Institut Fourier — Université de Grenoble I

Actes du séminaire de

Théorie spectrale et géométrie

J.C. Álvarez Paiva & Florent Balacheff

Optimalité systolique infinitésimale de l'oscillateur harmonique

Volume 27 (2008-2009), p. 11-16.

<http://tsg.cedram.org/item?id=TSG_2008-2009__27__11_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
Volume 27 (2008-2009) 11-16

OPTIMALITÉ SYSTOLIQUE INFINITÉSIMALE DE L'OSCILLATEUR HARMONIQUE

J.C. Álvarez Paiva & Florent Balacheff

RÉSUMÉ. — Nous étudions les aspects infinitésimaux du problème suivant. Soit H un hamiltonien de $\mathbb{R}^{2n}$ dont la surface d'énergie $\{H = 1\}$ borde un domaine compact et étoilé de volume identique à celui de la boule unité de $\mathbb{R}^{2n}$. La surface d'énergie $\{H = 1\}$ contient-elle une orbite périodique du système hamiltonien

$$\begin{cases} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

dont l'action soit au plus π ?

ABSTRACT. — We study the infinitesimal aspects of the following problem. Let H be a Hamiltonian on $\mathbb{R}^{2n}$ whose energy surface $\{H = 1\}$ encloses a compact starshaped domain of volume equal to that of the unit ball in $\mathbb{R}^{2n}$. Does the energy surface $\{H = 1\}$ carry a periodic orbit of the Hamiltonian system

$$\begin{cases} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

with action less than or equal to π ?

Considérons le hamiltonien homogène de degré 2 de $\mathbb{R}^{2n}$ donné par la formule

$$H_{st}(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) = \sum_{i=1}^{n} (q_i^2 + p_i^2)$$

et associé au système formé de n oscillateurs harmoniques découplés de même période propre. Les orbites de ce système hamiltonien sont toutes périodiques de période π. La surface d'énergie $\{H_{st} = 1\}$ borde la boule unité standard de $\mathbb{R}^{2n}$ dont le volume vaut $\frac{\pi^n}{n!}$. Cet hamiltonien est un exemple d'hamiltonien *périodique*, *i.e.* un hamiltonien dont toutes les orbites sont périodiques et de même période. Le type de question auquel nous nous intéressons ici est la suivante.

Mots-clés : Forme normale, oscillateur harmonique, volume systolique, système hamiltonien.
Classification math. : 37J40, 37J50, 53D10.

Question 1.1. — Si $H : \mathbb{R}^{2n} \to [0, \infty)$ désigne un hamiltonien propre, lisse en dehors de l'origine et homogène de degré 2, tel que le volume du domaine $\{H \leqslant 1\}$ soit $\frac{\pi^n}{n!}$, existe-t-il une orbite périodique du système hamiltonien

$$\begin{cases} \dot{q} = & \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = & -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

dont la période (coïncidant avec l'action) soit au plus π ?

Il n'est pas clair que la réponse à cette question soit positive en toute généralité, mais nous obtenons ici des résultats allant dans ce sens pour un hamiltonien suffisamment proche de l'hamiltonien H_{st} (pour la topologie lisse).

Pour énoncer plus précisément nos résultats, replaçons notre question dans un contexte plus général. Soit M^{2n-1} une variété de dimension impaire munie d'une forme de contact α (*i.e.* une 1-forme α telle que $\alpha \wedge d\alpha^{n-1}$ soit une forme volume). Le *volume* de (M, α) est défini comme la quantité

$$\mathrm{vol}(M, \alpha) = \frac{1}{n!} \int_M \alpha \wedge d\alpha^{n-1}.$$

Rappelons qu'étant donné une variété de contact, les orbites du champ de Reeb X défini par les équations

$$d\alpha(X, \cdot) = 0 \ \text{ et } \ \alpha(X) = 1$$

s'appellent les *caractéristiques*. Nous définissons la *systole* par la formule

$$\mathrm{sys}(M, \alpha) = \inf_\gamma \int_\gamma \alpha$$

où l'infimum des actions est pris sur l'ensemble des caractéristiques fermées. S'il n'existe pas de caractéristiques fermées, nous poserons $\mathrm{sys}(M, \alpha) = \infty$. Enfin définissons le *volume systolique* comme la quantité

$$\mathfrak{S}(M, \alpha) = \frac{\mathrm{vol}(M, \alpha)}{\mathrm{sys}(M, \alpha)^n}.$$

