Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

GILLES COURTOIS

Spectre d'une variété privée d'un ε-tube (Conditions de Dirichlet)

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 4 (1985-1986), p. 25-33
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1985-1986__4__25_0>

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Chambéry-Grenoble), 1985-1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
CHAMBÉRY-GRENOBLE
1985–1986 (25–33)

SPECTRE D'UNE VARIÉTÉ PRIVÉE D'UN ε-TUBE
(Conditions de Dirichlet)

par *Gilles COURTOIS*

I. - On considère une variété riemannienne (M^m, g) et N^n une sous-variété de M^m, ces deux variétés étant compactes et sans bord.

On note $T_\varepsilon N^n = \{x \in M^m \mid d(x, N^n) < \varepsilon\}$ et $M_\varepsilon = M^m \setminus T_\varepsilon N^n$. Le spectre du laplacien Δ de (M^m, g) est noté $\{\lambda_1 = 0 < \lambda_2 \le \lambda_3 \ldots$ et celui du laplacien Δ_ε de (M_ε, g) (dont le domaine est défini par la condition de Dirichlet sur ∂M_ε) est noté $\{\lambda_1(\varepsilon) < \lambda_2(\varepsilon) \le \lambda_3(\varepsilon) \ldots\}$. Les noyaux des opérateurs $e^{-t\Delta}$ et $e^{-t\Delta_\varepsilon}$ sont notés $k(t,x,y)$ et $k_\varepsilon(t,x,y)$. On note $p = m-n = \dim M^m - \dim N^n$ la codimension de N^n.

THEOREME 1. [C-F], [R-T]

Si $p \ge 2$, $\lambda_i(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \lambda_i$ en particulier, $\lambda_1(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$.

Remarque. L'hypothese $p \ge 2$ est nécessaire comme on le voit sur l'exemple :

$M = S^1$, $N = \{X_0\}$, M_ε est un segment de longueur $(2\pi - 2\varepsilon)$,
$X_1(\varepsilon) = [\pi/(2\pi - 2\varepsilon)]^2$ et $\lambda_1(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$.

Le théorème 1 est un corollaire du

THEOREME 2. [R-T], [C-F]

Si $p \ge 2$, $k_\varepsilon(t,x,y) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} k(t,x,y)$ et la convergence est uniforme pour (t,x,y) dans tout compact de $[0, \infty[\times (M^m \setminus N^n)^2$.

Dans la suite, on s'intéresse à la convergence de $\lambda_i(\varepsilon) - \lambda_i$.

THEOREME 3. [OZ]
Si $\dim M^m = 2$ ou 3, $N^n = \{X_0\}$ et si λ_i est simple on a $\lambda_i(\epsilon) - \lambda_i = \varphi(\epsilon)\,.\, f_i^2(X_0) + o(\varphi(\epsilon))$ où f_i est une base orthonormée de l'espace propre associé à X_i, et où

$$\varphi(\epsilon) = \begin{cases} 2\pi\,|\mathrm{Log}\ \epsilon|^{-1} & \text{si } m = 2 \\ 4\pi\epsilon & \text{si } m = 3\,. \end{cases}$$

Remarque. En particulier, sous les hypothèses du théorème 3 on a $X_1(\epsilon) = \dfrac{\varphi(\epsilon)}{\mathrm{vol}\, M^m} + o(\varphi(\epsilon))$.

THEOREME 4. [BE]
Si $\dim M^m = 2$, λ_i simple, on a

$$\lambda_i(\epsilon) - \lambda_i = \sum_{n\geq 1} a_n\,|\mathrm{Log}\,\epsilon|^{-n}$$

où le rayon de convergence de la série est non nul.

Remarque. Dans [BE], l'auteur obtient des résultats analogues en dimension 3 et 4.

