Institut Fourier — Université de Grenoble I

Actes du séminaire de

Théorie spectrale et géométrie

Sorin DUMITRESCU

Sur les symétries des structures géométriques rigides

Volume 28 (2009-2010), p. 29-49.

<http://tsg.cedram.org/item?id=TSG_2009-2010__28__29_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
Volume 28 (2009-2010) 29-49

SUR LES SYMÉTRIES DES STRUCTURES GÉOMÉTRIQUES RIGIDES

Sorin Dumitrescu

RÉSUMÉ. — Nous présentons des résultats de classification pour des variétés lorentziennes de dimension trois avec “beaucoup” de symétries locales.

1. Introduction

Une *géométrie*, au sens de Klein, est un espace homogène G/I, où G est un groupe de Lie (de dimension finie) et I un sous-groupe fermé de G. Le groupe G est alors le groupe des symétries (isométries) de la géométrie et joue le rôle central suivant : deux parties de l'espace G/I seront considérées équivalentes si l'une est l'image de l'autre par une transformation appartenant au groupe G.

L'exemple type est celui de *la géométrie euclidienne*, associée au groupe des déplacements $G = O(n, \mathbf{R}) \ltimes \mathbf{R}^n$, où le stabilisateur d'un point est le groupe *d'isotropie* $I = O(n, \mathbf{R})$. Comme le sous-groupe des translations $\mathbf{R}^n$ agit librement et transitivement sur G/I, un modèle de la géométrie euclidienne sera alors $\mathbf{R}^n$ muni de la forme quadratique définie positive standard $dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2$.

Autres exemples remarquables de géométries :

– *la géométrie pseudo-riemannienne plate* de signature (p, q), obtenue pour $G = O(p, q) \ltimes \mathbf{R}^n$ et $I = O(p, q)$, avec p, q des entiers positifs de somme égale à n. Un modèle de cette géométrie est $\mathbf{R}^n$ muni de la

Mots-clés : structures géométriques rigides, métriques lorentziennes-champs de Killing locaux.
Classification math. : 53B21, 53B30, 53C56, 53A55.
Crédits : Ce travail a bénéficié d'une aide de l'Agence nationale de la recherche portant la référence ANR-08-JCJC-0130-01.

forme quadratique $dx_1^2 + \ldots + dx_p^2 - dx_{p+1}^2 - \ldots - dx_{p+q}^2$, non dégénérée et de signature (p, q). *La géométrie lorentzienne plate* correspond au cas particulier $q = 1$.

– *la géométrie affine* obtenue pour $G = GL(n, \mathbf{R}) \ltimes \mathbf{R}^n$ et $I = GL(n, \mathbf{R})$. L'action de G sur $\mathbf{R}^n$ préserve les droites parcourues à vitesse constante.
– *la géométrie projective*, où G est le groupe des transformations projectives de l'espace projectif $P^n(\mathbf{R})$ et I est le stabilisateur d'un point. Dans ce cas G préserve les droites projectives, sans respecter le paramétrage.

Gauß et Riemann sont les premiers à avoir introduit et étudié l'objet infinitésimal associé à la géométrie euclidienne : en language moderne, *une métrique riemannienne* sur une variété est un champ lisse de formes quadratiques définies positives.

Postérieurement, dans un vaste programme de généralisation, Cartan a réussi à définir les objets infinitésimaux associés aux géométries de Klein G/I, qui sont, à ces géométries, ce que les métriques riemanniennes sont à la géométrie euclidienne [54]. Par exemple, *une connexion affine* est la généralisation infinitésimale de la géométrie affine et *une connexion projective* est la généralisation infinitésimale de la géométrie projective. Cartan associe à ces objets un tenseur de courbure qui s'annule si et seulement si l'objet infinitésimal est *plat*, autrement dit localement équivalent à G/I.

Cartan et Lie ont longuement étudié les symétries (isométries) de ces objets infinitésimaux.

Ehresmann est celui qui a posé le cadre moderne (intrinsèque) dans lequel ces *structures géométriques* infinitésimales se définissent [16]. La définition de structure géométrique, dégagée par Ehresmann et reprise fructueusement par Gromov dans [26], sera donnée un peu plus tard. Pour l'instant le lecteur pourra se contenter de penser au cas des métriques pseudo-riemanniennes, au cas des connexions affines et, éventuellement, à celui des structures conformes pseudo-riemanniennes.

Rappelons qu'une *métrique pseudo-riemannienne* de signature (p,q) est un champ lisse de formes quadratiques non dégénérées de signature (p, q). Dans le cas particulier $q = 1$, la métrique est dite *lorentzienne*.

Une structure conforme pseudo-riemannienne est la donnée d'une métrique pseudo-riemannienne définie seulement à un multiple scalaire près.

Sauf mention explicite du contraire, les structures géométriques considérées dans ce mémoire seront suposées indéfiniment dérivables ou analytiques réelles.

1.1. Théorème de l'orbite ouverte de Gromov

La présence d'une structure géométrique sur une variété différentiable M induit une partition de la variété en classes d'équivalence : deux points se trouvent dans la même classe d'équivalence s'ils sont reliés par un difféomorphisme local qui préserve la structure géométrique.

À l'instar du cadre riemannien, il convient d'appeler *isométrie locale* un difféomorphisme local qui préserve la structure géométrique. Les orbites du pseudo-groupe des isométries locales sont alors les classes de la partition donnée par la relation d'équivalence précédente.

Dans [26] Gromov montre que cette partition est très régulière pour les structures géométriques *rigides*, qui se caractérisent par le fait que le pseudo-groupe des isométries locales est un pseudo-groupe de Lie de dimension finie. Par exemple, les métriques pseudo-riemanniennes, les connexions affines ou encore les structures conformes pseudo-riemanniennes en dimension supérieure ou égale à trois sont des structures géométriques rigides. Dans ce cas, il existe un ouvert dense de M dans lequel les orbites du pseudo-groupe des isométries locales sont des sous-variétés fermées. En particulier, si une telle orbite est dense, alors celle-ci est ouverte et, par conséquent, la structure géométrique en question est *localement homogène* sur un ouvert dense de M (*i.e.* le pseudo-groupe des isométries locales agit transitivement sur un ouvert dense).

Le résultat précédent est connu dans la littérature sous le nom du théorème de l'orbite ouverte et a été commenté et appliqué par de nombreux auteurs [2], [3],[4], [5],[7]. Il a été utilisé de manière essentielle pour la classification des structures qui mélangent la géométrie et la dynamique, comme les flots d'Anosov de contact [7], dans l'étude des actions de “gros groupes” (par exemple, les réseaux des groupes semi-simples) ou encore dans l'étude des variétés lorentziennes compactes dont le groupe d'isométries est non compact. Dans tous ces cas, on montre à un moment de la preuve qu'une certaine structure géométrique rigide, localement homogène sur un ouvert dense (d'après le théorème de l'orbite ouverte), l'est en fait sur toute la variété grâce à la dynamique d'un groupe d'isométries.

