sum_{\gamma \in S} \left(1 - \mathrm{Re}\langle \pi_n(\dot{\gamma}) f_n, f_n \rangle\right)$ pour f_n convenablement choisi. Donc $\lambda_1(\pi_n) \to 0$ si et seulement si $\mathrm{Re}\langle \pi_n(\gamma) f_n, f_n \rangle \to 1$ pour tout $\gamma \in S$. Comme S engendre Γ cela est équivalent à $\pi_n \to 1_\Gamma$. ∎

COROLLAIRE. — *Soit Γ un groupe discret ayant la propriété* (**T**), *S un système fini de générateurs de Γ tel que $S = S^{-1}$. Alors il existe $c(S,\Gamma) > 0$ tel que pour tout $\Gamma' \triangleleft \Gamma$,$\lambda_1(\mathcal{G}) \geq c(S,\Gamma)$.*

Remarque. — Il y a une construction différente de graphes à grande valeur propre, qui a l'avantage de donner des bornes explicites (en fait les meilleures possibles) de ces valeurs propres.

Soit $M_2(\Gamma_0(q))$ l'espace des formes automorphes de poids z, q est un premier, et soit $T(p)$, $p \neq q$ l'opérateur de Hecke agissant dans $M_2(\Gamma_0(q))$. On déduit alors des résultats d'Eichler [E 1] qu'il existe une base de $M_2(\Gamma_0(q))$ dans laquelle la matrice de $T(p)$ est symétrique à coefficients entiers non négatifs et la somme des lignes est $p+1$. Soit $\mathcal{G}_{p,q}$ le graphe régulier de valence $p+1$ qui lui correspond. Le nombre de composantes connexes de $\mathcal{G}_{p,q}$ est égal au nombre de cusps de $\Gamma_0(q)$. Prenons une composante $\mathcal{G}'_{p,q}$. Alors la valeur propre $p+1$ de l'opérateur de moyenne est de multiplicité 1 et les autres valeurs propres correspondent à des formes paraboliques propres pour $T(p)$, i.e. d'après [E 2] ces valeurs propres sont inférieures ou égales à $2\sqrt{p}$. Par ailleurs, si $q \to \infty$, $\mathrm{diam}(\mathcal{G}'_{p,q}) \to \infty$ et si $\lambda_1(\mathcal{G}'_{p,q})$ est la première valeur propre $< p+1$ de l'opérateur de moyenne de $\mathcal{G}'_{p,q}$ alors $\lambda_1 > 2\sqrt{p} - c/d^2$, $d = \mathrm{diam}(\mathcal{G}'_{p,q})$.

En résumé, on peut construire pour chaque p des graphes réguliers de valence $p+1$, connexes, $\mathcal{G}_{p,n}$ tel que si $\lambda_1(p,n)$ est la première valeur propre de l'opérateur de moyenne de $\mathcal{G}_{p,n}$ inférieure à $p+1$ on a $\lambda_1(p,n) \leq 2\sqrt{p}$ et $\mathrm{diam}(\mathcal{G}_{p,n}) \to \infty$ pour $n \to \infty$.

Par ailleurs, on montre aisément :

LEMME. — *Si $\mathcal{G}$ est un graphe régulier de valence $p+1$,de diamètre d et $p+1 > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots$ le spectre de l'opérateur de moyenne de $\mathcal{G}$,* alors

$$\lambda_1 > 2\sqrt{p} - c/d^2.$$

3. Grande valeur propre de surfaces

Soit $M' \to M$ un revêtement galoisien de variétés riemanniennes compactes de groupe G . Soit $\widetilde{M}$ le revêtement universel de M , $x_0 \in \widetilde{M}$,

$$\mathcal{F}(x_0) = \left\{ x \in \widetilde{M} | d(x, x_0) < d(x, \gamma x_0) \ , \ \forall \gamma \in G - \{e\} \right\}$$

$\mathcal{F} = p'\big(\overline{\mathcal{F}(x_0)}\big)$ où p' est la projection de $\widetilde{M}$ sur M' . On munit alors G d'une structure de graphe $\mathcal{G}$ en posant $\gamma \equiv \gamma'$ si $\gamma \neq \gamma'$ et $\gamma'^{-1}\gamma\mathcal{F} \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$. On pourrait aussi exiger que $\gamma'^{-1}\gamma\mathcal{F}$ rencontre $\mathcal{F}$ en une sous-variété à bord de dimension $n-1$, $(n = \dim M)$. Comme G agit transitivement sur $\mathcal{G}$ ce graphe est régulier de valence r . Soit alors A l'opérateur de moyenne de $\mathcal{G}$ et

$$B = \frac{(r-A)(r+2+A)}{(r+1)^2} \ .$$

Il est facile de voir que B est semi-défini positif et que 0 est valeur propre de multiplicité 1. Soit alors $0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots$ le spectre de B .