Dans le cas où (M, α) est le cotangent unitaire d'une variété riemannienne muni de sa 1-forme canonique, cette dernière quantité coïncide à une constante dimensionnelle près avec la notion de volume systolique présentée dans [1]. Remarquons que si $\phi : M \to N$ désigne un difféomorphisme entre deux variétés de dimension impaire, et α une forme de contact sur N, alors $\mathfrak{S}(M, \phi^*\alpha) = \mathfrak{S}(N, \alpha)$.

D'après un résultat de Taubes [8], toute variété de contact (M, α) de dimension 3 admet une caractéristique fermée, et donc $\mathfrak{S}(M, \alpha) > 0$.

Dans le cas du cotangent unitaire d'une variété de Finsler compacte, l'existence d'une caractéristique fermée découle des travaux de Lusternik et Fet (voir [5]), et l'étude infinitésimale du volume systolique a été initiée dans [1]. Dans le cas d'un hypersurface compacte, lisse et étoilée de $\mathbb{R}^{2n}$ (par étoilée nous entendons que l'hypersurface borde un domaine étoilé de $\mathbb{R}^{2n}$ contenant l'origine dans son intérieur), l'existence d'une caractéristique fermée est dûe à Rabinowitz [7], et c'est cette dernière situation qui nous intéresse plus particulièrement ici.

Nous travaillons dans l'espace euclidien standard $\mathbb{R}^{2n}$ muni des coordonnées $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$, et nous noterons α la 1-forme

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(p_i dq_i - q_i dp_i).$$

Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^{2n}$ une hypersurface compacte, lisse et étoilée. La restriction de la 1-forme α à Σ est une forme de contact. Nous définissons l'*hamiltonien associé à* Σ comme l'unique fonction notée $H_\Sigma : \mathbb{R}^{2n} \to [0, \infty)$ homogène de degré 2 et lisse en dehors de l'origine telle que Σ coïncide avec la surface de niveau $\{H_\Sigma = 1\}$. Réciproquement, à tout hamiltonien H propre, lisse en dehors de l'origine et homogène de degré 2, nous pouvons associer la surface de niveau $\{H = 1\}$ qui est une hypersurface lisse et étoilée. Remarquons que le hamiltonien associé à la sphère unité standard S^{2n-1} n'est autre que

$$H_{st} = \sum_{i=1}^{n}(q_i^2 + p_i^2).$$

Les caractéristiques de $(\Sigma, \alpha_{|\Sigma})$ (les orbites du champ de Reeb) coïncident exactement avec les orbites du système hamiltonien correspondant à la surface d'énergie $\{H = 1\}$, et d'après [7], $(\Sigma, \alpha_{|\Sigma})$ admet au moins une caractéristique fermée. Dans ce contexte, nous pouvons noter $\mathfrak{S}(\Sigma)$ le volume systolique de $(\Sigma, \alpha_{|\Sigma})$. Remarquons que

$$\mathfrak{S}(S^{2n-1}) = \frac{1}{n!}.$$

Nous reformulons la question 1.1 de la manière suivante :

Question 1.2. — L'inégalité

$$\mathfrak{S}(\Sigma) \geqslant \frac{1}{n!} \tag{1.1}$$

est-elle vérifiée pour toute hypersurface Σ lisse étoilée de $\mathbb{R}^{2n}$?