Une motivation importante a été pour nous la question naturelle posée dans [3] :

Question 1.1. — *Soit M une variété compacte connexe munie d'une structure géométrique rigide ϕ, localement homogène sur un ouvert dense. Sous quelles conditions ϕ est-elle localement homogène sur M ?*

Remarquons que l'homogénéité locale de ϕ sur un ouvert dense implique que tout invariant différentiel scalaire de ϕ est constant sur M.

Dans le cas où ϕ est une métrique lorentzienne ou riemannienne sur une *surface* ceci est suffisant pour conclure. En effet, en dimension deux la courbure sectionnelle est un invariant scalaire qui est constant si et seulement si la métrique est localement homogène [57]. Pour ce qui est du cadre riemannien, où (grâce à la compacité du groupe orthogonal) les invariants scalaires suffisent pour séparer les orbites du pseudo-groupe des isométries locales (voir [22] pour une version effective de cette propriété), ceci est également suffisant. La question 1.1 est donc réglée pour les variétés riemanniennes, mais ouverte et intéressante pour les variétés pseudo-riemanniennes de dimension supérieure ou égale à trois. En effet, pour une métrique pseudo-riemannienne les invariants scalaires ne suffisent pas pour tester l'homogénéité locale [35]. Notamment, il existe des métriques lorentziennes de dimension trois, non localement homogènes, dont tous les invariants scalaires sont nuls.

Dans [13] nous avons pu obtenir un résultat qui règle positivement la question 1.1 dans le cas des variétés lorentziennes *analytiques réelles* de dimension trois. Ceci sera détaillé un peu plus loin. La question 1.1 reste pourtant ouverte pour les métriques lorentziennes de dimension trois lisses (indéfiniment dérivables), ainsi que pour d'autres structures géométriques (par exemple, des structures conformes pseudo-riemanniennes et même conformes riemanniennes).

Une autre version de ce problème est l'étude de la question 1.1 en présence d'un groupe d'isométries et formule la conjecture vague suivante qui se dégage de [26, 59] et qui est explicitement posée dans [3] :

Conjecture 1.2 (Gromov, Zimmer). — *Il est possible de classifier les variétés compactes M munies d'une structure géométrique rigide ϕ admettant un groupe d'isométries important (par exemple, agissant non proprement).*

Dans ce sens Zeghib démontre dans [58] que les variétés lorentziennes compactes de dimension trois admettant une action isométrique non propre de $\mathbf{R}$ sont nécessairement localement homogènes et il classifie tous les exemples. Ce résultat est à rapprocher de celui de Ghys qui classifie les flots d'Anosov en dimension trois dont les feuilletages stables et instables sont lisses [23]. En effet, dans [23] Ghys construit une structure géométrique rigide préservée par le flot d'Anosov et montre qu'elle est localement homogène, avant de classifier tous les exemples. Cette méthode a été développée dans [7].

Un résultat célèbre qui supporte la conjecture 1.2 est le théorème de Ferrand-Obata [18, 45] qui affirme qu'une variété riemannienne compacte, dont le groupe des isométries conformes est non compact, est conformément équivalente à la sphère standard. Il convient de mentionner ici le résultat principal de [19], où Frances donne une preuve unifiée du théorème de Ferrand-Obata et d'un résultat similaire de Schoen [52] sur les structures CR.

Un cas plus précis de la conjecture 1.2 est la recherche d'un théorème du type Ferrand-Obata dans le cas conforme pseudo-riemannien :

Conjecture 1.3 (Lichnerowicz). — i) *Soit M une variété compacte munie d'une structure pseudo-riemannienne conforme ϕ admettant un groupe d'isométries essentiel (i.e. qui ne préserve aucune métrique pseudo-riemannienne dans la classe conforme). Alors ϕ est conformément plate.*

ii) *Soit M une variété compacte munie d'une connexion projective ϕ admettant un groupe d'isométries essentiel (i.e. qui ne préserve aucune connexion affine représentant la connexion projective). Alors ϕ est projectivement plate.*

Mentionnons que si le point ii) de la conjecture précédente a été réglé récemment par Matveev, dans le contexte des connexions projectives associées à des métriques riemanniennes [38], il reste ouvert en général.

1.2. Variétés localement modelées sur des espaces homogènes

L'idée générale pour mener à bien le programme de la conjecture 1.2 est la suivante. On montre d'abord que ϕ est localement homogène, localement modelée sur une géométrie de Klein G/I. Nous sommes alors dans la situation décrite par la définition suivante.

Définition 1.4. — *La variété M est localement modelée sur la géométrie G/I, au sens d'Ehresmann-Thurston* [15, 56], *ou encore admet une $(G, G/I)$-géométrie, s'il existe un atlas de M à valeurs dans des ouverts de G/I tel que les applications de changements de carte soient données par des éléments du groupe G.*

Si M est compacte, nous dirons aussi que la géométrie G/I admet *une réalisation compacte* sur M.

De plus, la structure géométrique ϕ sur M proviendra d'une structure géométrique du même type, G-invariante, sur G/I. Par exemple, si ϕ est une métrique pseudo-riemannienne, elle sera localement modelée sur une métrique pseudo-riemannienne G-invariante sur G/I. On peut tenter de classifier toutes ces géométries G/I, ainsi que leurs réalisations compactes.

Rappelons que Thurston a donné cette classification pour le cas où G/I est de dimension trois et G préserve une métrique riemannienne sur G/I (voir [55, 56, 53]).

Dans la suite nous présenterons, en particulier, l'article [14] dans lequel, dans un travail en collaboration avec Zeghib, nous réalisons ce programme dans le cas où G/I est de dimension trois et l'action canonique de G sur G/I préserve une métrique lorentzienne. *Ceci nous permet de classifier les variétés lorentziennes localement homogènes compactes de dimension trois (sans faire d'hypothèse sur le groupe des isométries).*

2. Géométrie Lorentzienne de dimension trois

Nous résumons dans ce chapitre les résultats que nous avons obtenus dans [13] et [14] pour les métriques lorentziennes en dimension trois.

2.1. Extension de l'ouvert dense

Le théorème suivant est le résultat principal de [13]. Il doit être vu comme un approfondissement du théorème de l'orbite ouverte de Gromov dans le cas particulier des variétés lorentziennes analytiques réelles de dimension 3.