THEOREME 5. [B-G]
Pour toute variété M^m, si $N^n = \{X_0\}$, il existe une fonction explicite $\alpha(\epsilon)$ tendant vers 0 avec ϵ telle que

$$\left|\lambda_1(\epsilon) - \frac{\varphi_m(\epsilon)}{\mathrm{vol}\, M^m}\right| \leq \varphi_m(\epsilon)\cdot\alpha(\epsilon)$$

où $\varphi_m(\epsilon) = \begin{cases} (m-2)\,\mathrm{vol}\, S^{m-1}\,\epsilon^{m-2} & \text{si } m \geq 3 \\ 2\pi\,|\mathrm{Log}\ \epsilon|^{-1} & \text{si } m = 2\,. \end{cases}$

En fait, par une méthode différente, on peut généraliser la théorème 5 :

THEOREME 6. Pour toute variété M^m et toute sous variété N^n de M^m de codimension $p \geq 2$, il existe une fonction explicite $\alpha(\epsilon)$ tendant vers 0 avec ϵ telle que :

$$|\lambda_1(\epsilon) - \frac{\text{vol } N^n}{\text{vol } M^m} \cdot \varphi_p(\epsilon)| \leq \varphi_p(\epsilon) \cdot \alpha(\epsilon) \quad .$$

Remarque. Les théorèmes 3 et 4 donnent des équivalents asymptotiques de $\lambda_i(\epsilon) - \lambda_i$, en particulier de $\lambda_1(\epsilon)$, et les théorèmes 5 et 6 donnent une majoration de l'écart entre $\lambda_1(\epsilon)$ et son équivalent asymptotique. Cette majoration $\varphi_p(\epsilon)\cdot\alpha(\epsilon)$ dépend de bornes sur la géométrie de M^m et du plongement $N^n \hookrightarrow M^m$. Précisément, si on note σ la courbure sectionnelle de M^m, S_ξ la deuxième forme fondamentale associée au vecteur ξ du fibré normal unitaire UN^n de N^n, $\text{inj}(N^n \hookrightarrow M^m)$ le rayon d'injectivité de l'application exponentielle associée à UN^n, on suppose que

(1) $|\sigma| \leq K$

(2) $\|S_\xi\| \leq \eta$

(3) $\text{inj}(N^n \hookrightarrow M^m) \geq \alpha > 0$

(4) $\sup\limits_{x \in M^m} d(x, N^m) \leq D$

et la fonction $\alpha(\epsilon)$ du théorème 6 vérifie en fait :

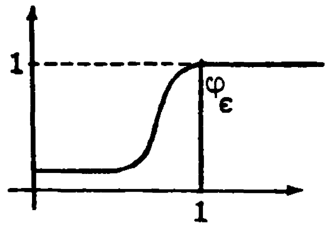
$$\alpha(\epsilon) = \begin{cases} 2n\eta \dfrac{(p-2)}{(p-3)}\epsilon + o_{K,\eta,D,\alpha}(\epsilon) & \text{si } p \geq 4 \\ 2n\eta\,\epsilon|\text{Log }\epsilon| + o_{K,\eta,D,\alpha}(\epsilon|\text{Log }\epsilon|) & \text{si } p = 3 \\ 0_{K,\eta,D,\alpha}(|\text{Log }\epsilon|^{-1}) & \text{si } p = 2 \ . \end{cases}$$

Les hypothèses (1) - (4) qui interviennent dans la majoration de l'écart entre $\lambda_1(\epsilon)$ et son équivalent asymptotique sont nécessaires comme le montrent les exemples suivants :

1) Nécessité de l'hypothèse sur σ.