Cette question constitue une variation autour d'un problème posé par Viterbo dans [9]. En effet, dans le cas où Σ est convexe, minorer son volume systolique équivaut à minorer le volume symplectique du domaine K compact bordant Σ par sa capacité d'Ekland-Hofer-Zender (voir [6]). D'après [2], si Σ est convexe, il existe une constante $c > 0$ indépendante de la dimension telle que

$$\mathfrak{S}(\Sigma) \geqslant \frac{c}{n!}.$$

Nous commençons par montrer que toute hypersurface Σ invariante par le flot du hamiltonien $H_{st} = \sum_{i=1}^{n}(q_i^2 + p_i^2)$ vérifie

$$\mathfrak{S}(\Sigma) \geqslant \frac{1}{n!}.$$

Ces hypersurfaces invariantes par le flot du hamiltonien H_{st} correspondent aux bords des domaines K *circulaires*, *i.e.* des domaines tels que $e^{i\theta}\, K = K$ pour tout réel θ ($\mathbb{R}^{2n}$ étant identifié avec $\mathbb{C}^n$). En particulier, les bords des domaines de Reinhardt (comme par exemple les domaines construits par Hermann dans [4]) sont circulaires, et satisfont l'inégalité systolique (1.1). Plus généralement, nous prouvons le résultat suivant.

Proposition 1.3. — *Soient Σ et Σ_0 deux hypersurfaces lisses et étoilées, et soient H_Σ et H_0 les hamiltoniens associés. Supposons que le flot de Reeb de Σ_0 soit périodique de période* $\mathrm{sys}(\Sigma_0)$ *et que le hamiltonien H_Σ soit constant le long des orbites du flot de H_0. Alors*

$$\mathfrak{S}(\Sigma) \geqslant \mathfrak{S}(\Sigma_0).$$

De plus, l'égalité n'est possible que si Σ et Σ_0 sont homothétiques.

Démonstration. — Nous procédons de manière analogue à la preuve du Théorème 3.1 de [1]. Quitte à transformer Σ par une homothétie, nous pouvons supposer que

$$\mathrm{vol}(\Sigma) = \mathrm{vol}(\Sigma_0).$$

Soit $\rho : \Sigma_0 \to (0, \infty)$ la fonction radiale définie par

$$\rho(q,p) = \frac{1}{\sqrt{H(q,p)}}$$

et soit $\delta : \Sigma_0 \to \Sigma$ l'application $(q,p) \mapsto \rho(q,p)(q,p)$. Nous noterons abusivement par α les restrictions de α à Σ_0 et Σ. Nous avons $\delta^*\alpha = \rho\alpha$, d'où

$$\mathrm{vol}(\Sigma) = \frac{1}{n!}\int_{\Sigma_0} \rho^n \alpha \wedge (d\alpha)^{n-1}.$$

Comme $\mathrm{vol}(\Sigma) = \mathrm{vol}(\Sigma_0)$, la moyenne de ρ^n sur Σ_0 est égale à 1 et donc le minimum de ρ est au plus 1.

Soit (q,p) un point de Σ_0 où ρ atteint son minimum et soit γ la caractéristique fermée issue de ce point. L'image de γ par l'application radiale δ

est une caractéristique fermée de Σ et son action vaut $\min(\rho) \cdot \mathrm{sys}(\Sigma_0) \leqslant \mathrm{sys}(\Sigma_0)$ (voir [1]). Le cas d'égalité impose que $\rho = 1$ et donc $\Sigma = \Sigma_0$. □

Dire que le hamiltonien H est constant le long des orbites du champ hamiltonien X_{H_0} est équivalent à dire que le crochet de Poisson

$$\{H, H_0\} := dH(X_{H_0}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H_0}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H_0}{\partial q_i} \right)$$

est identiquement nul. De même que dans [1], nous pouvons adapter de manière directe l'approche de Cushman dans [3] des formes normales des systèmes hamiltoniens pour prouver le résultat suivant :

Proposition 1.4. — *Soit $\{H_t\}$ une famille lisse de hamiltoniens lisses en dehors de l'origine et homogènes de degré 2 telle que H_0 soit périodique. Pour chaque entier N, il existe une isotopie $\phi_t^{(N)} : \mathbb{R}^{2n} \setminus 0 \to \mathbb{R}^{2n} \setminus 0$ de l'identité par des transformations symplectiques lisses et homogènes de degré 1 telle que*

$$H_t \circ \phi_t^{(N)} = H_0 + tE_1 + \cdots + t^N E_N + o(t^N),$$

où $E_i : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ sont des hamiltoniens lisses en dehors de l'origine et homogènes de degré 2 tels que $\{E_i, H_0\} = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant N)$.