Théorème 2.1. — *Soit (M, g) une variété lorentzienne analytique réelle de dimension 3 compacte et connexe. Si le pseudo-groupe des isométries locales de g admet une orbite ouverte non vide dans M, alors celle-ci est égale à M.*

Dans le cadre *analytique* le théorème de l'orbite ouverte est précisé dans [3], [26] sous la forme suivante : *en dehors d'un ensemble analytique compact (éventuellement vide), les orbites du pseudo-groupe des isométries locales sont les fibres d'une fibration analytique de rang constant.* Avec ce théorème, notre hypothèse d'existence d'une orbite ouverte pour le pseudo-groupe des isométries locales est donc équivalente à l'existence d'une orbite ouverte et *dense.*

Nous pouvons alors énoncer le théorème 2.1 sous la forme équivalente suivante :

Corollaire 2.2. — *Si le pseudo-groupe des isométries locales admet une orbite dont l'adhérence est d'intérieur non vide, alors celle-ci est égale à M (la métrique g est localement homogène).*

Rappelons que nos hypothèses impliquent automatiquement que tout invariant scalaire de la métrique lorentzienne (par exemple, les fonctions symétriques des courbures principales) est constant. En effet, un tel invariant doit être une fonction analytique constante sur un ouvert de M et donc partout. En particulier, les 3 courbures principales de g (définies comme les valeurs propres de la courbure de Ricci par rapport à la métrique lorentzienne) sont constantes sur M.

Il convient de remarquer qu'en dimension 3 la courbure ne se résume pas à un scalaire (c'est un tenseur) et la courbure sectionnelle est une fonction méromorphe (en général non constante) définie sur la 2-grassmannienne. Cette fonction admet, en général, des pôles situés en dehors de l'ouvert formé par les plans non-dégénérés.

Notre preuve utilise l'analyticité de manière essentielle et notamment la propriété suivante de prolongement d'isométries locales : *tout point m de M possède un voisinage ouvert U_m tel que toute isométrie locale proche de l'identité définie sur un ouvert connexe U contenu dans U_m se prolonge à U_m*. Ce phénomène a été découvert pour la première fois par Nomizu [44] dans le cadre des métriques riemanniennes analytiques et étendu par la suite par Amores [1] et Gromov [26] aux structures rigides analytiques.

L'argument précédent combiné avec le principe de monodromie permet de voir que sur les variétés analytiques compactes et *simplement connexes* les isométries locales proches de l'identité se prolongent en des isométries globales. C'est précisément cette technique qui est utilisée dans [2] pour montrer que le groupe des isométries d'une variété lorentzienne analytique compacte et simplement connexe est nécessairement compact.

Avec cette remarque le théorème 2.1 est naturellement complété par le

Corollaire 2.3. — *Si de plus M est simplement connexe, alors (M, g) est la sphère S^3 munie d'une métrique lorentzienne invariante par l'action par translations du groupe de Lie S^3 sur lui-même.*

La justification du corollaire est la suivante : le pseudo-groupe des isométries locales proches de l'identité agit transitivement sur M [5], ce qui implique qu'il existe un groupe (de Lie) connexe G d'isométries (globalement définies) qui agit transitivement sur M. Il vient que M s'identifie au quotient de ce groupe par le stabilisateur d'un point. D'après le résultat de [2], G est compact et donc M est un quotient de deux groupes de

Lie compacts. Le stabilisateur d'un point s'identifie alors à un sous-groupe compact du groupe linéaire $O(2,1)$: il s'agit nécessairement de l'identité ou d'un sous-groupe à un paramètre compact (elliptique).

Dans le premier cas M s'identifie avec l'unique groupe compact connexe et simplement connexe de dimension 3, qui est la sphère S^3 et la métrique lorentzienne g est invariante par l'action de S^3 sur lui même. La métrique lorentzienne s'obtient à partir d'une forme quadratique de signature $(2,1)$ sur l'algèbre de Lie de S^3 et qui est transportée par les translations de S^3 sur lui-même.

Dans le deuxième cas M est le quotient d'un groupe de Lie G compact connexe de dimension 4 par un sous-groupe isomorphe à S^1. Il n'existe que deux possibilités pour G : ou bien $S^3 \times S^1$, ou bien $S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1$. Le tore $S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1$ ne possède aucun quotient simplement connexe non trivial. Il vient que G est isomorphe à $S^3 \times S^1$ et que M est un quotient de $S^3 \times S^1$ par un sous-groupe à un paramètre compact. Comme M est supposée simplement connexe, il vient que la projection du stabilisateur d'un point de M dans $S^3 \times S^1$ est surjective sur le facteur S^1 et donc le premier facteur isomorphe à S^3 agit simplement transitivement sur M. Nous sommes donc ramenés au cas précédent.

Question 2.4. — i) *Le théorème 2.1 reste-t-il valide pour des métriques lorentziennes de dimension trois indéfiniment dérivables localement homogènes sur un ouvert dense (on pourrait même supposer l'existence d'une action isométrique de* $\mathbf{Z}$ *avec une orbite dense) ?*

ii) *Qu'en est-il du cas des métriques pseudo-riemanniennes analytiques en dimension plus grande ?*

iii) *Qu'en est-il pour les structures conformes pseudo-riemanniennes en dimension supérieure ou égale à trois ?*

Mentionnons que l'analogue de la question 2.4 dans le contexte des connexions affines (indéfiniment dérivables ou analytiques) est irrésolu même en dimension deux (quand il ne s'agit pas de la connexion de Levi-Civita d'une métrique riemannienne ou lorentzienne).

2.2. Variétés lorentziennes localement homogènes

Soit G un groupe de Lie réel et G/I, où I est un sous-groupe fermé de G, un espace homogène supposé simplement connexe.

On dit que G/I est *lorentzien* et que $(G, G/I)$ est une *géométrie lorentzienne* (au sens de Klein) si l'action canonique de G sur G/I préserve une métrique lorentzienne, ou de manière équivalente, si l'action adjointe de I préserve une forme quadratique non dégénérée de signature $(n-1, 1)$ sur le quotient $\mathcal{G}/\mathcal{I}$ des algèbres de Lie correspondantes.

Rappelons que si M est localement modelée sur G/I, tout objet géométrique (par exemple, un tenseur ou une connexion) sur G/I, invariant par l'action de G, induit un objet géométrique du même type sur M. En particulier, dans le cas d'un espace homogène lorentzien G/I, la variété M hérite d'une métrique lorentzienne localement homogène.

La géométrie lorentzienne $(G, G/I)$ est dite *maximale*, si l'action de G ne s'étend pas en une action fidèle d'un groupe de Lie de dimension strictement plus grande G' qui préserve une métrique lorentzienne. Deux métriques lorentziennes sur G/I dont les composantes neutres des groupes des isométries sont conjuguées dans le groupe des difféomorphismes de G/I définissent une même géométrie.

Une $(G, G/I)$-géométrie sur M donne classiquement naissance à une *application développante* qui est un difféomorphisme local entre un revêtement universel $\widetilde{M}$ de M et G/I et à un *morphisme d'holonomie* $\rho : \pi_1(M) \to G$ [55, 56, 53]. L'application développante conjugue l'action du groupe fondamental $\pi_1(M)$ sur $\widetilde{M}$ à l'action du groupe d'holonomie $\Gamma = \rho(\pi_1(M))$ sur G/I.