On considère $N^n = \{X_0\}$ dans (M^m, g) et on suppose que $\text{inj}(N^n \hookrightarrow M^m) = 2$. On note ρ la fonction distance à X_0 et on considère une fonction $\varphi_\varepsilon : [0,\infty[\to [0,\infty[$, C^∞, telle que $\varphi_\varepsilon \geq 0$, $\varphi'_\varepsilon \geq 0$,

$$\varphi_\varepsilon(t) = 1 \text{ si } t \geq 1 \quad , \quad \text{et} \int_0^1 \varphi'_\varepsilon(t)dt = \epsilon \ .$$



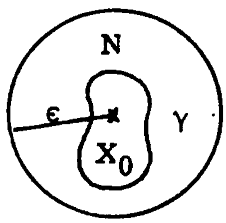
Les métriques $g_\varepsilon = (\varphi_\varepsilon \circ \rho)\cdot y$ coïncident avec g sur $M^m \backslash B_g(X_0, 1)$ et $B_{g_\varepsilon}(X_0, \varepsilon) = B_g(X_0, 1)$. En particulier,

$$\lambda_1(M^m \backslash B_{g_\varepsilon}(X_0, \varepsilon)) = \lambda_1(M^m \backslash B_g(X_0, 1)) \underset{\varepsilon \to 0}{\not\longrightarrow} 0 .$$

Dans la boule $B_{g_\varepsilon}(X_0, \varepsilon)$, la courbure sectionnelle σ_ε de g_ε n'est pas bornée, les autres invariants restant bornés.

2) <u>Nécessité de l'hypothèse sur</u> $\|S_g\|$.

On considère une variété M^3 et $N^1_\varepsilon = \gamma$ une courbe fermée dont tous les points sont à distance inférieure à ε d'un point fixé x_0 .



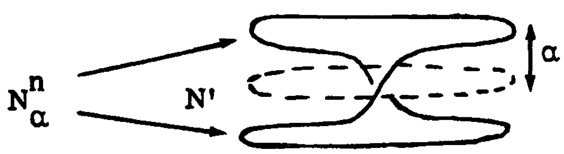
On a alors $T_\varepsilon N_\varepsilon \subset B(X_0, 2\varepsilon)$ et par le principe du minimax

$$\lambda_1(M^m \backslash T_\varepsilon N_\varepsilon) \leq \lambda_1(M^m \backslash B(X_0, 2\varepsilon)) .$$

L'estimation du théorème 6 ne peut être uniformément vérifiée pour N_ε puisque $\lambda_1(M^m \backslash T_\varepsilon N_\varepsilon) \sim \frac{2\pi}{\text{vol } M^m} |\text{Log } \varepsilon|^{-1}$ et $\lambda_1(M^m \backslash B(X_0, 2\varepsilon)) \sim \frac{\text{vol } S^2}{\text{vol } M}(2\varepsilon)$.

3) <u>Nécessité de l'hypothèse sur le rayon d'injectivité</u> :

Dans une variété M^m on considère :



On a $T_\varepsilon N_\alpha \hookrightarrow T_{\varepsilon+\alpha} N'$, vol $N_\alpha = 2$ vol N' . Par le minimax :

$$\lambda_1(M^m \backslash T_\varepsilon N_\alpha) \leq \lambda_1(M^m \backslash T_{\varepsilon+\alpha} N') .$$

L'estimation du théorème 6 ne peut être uniformément vérifiée pour N_α puisque

$$\lambda_1(M^m \backslash T_\varepsilon N_\alpha) \sim \frac{2 \text{ vol } N'}{\text{vol } M} (p-2) \text{ vol } S^{p-1} \varepsilon^{p-2}$$

et

$$\lambda_1(M^m \setminus T_{\varepsilon+\alpha}N') \sim \frac{\text{vol } N'}{\text{vol } M}(p-2)\,\text{vol } S^{p-1}(\varepsilon+\alpha)^{p-2} .$$

II. - RESUME DE LA DEMONSTRATION DU THEOREME 6.

Dans ce paragraphe, toutes les variétés considérées sont compactes sans bord :

1) Les fonctions de Green : pour toute sous variété N^n de M^m, compacte sans bord, on définit la fonction de Green de pôle N^n, par

$$G_N(x) = \int_N dy \int_0^\infty [k(t,X,Y) - (1/\text{vol } M^m)]\, dt .$$

La fonction G_N est C^∞ sur $M^m \setminus N^n$ et est caractérisée par les propriétés :

(1) $\Delta G_N = \delta_N - (\text{vol } N^n/\text{vol } M^m)$

(2) $\int_M G_N(X)\, dX = 0$

où δ_N est la masse de Dirac de N^n, i.e. $\delta_N(f) = \int_N f(y)\, dy$.