Nous pouvons alors montrer le théorème suivant, analogue du théorème 2.1 de [1] dans notre situation :

Théorème 1.5. — *Soit Σ_0 une hypersurface lisse et étoilée dont le flot de Reeb est périodique de période $\mathrm{sys}(\Sigma_0)$. Soit N un entier quelconque. Fixons un N-jet de déformation de H_0, soit N fonctions $H_1, \ldots, H_N$ lisses en dehors de l'origine et homogènes de degré 2 quelconques. Alors il existe une déformation lisse $H_t := H_{\Sigma_t}$ de H_0 telle que*

$$H_t = H_0 + tH_1 + \ldots + t^N H_N + o(t^N)$$

et

$$\mathfrak{S}(\Sigma_t) \geqslant \mathfrak{S}(\Sigma_0).$$

Démonstration. — D'après la proposition 1.4, il existe une déformation lisse $\phi_t^{(N)} : \mathbb{R}^{2n} \setminus 0 \to \mathbb{R}^{2n} \setminus 0$ de l'application identité consistant en des transformations symplectiques lisses et homogènes de degré 1 telle que

$$(H_0 + tH_1 + \ldots + t^N H_N) \circ \phi_t^{(N)} = H_0 + tE_1 + \ldots + t^N E_N + o(t^N),$$

avec $\{E_i, H_0\} = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant N)$.

Définissons une famille de hamiltoniens homogènes de degré 2 et lisses en dehors de l'origine par la formule

$$H_t = (H_0 + tE_1 + \ldots + t^N E_N) \circ (\phi_t^{(N)})^{-1}.$$

Comme $\{H_t \circ \phi_t^{(N)}, H_0\} = 0$, nous déduisons de la proposition 1.3 et du fait que $(\phi_t^{(N)})^* \alpha = \alpha$ que

$$\mathfrak{S}(\Sigma_{H_t}) = \mathfrak{S}(\phi_t^{(N)}(\Sigma_{H_t})) = \mathfrak{S}(\Sigma_{H_t \circ \phi_t^{(N)}}) \geqslant \mathfrak{S}(\Sigma_0).$$

□

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. C. Álvarez Paiva and Florent Balacheff, *Infinitesimal systolic rigidity for metrics all of whose geodesics are closed and of the same length*, Prépublication sur arXiv :0912.3413, 2009.

[2] Shiri Artstein-Avidan, Vitali Milman, and Yaron Ostrover, *The M-ellipsoid, symplectic capacities and volume*, Comment. Math. Helv. **83** (2008), no. 2, 359–369.

[3] Richard H. Cushman, *A survey of normalization techniques applied to perturbed Keplerian systems*, Dynamics reported : expositions in dynamical systems, Dynam. Report. Expositions Dynam. Systems (N.S.), vol. 1, Springer, Berlin, 1992, pp. 54–112.

[4] David Hermann, *Non-equivalence of symplectic capacities for open sets with restricted contact type boundary*, Prépublication d'Orsay, 1998.

[5] Wilhelm Klingenberg, *Lectures on closed geodesics*, Springer-Verlag, Berlin, 1978, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Vol. 230.

[6] Dusa McDuff and Dietmar Salamon, *Introduction to symplectic topology*, second ed., Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1998.

[7] Paul H. Rabinowitz, *On a theorem of Weinstein*, J. Differential Equations **68** (1987), no. 3, 332–343.

[8] Clifford Henry Taubes, *The Seiberg-Witten equations and the Weinstein conjecture*, Geom. Topol. **11** (2007), 2117–2202.

[9] Claude Viterbo, *Metric and isoperimetric problems in symplectic geometry*, J. Amer. Math. Soc. **13** (2000), no. 2, 411–431 (electronic).

J.C. Álvarez Paiva & Florent Balacheff
Université des Sciences et Technologies
Laboratoire Paul Painlevé
Bat. M2
59 655 Villeneuve d'Ascq (France)
juan-carlos.alvarez-paiva@math.univ-lille1.fr
florent.balacheff@math.univ-lille1.fr