Une $(G, G/I)$-géométrie est dite *complète* si son application développante est un difféomorphisme. Dans ce cas le groupe d'holonomie Γ agit librement et proprement sur G/I et $M = \Gamma\backslash G/I$. Lorsque I est compact, ceci équivaut au fait que Γ soit un réseau cocompact de G.

Lorsque G préserve une métrique lorentzienne ou riemannienne, ou plus généralement une connexion, on a aussi la notion de *complétude géodésique* [57]. La complétude géodésique est plus forte que la complétude au sens ci-dessus (voir lemme 2.8).

On dit qu'une $(G, G/I)$-géométrie satisfait à une *rigidité de Bieberbach* si, pour toute réalisation compacte complète sur une variété M, il existe un sous-groupe de Lie connexe L de G contenant, à indice fini près, le groupe d'holonomie Γ de M et agissant librement et transitivement sur G/I. Dans ce cas, L s'identifie à G/I et, à indice fini près, M est $\Gamma\backslash L$. L'énoncé classique du théorème de Bieberbach correspond au cas de la géométrie euclidienne $(O(n, \mathbf{R}) \ltimes \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$, avec $L = \mathbf{R}^n$, le groupe des translations.

Rappelons que Thurston a classifié les huit géométries riemanniennes maximales de dimension 3 qui possèdent des réalisations compactes (voir

[55, 56, 53]). Cette classification contient les trois géométries de courbure sectionnelle constante, deux géométries produit (entre $\mathbf{R}$ et l'espace hyperbolique de dimension deux, ou bien entre $\mathbf{R}$ et la sphère de dimension deux), ainsi que trois géométries données par des métriques invariantes à gauche sur les groupes de Lie suivants : $SL(2, \mathbf{R})$, Heisenberg et SOL. Le groupe Heisenberg est l'unique groupe de Lie réel de dimension trois, unimodulaire, nilpotent et non abélien, tandis que SOL est l'unique groupe de Lie réel de dimension trois, unimodulaire, résoluble et non nilpotent. La structure des deux algèbres de Lie correspondates sera décrite un peu plus loin.

Une spécificité bien connue des $(G, G/I)$-géométries riemanniennes est que toute réalisation compacte d'une telle géométrie est nécessairement complète. Ce phénomène n'est nullement assuré (et souvent faux) pour les $(G, G/I)$-géométries générales, mais est démontré dans [14] pour les $(G, G/I)$-géométries lorentziennes de dimension 3.

Dans [14] nous nous intéressons aux géométries lorentziennes de dimension 3 qui sont *non-riemanniennes*, i.e. l'action de G sur G/I ne préserve pas de métrique riemannienne. C'est équivalent au fait que l'action adjointe de I soit à image non bornée dans le groupe des transformations linéaires de $\mathcal{G}/\mathcal{I}$.

Dans la suite on explicitera des exemples de géométries lorentziennes non-riemanniennes maximales de dimension 3 qui admettent des réalisations compactes.

Avant de présenter les géométries $(G, G/I)$ qui incarnent, en dimension 3, les géométries lorentziennes de courbure sectionnelle constante et qui sont la géométrie plate de Minkowski (courbure nulle), la géométrie de Sitter (courbure positive) et la géométrie anti de Sitter (courbure négative), précisons que, d'après un résultat dû à Carrière [11] dans le cas plat et étendu par Klingler [32] au cas de courbure sectionnelle constante (voir également [39, 42]), toute réalisation compacte de G/I est complète. Ce résultat de complétude est essentiel dans l'étude des géométries lorentziennes de courbure sectionnelle constante.

Il implique, en particulier, que la géométrie de courbure sectionnelle constante positive n'admet pas de réalisation compacte. En effet, d'après [9], seuls les groupes finis agissent proprement sur l'espace de Sitter, qui n'admet donc pas de quotient compact.

Géométrie Minkowski. — Un modèle de la géométrie Minkowski est $\mathbf{R}^3$, muni de la forme quadratique $dx^2 + dy^2 - dz^2$. Le groupe G de cette géométrie est $O(2,1) \ltimes \mathbf{R}^3$, agissant affinement sur $\mathbf{R}^3$. L'isotropie I de la géométrie Minkowski est $O(2,1)$.

Il est démontré dans [21, 25] que la géométrie Minkowski satisfait à une rigidité de Bieberbach, avec le groupe L isomorphe à $\mathbf{R}^3$, $Heis$ ou SOL. Par conséquent, la classification des variétés lorentziennes compactes plates coïncide avec la classification des réseaux cocompacts sans torsion dans les trois groupes précédents.

Géométrie anti de Sitter. — Un modèle de cette géométrie est le revêtement universel $\widetilde{SL(2,\mathbf{R})}$ de $SL(2,\mathbf{R})$, muni de la métrique lorentzienne invariante par translations à gauche qui coïncide en identité avec la forme de Killing q sur l'algèbre de Lie $sl(2,\mathbf{R})$. Comme la forme de Killing q est invariante par la représentation adjointe, le groupe des isométries de la géométrie anti de Sitter contient également les translations à droite. La composante neutre du groupe des isométries de la géométrie anti de Sitter est (modulo quotient par le noyau de l'action qui est fini, de cardinal quatre) $G = \widetilde{SL(2,\mathbf{R})} \times \widetilde{SL(2,\mathbf{R})}$, avec isotropie I isomorphe à $\widetilde{SL(2,\mathbf{R})}$ et plongée diagonalement dans G.

Comme le groupe $\widetilde{SL(2,\mathbf{R})}$ agit librement transitivement sur G/I, il suffit de considérer le quotient à gauche de $\widetilde{SL(2,\mathbf{R})}$ par un réseau cocompact Γ de $\widetilde{SL(2,\mathbf{R})}$, pour construire ainsi des variétés compactes $M = \Gamma\backslash\widetilde{SL(2,\mathbf{R})}$ localement modelées sur la géométrie anti de Sitter.

La rigidité de Bieberbach, valable dans le cas plat, n'est plus valide pour la géométrie anti de Sitter [24, 51].

Géométrie Lorentz-Heisenberg. — Il s'agit de la géométrie d'une certaine métrique lorentzienne invariante par translations à gauche sur le groupe de Heisenberg $Heis$. Désignons par *heis* l'algèbre de Lie de $Heis$ et rappelons que *heis* est engendrée par un élément central X et par deux autres éléments Z et T tels que $[Z,T] = X$.

PROPOSITION 2.5. — *Modulo automorphisme et à constante multiplicative près, il existe sur $Heis$ une seule métrique lorentzienne invariante à gauche et affectant une longueur positive au centre de heis. Cette métrique définit une géométrie lorentzienne non-riemannienne maximale, dont la composante neutre du groupe des isométries est de dimension quatre, isomorphe à un produit semi-directe $\mathbf{R} \ltimes Heis$ et dont l'isotropie est semi-simple (i.e. agit sur l'espace tangent au point base comme un groupe à un paramètre diagonalisable). Cette géométrie sera appelée Lorentz-Heisenberg.*

Il suffit de considérer un quotient (à gauche) de $Heis$ par un réseau cocompact Γ, pour se convaincre que la géométrie Lorentz-Heisenberg se réalise bien sur des variétés compactes.