PROPOSITION. — *Il existe des constantes $c_1(M)$, $c_2(M)$ positives telles que si $\lambda_i(M')$, $i^{\text{ème}}$ valeur propre du Laplacien de M' , est telle que $\lambda_i(M') < c_1(M)$ alors*

$$\lambda_i(M') \geq c_2(M)\mu_i(B) \ .$$

COROLLAIRE. — *Soit $M' \to M$ un revêtement galoisien de groupe G de variétés riemanniennes compactes, $\mathcal{G}$ le graphe du revêtement, Q la forme hermitienne canonique sur $\mathbf{C}[\mathcal{G}]$, π une représentation irréductible de G , $\lambda_1(\pi, \mathcal{G})$ la plus petite valeur propre de Q dans la composante isotypique de π dans $\mathbf{C}[\mathcal{G}]$, $\lambda_1(\pi, M')$ la plus petite valeur propre de Δ dans la composante isotypique de π dans $L^2(M')$ alors :*

$$\lambda_1(\pi, M') \geq c(M)\lambda_1(\pi, \mathcal{G}) \ .$$

En ce qui concerne la proposition, soit $V_g = \cup_{g' \equiv g} g'\mathcal{F} \cup \mathcal{F}$. On remarque alors qu'il existe une constante $c_2(M) > 0$ telle que $\lambda_1^N(V_g) \geq c_2(M)$ et $\lambda_1^N(\mathcal{F}) \geq c_2(M)$ où λ_1^N est la première valeur propre non nulle du problème de Neumann.

Si $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$ est le spectre du Laplacien de M' et $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ un système orthonormé complet de fonctions propres, on remarque que l'application

$$\begin{aligned} L^2(M') &\to \mathbf{C}[\mathcal{G}] \\ f &\to F \end{aligned}$$

où $F(g) = \int_{g\cdot\mathcal{F}} f$ restreinte au sous-espace $\oplus_{\lambda_i < c_1(M)} \mathbf{C}\varphi_i$, y est injective $(c_1(M) \leq \lambda_1^N(\mathcal{F}))$.

Soit alors $\Phi_0, \Phi_1, \ldots$ un système orthonormé de fonctions propres de B et soit j avec $\lambda_j < c_1(M)$, $f \in \oplus_{k=0}^{j} \mathbf{R}\varphi_k$, $f \neq 0$ avec F orthogonale à $\Phi_0, \ldots, \Phi_{j-1}$.

Alors :

$$\int_{V_g} \|\nabla f(x)\|^2 dx \geq c_2(M) \int_{V_g} \left[f(x) - \frac{1}{m(V_g)} \int_{V_g} f\right]^2 dx$$
$$= c_2(M)\left\{ \int_{V_g} f(x)^2 dx - \frac{1}{m(V_g)}\Big(\int_{V_g} f\Big)^2\right\}.$$

En sommant sur $g \in G$:

$$(r+1) \int_{M'} \|\nabla f(x)\|^2 dx \geq c_2(M)\Big\{(r+1) \int_{M'} f(x)^2 dx - \frac{1}{m(M)(r+1)} \sum_g \big(AF(g) + F(g)\big)^2\Big\}$$

i.e.

$$\lambda_j \geq c_2(M) \left\{ 1 - \frac{(r+1)^{-2} \sum_g \big(AF(g) + F(g)\big)^2}{m(M) \int_{M'} f(x)^2 dx} \right\}.$$

L'inégalité ci-dessus jointe à : $\int_{M'} f(x)^2 dx \geq \frac{1}{m(M)} \sum_g F(g)^2$ fournit le résultat. ∎

Le corollaire se déduit aisément de la proposition en remarquant que l'application $f \to F$ est G-équivariante et que le minimum du spectre de B dans un sous-espace A-invariant est contrôlé par le minimum du spectre de $r - A$ dans celui-ci.

COROLLAIRE. — *Pour toute surface de Riemann S de genre $g \geq 2$ il existe $S_n \to S$ revêtements galoisiens tels que* genre$(S_n) \to \infty$ *et* $\lambda_1(S_n) \geq c > 0$ *pour tout n .*

En effet, $\pi_1(S)$ a pour quotient le groupe libre à 2 générateurs et donc $SL(3,\mathbf{Z})$. Soit alors $\Gamma_p \triangleleft \pi_1(S)$ tel que $\pi_1(S)/\Gamma_p = SL(3,\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$. Comme $SL(3,\mathbf{Z})$ a la propriété (**T**), la première valeur propre $\lambda_1(\mathcal{G}_p)$ du graphe de $\pi_1(S)/\Gamma_p$ est minorée par une constante positive indépendante de p . Si S_p est le revêtement de S correspondant à Γ_p on aura $\lambda_1(S_p) \geq c > 0$ pour tout p .

Bibliographie

[B] P. BUSER. — *On Cheeger's inequality $\lambda_1 \geq h^2/4$*, Proc. Sympos. Pure Math., **36** (1980), 29-77.

[Bu] M. BURGER. — *Estimation de petites valeurs propres du Laplacien d'un revêtement de variétés riemanniennes compactes*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér.I Math., **302** (1986), 191-194.

[D-K] DELAROCHE-KIRILLOV. — *Sur les relations entre l'espace dual d'un groupe et la structure de ses sous-groupes fermés*, Sém. Bourbaki, 20ème année, n°343, 1967-68.

[E 1] M. EICHLER. — *The basis problem for modular forms and the traces of the Hecke operators*, Lecture notes in Math. (Springer), **320** (1973), 75-151.

[E 2] M. EICHLER. — *Quaternäre quadratische Formen und die Riemannsche Vermntung für die Kongruenzzeta-funktion*, Arch. Math. (Basel), **5** (1954), 355-366.

[S] J.P. SERRE. — *Arbres, amalgames, SL_2*, Astérisque n°46, 1977.

[Se] A. SELBERG. — *On the estimation of Fourier coefficients of modular forms*, Proc. Sympos. Pure Math., **8** (1965), 1-15.

—◇—

Marc BURGER
Mathematisches Institut
Rheinsprung 21
BASEL