La démonstration du théorème 6 provient d'une majoration de $\lambda_1(\varepsilon)$ par le principe du minimax appliqué à une fonction ad-hoc et d'une minoration de $\lambda_1(\varepsilon)$ qui découle du

LEMME. Pour toute variété M^m et toute sous variété N^n de M^m, si on note $G_N^* = G_N - \min_{X \in M^m} G_N(X)$, pour tout $\beta > 0$, on a $\lambda_1(G_N^* \leq \beta) \geq \frac{1}{\beta}\frac{\text{vol } N}{\text{vol } M}$ où $\lambda_1(G_N^* \leq \beta)$ désigne la première valeur propre du domaine $\{G_N^* \leq \beta\}$ avec condition de Dirichlet sur le bord.

Preuve. Soit f la première fonction propre du problème de Dirichlet de $\Omega = \{G_N^* \leq \beta\}$. On a d'une part :

$$\int_\Omega [\beta - G_N^*]\, \Delta f \leq \lambda_1(G_N^* \leq \beta) \cdot \beta \cdot \int_\Omega f$$

et d'autre part, par la formule de Stokes :

$$\int_\Omega [\beta - G_N^*] \Delta f = (\mathrm{vol}\, N/\mathrm{vol}\, M) \int_\Omega f$$

d'où la minoration, puisque $\int_\Omega f > 0$. ∎

2) <u>Un cas particulier</u> : dans le cas où M^m est de révolution autour de N^n , (par exemple $M^m = S^m$ et $N^n = \{X_0\}$) , la fonction G_N^* est une fonction (décroissante) de la distance à N^n , i.e. $G_N^*(x) = g(r(x))$ où $r(X) = \mathrm{dist}(X, N^n)$.

• Le principe du minimax appliqué à $\varphi = g(\epsilon) - G_N^*$ donne alors facilement : $\lambda_1(\epsilon) \leq \frac{\mathrm{vol}\, N}{\mathrm{vol}\, M} \frac{1}{g(\epsilon)} + \frac{\alpha(\epsilon)}{g(\epsilon)}$ où $\alpha(\epsilon) \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} 0$.

• Le lemme appliqué à $\beta = g(\epsilon)$ donne :

$$\lambda_1(G_N^* \leq g(\epsilon)) = \lambda_1(\epsilon) \geq \frac{\mathrm{vol}\, N}{\mathrm{vol}\, M} \frac{1}{g(\epsilon)} \quad .$$

On conclut le théorème 6 dans ce cas particulier en remarquant que $g(\epsilon)^{-1} = \varphi_p(\epsilon) + \delta(\epsilon)\, \varphi_p(\epsilon)$ où $\delta_p(\epsilon) \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} 0$.

3) <u>Cas général</u> : dans le cas général, la difficulté vient de ce que G_N^* n'est pas une fonction de la distance à N^m , le lemme ne pouvant pas s'appliquer directement pour la minoration.

Mais on a, pour toute variété M^m et toute variété N^n de codimension $p \geq 2$ vérifiant les hypothèses (1)-(4) que nous rappelons :

(1) $|\sigma| \leq K$

(2) $\|S_\xi\| \leq \eta$

(3) $\inf(N^n \hookrightarrow M^m) \geq \alpha > 0$

(4) $\sup_{x \in M^m} d(X, N^n) \leq D$

le théorème suivant.

On désigne par g_0 la métrique canonique de la sphère S^{p-1} .