Géométrie Lorentz-SOL. — C'est une géométrie obtenue à partir d'une métrique lorentzienne invariante à gauche sur SOL. Rappelons que l'algèbre de Lie correspondante *sol* est engendrée par $\{X, Z, T\}$, avec seuls crochets non-nuls $[T, X] = X$ et $[T, Z] = -Z$. L'algèbre dérivée est donc $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R}X \oplus \mathbf{R}Z$. Considérons sur SOL la métrique lorentzienne invariante à gauche g définie en identité par : X et T sont isotropes, Z est orthogonal à $\mathbf{R}X \oplus \mathbf{R}T$, et $g(X, T) = g(Z, Z) = 1$.

Proposition 2.6. — *À automorphisme près, g est l'unique métrique lorentzienne invariante à gauche sur SOL, qui rend l'algèbre dérivée dégénérée et telle que l'une des deux directions propres de $ad(T)$ est isotrope. La composante neutre du groupe des isométries de g est de dimension quatre : il s'agit d'une extension non triviale de $Heis$ (ici, $Heis$ n'agit pas transitivement) et l'isotropie est non compacte (unipotente). Cette métrique définit une géométrie lorentzienne maximale et non-riemannienne qu'on désignera par Lorentz-SOL.*

Le théorème suivant est le résultat principal de [14]. Il montre, en particulier, que les quatre exemples précédents constituent les seules géométries lorentziennes non-riemanniennes maximales qui se réalisent sur des variétés compactes de dimension 3 :

Théorème 2.7. — *Soit M une variété lorentzienne compacte connexe de dimension 3 localement modelée sur une géométrie lorentzienne* non-riemannienne *$(G, G/I)$.*

(*i*) *La géométrie G/I est alors isométrique à une métrique lorentzienne invariante à gauche sur l'un des quatre groupes suivants : $\mathbf{R}^3$, $\widetilde{SL(2,\mathbf{R})}$, $Heis$ ou SOL.*

La classification de métriques lorentziennes invariantes à gauche est la suivante :

- *Dans le cas de $\mathbf{R}^3$, toutes les métriques invariantes par translations sont plates.*
- *Dans le cas de $\widetilde{SL(2,\mathbf{R})}$, il y a trois géométries lorentziennes non-riemanniennes qui proviennent des métriques lorentziennes invariantes à gauche : la seule géométrie maximale est anti de Sitter, les deux autres sont données par des métriques lorentziennes de courbure sectionnelle non constante, invariantes à*

gauche et également par un sous-groupe à un paramètre unipotent (respectivement semi-simple) de translations à droite.
- *Dans le cas de $Heis$, il y a deux géométries lorentziennes non-riemanniennes invariantes à gauche. L'une est plate et l'autre correspond à la géométrie Lorentz-Heisenberg.*
- *Dans le cas de SOL, il y a deux géométries lorentziennes non-riemanniennes invariantes à gauche. L'une est plate et l'autre correspond à la géométrie Lorentz-SOL.*

(ii) *Si la géométrie lorentzienne $(G, G/I)$ est* maximale, *alors c'est l'une des 4 géométries suivantes : Minkowski, anti de Sitter, Lorentz-Heisenberg ou Lorentz-SOL.*

La géométrie globale de M est la suivante :

(iii) *La $(G, G/I)$-géométrie est complète.*

(iv) *On a une rigidité de Bieberbach dans tous les cas où la géométrie maximale correpondante n'est pas anti de Sitter. Dans le cas des géométries Lorentz-Heisenberg ou Lorentz-SOL, le groupe d'holonomie est, à indice fini près, un réseau cocompact de $Heis$ ou SOL, respectivement.*

(v) *M est géodésiquement complète, sauf si elle est localement modelée sur la géométrie Lorentz-SOL.*

Précisons à présent les implications qui existent entre les différents points du théorème précédent. Un résultat essentiel qui permet de passer de la complétude géodésique à la complétude au sens des $(G, G/I)$-géométries est le lemme bien connu suivant :

Lemme 2.8. — *Soit M une variété qui admet une $(G, G/I)$-géométrie telle que l'action de G sur G/I préserve une connexion affine ∇. Si la connexion induite sur M par ∇ est géodésiquement complète, alors la $(G, G/I)$-géométrie de M est complète.*

Ce résultat, combiné avec le théorème riemannien classique de complétude géodésique de Hopf-Rinow [57], implique que les $(G, G/I)$-géométries riemanniennes sur des variétés compactes sont automatiquement complètes. En particulier, toute (G, G)-géométrie (où le groupe de Lie G agit sur lui-même par translations) sur une variété compacte M est complète et M s'identifie au quotient de G par un réseau cocompact.

Grâce aux résultats de Carrière et Klingler [12, 32] qui affirment que les variétés lorentziennes compactes de courbure sectionnelle constante sont géodésiquement complètes, le lemme 2.8 fournit également la complétude des variétés compactes localement modelées sur les $(G, G/I)$-géométries pour lesquelles l'action de G préserve une métrique lorentzienne sur G/I de courbure sectionnelle constante. Le théorème de classification des géométries lorentziennes non-riemanniennes maximales (partie (*ii*) du théorème 2.7) permet alors de restreindre l'étude de la complétude aux variétés compactes localement modelées sur les géométries Lorentz-Heisenberg et Lorentz-SOL. La complétude et la rigidité de Bieberbach des réalisations compactes des géométries Lorentz-Heisenberg et Lorentz-SOL se démontre via les propositions 8.1 et 7.1 dans [14]. Finalement, on obtient le résultat de complétude de la partie (*iii*) du théorème principal, qui peut s'énoncer également de la manière suivante :

Corollaire 2.9. — *Toute variété lorentzienne localement homogène compacte connexe et de dimension* 3 *est isométrique au quotient (à gauche) d'un espace homogène lorentzien G/I par un sous-groupe discret Γ de G agissant proprement.*

Une conséquence du théorème 2.7 est le résultat d'uniformisation suivant :

Théorème 2.10. — *Toute variété compacte connexe de dimension* 3 *qui possède une métrique lorentzienne localement homogène dont le groupe d'isotropie locale est non compact admet un revêtement fini qui possède une métrique lorentzienne de courbure sectionnelle constante (négative ou nulle).*

En effet, si la géométrie maximale correspondante n'est pas de courbure sectionnelle constante, celle-ci coïncide alors avec la géométrie Lorentz-Heisenberg, ou bien avec la géométrie Lorentz-SOL. Dans les deux cas, la partie (*iv*) du théorème 2.7 assure que (à revêtement fini près) la variété M est un quotient (à gauche) de $Heis$ ou de SOL par un réseau. Or, aussi bien $Heis$, que SOL, possèdent des métriques lorentziennes plates invariantes à gauche [49, 50] qui descendent bien sur M.

Ainsi, les quotients compacts de la forme $\Gamma \backslash Heis$ portent deux géométries lorentziennes maximales différentes : Minkowski et Lorentz-Heisenberg. Ce phénomène est spécifique à la géométrie non-riemannienne : dans le contexte riemannien il y a unicité de la géométrie maximale portée par les variétés compactes de dimension trois [53].

Par ailleurs, les parties (*i*) et (*iii*) du théorème 2.7 permettent de ramener l'étude de la complétude géodésique aux métriques invariantes à gauche sur les groupes de Lie $\mathbf{R}^3$, $\widetilde{SL(2, \mathbf{R})}$, $Heis$ ou SOL et d'obtenir la partie (*v*) du théorème 2.7, en utilisant des résultats connus dans ce contexte.

Nous avons vu que la complétude géodésique est acquise dans le cas de courbure sectionnelle constante. La complétude géodésique de la géométrie Lorentz-Heisenberg est démontrée dans la section 4 de [50], où le calcul explicite des géodésiques est présenté. Plus généralement, toutes les métriques lorentziennes invariantes à gauche sur Heisenberg sont géodésiquement complètes [27].

Le manque de complétude géodésique de la métrique Lorentz-SOL est prouvé dans [29].

Finalement le cas des métriques invariantes sur $\widetilde{SL(2,\mathbf{R})}$ est analysé dans [28] : le résultat des auteurs implique bien qu'on a complétude géodésique dès que l'isotropie n'est pas compacte (voir [14]).

Par ailleurs, les exemples de [28] et l'exemple de [29] montrent que la complétude géodésique peut tomber en défaut pour certaines métriques lorentziennes invariantes à gauche sur $\widetilde{SL(2,\mathbf{R})}$ ou sur SOL (dans ce dernier cas, même en présence d'un groupe d'isotropie non compact). Néanmoins notre résultat de complétude pour les réalisations compactes des $(G, G/I)$-géométries lorentziennes persiste même quand le modèle G/I lui-même n'est pas géodésiquement complet.

Nous n'allons pas donner ici la preuve du théorème 2.7 pour laquelle le lecteur devra consulter [14], mais la proposition suivante permet de réduire le problème au cas où la dimension de G est égale à quatre.

Proposition 2.11. — *À revêtement fini près, toute métrique lorentzienne localement homogène g sur une variété compacte M de dimension 3 est localement modelée sur une unique géométrie maximale $(G, G/I)$, avec G connexe.*

i) La dimension de G est $\leqslant 6$, avec égalité si et seulement si g est de courbure sectionnelle constante.

ii) Si la dimension de G est égale à 3, alors M est (à revêtement fini près) un quotient $\Gamma\backslash G$, de G, par un réseau cocompact Γ. De plus, l'image réciproque de g sur G est une métrique lorentzienne invariante par translation à gauche.

iii) La dimension de G est différente de 5 et donc I n'est jamais de dimension 2.

Remarque 1. — *En dimension plus grande, en général, l'existence d'un modèle G/I tombe en défaut, aussi bien dans le contexte riemannien* [30, 37], *que dans le contexte pseudo-riemannien* [47].

Démonstration. — Désignons par $\mathcal{G}$ l'algèbre de Lie (transitive) des champs de Killing locaux de g et par $\mathcal{I}$ la sous-algèbre formée par les champs de Killing qui s'annulent en un point donné. Un modèle local G/I existe si et seulement si le groupe I associé à la sous-algèbre $\mathcal{I}$ de $\mathcal{G}$ est fermé dans l'unique groupe connexe et simplement connexe G associé à $\mathcal{G}$ (voir le théorème 1.3 de [47]). Or, d'après un résultat de Mostow [43], ceci est vrai dès que la codimension de $\mathcal{I}$ dans $\mathcal{G}$ est < 5. La codimension de $\mathcal{I}$ dans $\mathcal{G}$ étant ici égale à 3 (la dimension de M), le théorème de Mostow s'applique. La variété M est alors localement modelée sur une géométrie dont le groupe est le groupe des isométries de G/I (et pas seulement sa composante neutre G). Comme le groupe des isométries de G/I admet un nombre fini de composantes connexes, un revêtement fini de M est localement modelé sur $(G, G/I)$.

i) La dimension de $\mathcal{G}$ est bornée supérieurement par la somme de la dimension de M et de la dimension du groupe orthogonal correspondant. En dimension 3, la dimension maximale de $\mathcal{G}$ est donc égale à 6 et elle caractérise les métriques de courbure sectionnelle constante. En effet, dans ce cas $\mathcal{I}$ est de dimension 3 et agit transitivement sur les 2-plans non dégénérés contenus dans l'espace tangent au point base $x_0 \in G/I$. Ceci implique, dans un premier temps, que la courbure sectionnelle en x_0 ne dépend que de x_0 et l'homogénéité locale permet de conclure que la courbure sectionnelle est constante sur G/I (pour les notions classiques de géométrie lorentzienne le lecteur pourra consulter [57]).

ii) Dans ce cas M admet une (G, G)-géométrie, avec G agissant par translation à gauche sur lui-même. Le revêtement universel de M s'identifie donc à G et M est isométrique au quotient de G par un réseau cocompact.

iii) La preuve est basée essentiellement sur le fait que le stabilisateur d'une orbite d'une action linéaire algébrique de $PSL(2, \mathbf{R})$ sur un espace vectoriel de dimension finie est un sous-groupe algébrique qui n'est jamais de dimension 2. Pour la preuve de ce fait il suffit de le constater pour les représentations irréductibles de $PSL(2, \mathbf{R})$ et de remarquer que, dans le cas général, le stabilisateur d'une orbite est l'intersection des stabilisateurs qui correspondent aux projections de cette orbite sur chaque représentation irréductible.

Considérons l'action de $\mathcal{I}$ sur l'espace tangent $T_{x_0}M$ (le groupe d'isotropie locale s'identifie alors à un sous-groupe du groupe orthogonal $O(2,1) \simeq PSL(2, \mathbf{R})$). Cette action préserve le tenseur courbure de Ricci en x_0, noté $Ricci_{x_0}$.

Considérons l'action du groupe orthogonal $PSL(2,\mathbf{R})$ sur l'espace vectoriel $S^2(T^*_{x_0}M)$ des formes quadratiques sur $T_{x_0}M$. L'action préserve la métrique g_{x_0} et induit une action de $PSL(2,\mathbf{R})$ sur l'espace vectoriel quotient $S^2(T^*_{x_0}M)/\mathbf{R}g_{x_0}$.

Le groupe d'isotropie locale est contenu dans le stabilisateur de l'élément induit par $Ricci_{x_0}$ dans l'espace vectoriel $S^2(T^*_{x_0}M)/\mathbf{R}g_{x_0}$.