THEOREME 7. Il existe deux constantes explicites $\bar{\gamma}(K,D)$ et $\tilde{\gamma}(K,D,\alpha,\eta)$ telles que

$\bar{g}\circ r(X) - \bar{\gamma} \le G_N(X) \le \tilde{g}\circ r(X) + \tilde{\gamma}$

où la fonction $\bar{g}(r)$ [resp. $\tilde{g}\circ r$] est la fonction de Green de pôle $\{0\}$ de la boule $\bar{B}(0,D)$
[resp. $\tilde{B}(0,\tilde{\alpha}) = \tilde{B}\Big(0, \inf\big(\alpha, (1/\sqrt{K})\,\mathrm{Arctg}(\sqrt{K}/\eta)\big)\Big)$] de $\mathbb{R}^p$ muni de la métrique s'écrivant en coordonnées polaires autour de 0

$\bar{g} = (dr)^2 + (\operatorname{ch} Kr + \eta \operatorname{sh} Kr)^{(2n)/(p-1)} (K^{-1} \operatorname{sh} Kr)^2\, g_0$

[resp. $\tilde{g} = (dr)^2 + (\cos Kr - \eta \sin Kr)^{(2n)/(p-1)} (K^{-1} \sin Kr)^2 g_0$] , la condition au bord de $\bar{B}$ [resp. $\tilde{B}$] étant celle de Neumann.

Le théorème 6 découle alors de :

- la majoration de $\lambda_1(\epsilon)$ par le principe du minimax appliqué à la fonction $\varphi = \bar{g}(\epsilon) - \bar{g}\circ r$ dont le quotient de Rayley vérifie

$$\int |\nabla\varphi|^2 / \int \varphi^2 \le \frac{\text{vol } N}{\text{vol } M} \frac{1}{\bar{g}(\epsilon)} + \frac{\alpha(\epsilon)}{\bar{g}(\epsilon)} \quad ;$$

- du lemme appliqué à $\Omega_\epsilon = \{G_N^* \le \tilde{g}^*(\epsilon)\}$ où $G_N^* = G_N - \min_{X\in M} G_N(X)$ et $\tilde{g}^* = \tilde{g} + \tilde{\gamma} - \min_{X\in M} G_N(X)$, en remarquant que, puisque $G_N \le \tilde{g} + \tilde{\gamma}$, on a l'inclusion $\Omega_\epsilon \supset M_\epsilon$, et donc

$$\lambda_1(\epsilon) \ge \lambda_1(\Omega_\epsilon) \ge \frac{\text{vol } N}{\text{vol } M} \frac{1}{\tilde{g}^*(\epsilon)} \ .$$

- du fait que $\bar{g}(\epsilon)^{-1} = \varphi_p(\epsilon) + \bar{\delta}(\epsilon)\varphi_p(\epsilon)$

$$\tilde{g}^*(\epsilon)^{-1} = \varphi_p(\epsilon) + \tilde{\delta}(\epsilon)\varphi_p(\epsilon)$$

où $\bar{\delta}(\epsilon)$ et $\tilde{\delta}(\epsilon)$ tendent vers 0 avec ϵ .

Démonstration du théorème 7 :

a) Majoration. On applique le principe du maximum à $G_N - \tilde{g}\circ r$:

on a en effet

$$\Delta G_N = \delta_N - (\text{vol } N/ \text{ vol } M)$$
$$\Delta(\tilde{g}\circ r) = \tilde{\Delta}(\tilde{g}\circ r) + (\Delta-\tilde{\Delta})(\tilde{g}\circ r) = \delta_N - (1/\tilde{V}) + (\Delta r - \tilde{\Delta} r)\cdot(\tilde{g}'\circ r)$$

où $\tilde{V}$ désigne le volume et $\tilde{\Delta}$ le laplacien de $\tilde{B}(0,\tilde{\alpha})$. On a donc :

$$\Delta(G_N - (\tilde{g}\circ r)) = (1/\tilde{V}) - (\text{vol } N/\text{vol } M) + (\tilde{\Delta} r - \Delta r)\,(\tilde{g}'\circ r) \ .$$