Si la dimension du groupe d'isotropie est strictement supérieure à 1, il vient que le stabilisateur de la courbure de Ricci est de dimension 3 (on a vu que la dimension ne peut être égale à 2) et que ce stabilisateur coïncide avec tout le groupe orthogonal. Ceci implique que $Ricci_{x_0} = \lambda g_{x_0}$ avec $\lambda \in \mathbf{R}$ (la fonction λ est constante sur M par homogénéité locale) et notre espace est à courbure sectionnelle constante. Le groupe d'isotropie est alors de dimension 3. On vient de prouver que le groupe d'isotropie n'est jamais de dimension 2 et que donc la dimension de G est $\neq 5$. □

3. Plongements pseudo-riemanniens isométriques ou conformes

Notre méthode pour démontrer la complétude, dans le théorème 2.7, a été d'établir la liste de toutes les géométries lorentziennes de dimension trois admettant des réalisations compactes et de traiter chaque cas séparément. Même si cette méthode est inutilisable en dimension grande, le résultat de complétude semble persister.

CONJECTURE 3.1. — *Une $(G, G/I)$-géométrie lorentzienne sur une variété compacte est complète (en toute dimension).*

Une question naturelle liée à la conjecture de Lichnerowicz (pour les pseudo-groupes) est la suivante.

Nous conviendrons d'appeler *conforme pseudo-riemannienne essentielle*, une géométrie pour laquelle l'action canonique de G sur G/I préserve une structure conforme pseudo-riemannienne, mais aucune métrique pseudo-riemannienne dans la classe conforme.

QUESTION 3.2. — *Classifier les géométries conformes pseudo-riemanniennes essentielles (de dimension trois) qui admettent des réalisations compactes.*

Remarquons que la question 2.4 reste intéressante et irrésolue dans le cas particulier où l'ouvert dense localement homogène est isométrique à un quotient (à gauche) d'un groupe de Lie G muni d'une métrique pseudo-riemannienne invariante à gauche, par un sous-groupe discret Γ. Pour ce cas particulier nous formulons la :

Question 3.3. — *Soit g une métrique pseudo-riemannienne invariante à gauche sur un groupe de Lie G et Γ un sous-groupe discret de G. Existe-t-il des plongements isométriques ou conformes (à image dense) de $\Gamma \backslash G$ dans une variété pseudo-riemannienne (ou conforme pseudo-riemannienne) compacte connexe M ? Dans ce cas M est-elle nécessairement localement homogène ?*

Rappelons qu'il n'existe pas de tels plongements isométriques *riemanniens.* En effet, une métrique riemannienne invariante par translations sur G est géodésiquement complète. Il vient que $\Gamma \backslash G$ est également géodésiquement complète.

Dans le cas des plongements pseudo-riemanniens isométriques, Γ doit être un réseau de G, à cause de la finitude du volume de la métrique pseudo-riemannienne sur la variété compacte M. Dans ce cas, la question 3.3 a un sens seulement si G admet des réseaux Γ non cocompacts et un résultat classique dû à Mostow implique que G est non résoluble [48]. Le premier cas intéressant de la question 3.3 est celui des plongements lorentziens isométriques d'un quotient de volume fini $\Gamma \backslash SL(2, \mathbf{R})$, muni d'une métrique provenant d'une métrique lorentzienne invariante à gauche sur $SL(2, \mathbf{R})$.

Rappelons que, d'après [28], il existe bien des métriques lorentziennes invariantes à gauche sur $SL(2, \mathbf{R})$ qui ne sont pas géodésiquement complètes, mais l'ensemble des géodésiques non complètes forment un sous-ensemble explicite qui permettra de comprendre les eventuelles compactifications lorentziennes de $\Gamma \backslash SL(2, \mathbf{R})$. Ajoutons que, parmi ces métriques, seules celles avec un groupe d'isotropie compact possèdent des géodésiques non complètes.

S'il s'avère que les seuls plongements isométriques de $\Gamma \backslash SL(2, \mathbf{R})$ dans une variété lorentzienne sont des difféomorphismes, alors le même résultat persistera pour toutes les variétés lorentziennes complètes de dimension trois. En effet, la preuve de la classification des géométries lorentziennes de dimension trois qui *se réalisent sur des variétés compactes* (point (i) du théorème 2.7), peut être généralisée et semble montrer que toute géométrie lorentzienne de dimension trois est isométrique à une métrique lorentzienne invariante à gauche sur un groupe de Lie de dimension trois qui est ou bien résoluble, ou bien isomorphe à $SL(2, \mathbf{R})$.

Mentionnons le résultat récent de Frances [20] qui affirme que tout plongement conforme *riemannien* d'un espace symétrique, différent de l'espace euclidien et de l'espace hyperbolique, est un difféomorphisme. Le même résultat est également valide pour des métriques riemanniennes invariantes à gauche sur un groupe de Lie. En revanche, la question des plongements conformes riemanniens des espaces localement symétriques est ouverte.

BIBLIOGRAPHIE

[1] *A. Amores*, Vector fields of a finite type G-structure, J. Differential Geom., **14(1)**, 1979, 1-6.

[2] *G. D'Ambra*, Isometry groups of Lorentz manifolds, Invent. Math., **92**, (1988), 555-565.

[3] *G. D'Ambra, M. Gromov*, Lectures on transformations groups : geometry and dynamics, Surveys in Differential Geometry (Cambridge), (1990), 19-111.

[4] *M. Babillot, R. Feres, A. Zeghib*, Rigidité, Groupe fondamental et Dynamique, (P. Foulon Ed.), Panoramas et Synthèses, **13**, (2002).

[5] *Y. Benoist* , Orbites des structures rigides (d'après M. Gromov), Feuilletages et systèmes intégrables (Montpellier, 1995), Birkhäuser Boston, (1997), 1-17.

[6] *Y. Benoist*, Actions propres sur les espaces homogènes réductifs, Annals of Mathematics, **144**, (1996), 315-347.

[7] *Y. Benoist, P. Foulon, F. Labourie*, Flots d'Anosov à distributions stables et instables différentiables, Jour. Amer. Math. Soc., **5**, (1992), 33-74.

[8] *Y. Benoist, F. Labourie*, Sur les espaces homogènes modèles de variétés compactes, Publ. Math. I.H.E.S., **76**, (1992), 99-109.

[9] *E. Calabi, L. Markus*, Relativistic space forms, Ann. of Math., **75**, (1962), 63-76.

[10] *A. Candel, R. Quiroga-Barranco*, Gromov's centralizer theorem, Geom. Dedicata **100**, (2003), 123-155.

[11] *Y. Carrière*, Flots riemanniens, dans Structures transverses des feuilletages, Toulouse, Astérisque, **116**, (1984), 31-52.

[12] *Y. Carrière*, Autour de la conjecture de L. Markus sur les variétés affines, Invent. Math., **95**, (1989), 615-628.

[13] *S. Dumitrescu*, Dynamique du pseudo-groupe des isométries locales sur une variété lorentzienne analytique de dimension 3, Ergodic Th. Dyn. Systems, **28(4)**, (2008), 1091-1116.

[14] *S. Dumitrescu, A. Zeghib*, Géométries Lorentziennes de dimension 3 : classification et complétude, Geometriæ Dedicata, **149**, (2010), 243-273.

[15] *C. Ehresmann*, Sur les espaces localement homogènes, Enseignement Math., p. 317, (1936).

[16] *C. Ehresmann*, Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable, Colloque de Topologie, Bruxelles, (1950).

[17] *R. Feres*, Rigid geometric structures and actions of semisimple Lie groups, Rigidité, groupe fondamental et dynamique, Panorama et synthèses, **13**, Soc. Math. France, Paris, (2002).

[18] *J. Ferrand*, The action of conformal transformations on a Riemannian manifold, Math. Ann., **304**, (1996), 277-291.

[19] *C. Frances*, Un théorème de Ferrand-Obata pour les géométries paraboliques de rang un, Ann. Sci. Ens., **40(5)**,(2007), 741-764.

[20] *C. Frances*, Rigidity at the boundary for conformal structures and other Cartan geometries, arXiv.

[21] *D. Fried, W. Goldman*, Three-dimensional affine crystallographic groups, Adv. Math., **47(1)**, (1983), 1-49.

[22] *P. Friedbert, F. Tricerri, L. Vanhecke*, Curvature invariants, differential operators and local homogeneity, Trans. Amer. Math. Soc., **348**, (1996), 4643-4652.

[23] *E. Ghys*, Flots d'Anosov dont les feuilletages stables sont différentiables, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., **20**, (1987), 251-270.

[24] *W. Goldman*, Nonstandard Lorentz space forms, J. Differential Geom.,**21(2)**, (1985), 301-308.

[25] *W. Goldman, Y. Kamishima*, The fundamental group of a compact flat Lorentz space form is virtually polycyclic, J. Differential Geom., **19(1)**, (1984), 233-240.

[26] *M. Gromov*, Rigid transformation groups, Géométrie Différentielle, (D. Bernard et Choquet-Bruhat Ed.), Travaux en cours, Hermann, Paris, **33**, (1988), 65-141.

[27] *M. Guediri*, Sur la complétude des pseudo-métriques invariantes à gauche sur les groupes de Lie nilpotents, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, **52(4)**, (1994), 371-376.

[28] *M. Guediri, J. Lafontaine*, Sur la complétude des variétés pseudo-riemanniennes, J. Geom. Phys., **15(2)**, (1995), 150-158.

[29] *M. Guediri*, On completeness of left-invariant Lorentz metrics on solvable Lie groups, Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid, **9(2)**, (1996), 337-350.

[30] *O. Kowalski*, Counter-example to the second Singer's theorem, Ann. Global Anal. Geom., **8(2)**, (1990), 211-214.

[31] *R. Kulkarni & F. Raymond*, 3-dimensional Lorentz space-forms and Seifert fiber spaces, J. Differential Geom., **21(2)**, (1985), 231-268.

[32] *B. Klingler*, Complétude des variétés Lorentziennes à courbure sectionnelle constante, Math. Ann., **306**, (1996), 353-370.

[33] *S. Kobayashi*, Transformation groupes in differential geometry, Springer-Verlag, (1972).

[34] *T. Kobayashi, T. Yoshino*, Compact Clifford-Klein form of symmetric spaces - revisited, Pure Appl. Math. Q., **1(3)**, (2005), 591-663.

[35] *A. Koutras, C. McIntosh*, A metric with no symmetries or invariants, Class. Quant. Grav., **13(5)**, (1996), 47-49.

[36] *F. Labourie*, Quelques résultats récents sur les espaces localement homogènes compacts, Symposia Mathematica (en l'honneur d'Eugenio Calabi), (1996), 267-283.

[37] *F. Lastaria, F. Tricceri*, Curvature-orbits and locally homogeneous Riemannian manifolds, Ann. Mat. Pura Appl., **165(4)**, (1993), 121-131.

[38] *V. Matveev*, Proof of the projective Lichnerowicz-Obata conjecture, J. Diff. Geom., **75(3)**, (2007), 459-502.

[39] *G. Mess*, Lorentz spacetimes of constant curvature, preprint IHES/M/90/28, (1990).

[40] *J. Milnor*, Curvatures of Left Invariant Metrics on Lie Groups, Adv. in Math., **21**, (1976), 293-329.

[41] *P. Molino*, Riemannian Foliations, Birkhauser, (1988).

[42] *M. Morrill*, Nonexistence of compact de Sitter manifolds, PHD, University of California, (1996).

[43] *G. Mostow*, The extensibility of local Lie groups of transformations and groups on surfaces, Ann. of Math., **52(2)**, (1950), 606-636.

[44] *K. Nomizu*, On local and global existence of Killing vector fields, Ann. of Math. (2), **72**, (1960), 105-120.

[45] *M. Obata*, The conjecture on conformal transformations on riemannian manifolds, J. Diff. Geom., **6**, (1971), 247-258.

[46] *P. Olver*, Equivalence, invariants and symmetry, Cambridge Univ. Press, (1995).

[47] *V. Patrangenaru*, Locally homogeneous pseudo-Riemannian manifolds, J. Geom. Phys., **17**, (1995), 59-72.

[48] *M. Raghunathan*, Discrete subgroups of Lie groups, Springer, (1972).

[49] *S. Rahmani*, Métriques de Lorentz sur les groupes de Lie unimodulaires de dimension 3, J. Geom. Phys., **9**, (1992), 295-302.

[50] *N. Rahmani, S. Rahmani*, Lorentzian geometry of the Heisenberg group, Geom. Dedicata, **118**, (2006), 133-140.

[51] *F. Salein*, Variétés anti-de Sitter de dimension 3 exotiques, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **50(1)**, (2000), 257-284.

[52] *R. Schoen*, On the conformal and CR automorphism groups, Geom. Funct. Anal., **5(2)**, (1995), 464-481.

[53] *P. Scott*, The Geometries of 3-manifolds, Bull. London Math. Soc., **15**, (1983), 401-487.

[54] *R. Sharpe*, Differential Geometry, Cartan's Generalization of Klein's Erlangen Program, Springer, (1997).

[55] *W. Thurston*, Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry, Bull. of Amer. Math. Soc., **6(3)**, (1982), 357-381.

[56] *W. Thurston*, The geometry and topology of 3-manifolds, Princeton University Press, (1983).

[57] *J. Wolf*, Spaces of constant curvature, McGraw-Hill Series in Higher Math., (1967).

[58] *A. Zeghib*, Killing fields in compact Lorentz 3-manifolds, J. Differential Geom., **43**, (1996), 859-894.

[59] *R. Zimmer*, Ergodic theory and semisimple groups, Birkhäuser, (1984).

Sorin Dumitrescu
Université Nice-Sophia Antipolis
Laboratoire J.-A. Dieudonné
UMR 6621 CNRS
06108 Nice cedex 2 (France)
dumitres@unice.fr