Mais d'après le théorème de Heintze-Karcher, cf. [H-K] , la fonction distance à 0 dans $(\tilde{B}(0,\tilde{\alpha}),\tilde{g})$ est <u>moins convexe</u> que la fonction distance à N^n dans M^m , donc $\Delta r - \tilde{\Delta} r \leq 0$ et $\Delta(G_N - (\tilde{g}\circ r)) \leq (1/\tilde{V}) - (\text{vol } N/\text{vol } M)$. (Il faut remarquer que lapartie singulière de $\Delta(\tilde{g}\circ r)$ portée par $\partial\tilde{B}(0,\tilde{\alpha})$ est nulle puisque la fonction $\tilde{g}\circ r$ sur M^m est de classe C^1) .

On note $G_{\{X\}}$ le noyau de Green de pôle $\{X\}$ sur M^m et $G = G_{\{X\}} - \min_{Z\in M} G_{\{X\}}(z)$. On a alors d'une part :

$$\int_M G(y)\,\Delta\big(G_N - (\tilde{g}\circ r)\big)(y)dy \leq \Big[(1/\tilde{V}) - (\text{vol } N/\text{vol } M)\Big]\int_M G(y) \ .$$

Et d'autre part :

$$\int_M G(y)\,\Delta\big(G_N - (\tilde{g}\circ r)\big)(y)dy = \big(G_N - (\tilde{g}\circ r)\big)(x) - (1/\text{vol } M)\int_M G_N - (\tilde{g}\circ r)\ (y)\,dy \ .$$

On déduit :

$$G_N(x) - \tilde{g}\circ r(x) \leq \Big[(1/\tilde{V}) - (\text{vol } N/\text{vol } M)\Big]\Big[\int_M G(y)\Big] - (1/\text{vol } M)\int_M (\tilde{g}\circ r)(y)d$$

et la majoration de G_N s'obtient en majorant $\|G\|_{L^1}$ par un théorème de Bérard-Gallot, cf. [B-G] , et en majorant $\|\tilde{g}\circ r\|_{L^1}$ par le théorème de Bishop, cf. [C-E] .

b) <u>Minoration</u>. De la même façon que précédemment, on obtient :

$$\Delta(G_N - (\bar{g}\circ r)) = (1/\bar{V}) - (\text{vol } N/\text{vol } M) + (\bar{\Delta} r - \Delta r)(g^{-1}\circ r) + (\Delta_{\text{sing}} r)(g^{-1}\circ r)$$

où $\Delta_{\text{sing}} r$ désigne la partie singulière de Δr , portée par le art-locus de N^n .

D'après le théorème de Bishop, on a $(\bar{\Delta} r - \Delta r) \leq 0$ et <u>on peut</u>

montrer que $\Delta_{\mathrm{sing}} r \leq 0$, d'où

$$\Delta\left(G_N-(\bar{g}\circ r)\right) \geq \left[(1/\bar{V}) - (\mathrm{vol}\, N/\mathrm{vol}\, M)\right] .$$

La minoration s'en déduit comme précédemment la majoration.

BIBLIOGRAPHIE

[OZ] Tôhoku Math. J. (1982), vol. 34,pp.7-14.

[B-G] C.R.A.S. 297 (1983), p. 185.

[R-T] J. Funct. Anal. 18, pp. 27-29 (1975).

[BE] G. BESSON, Chirurgie et spectre du Laplacien. Prépublication de l'Institut Fourier, Institut Fourier, Math. Pures, Université de Grenoble.

[C-F] CHAVEL-FELMAN, J. Funct. Anal. 30, pp. 198-222 (1978).

[C-E] Comparison theorems in Riemannian Geometry. North-Holland Publ. Amsterdam, 1975.

[H-K] A general comparison theorem with applications to volume estimates for submanifolds. Ann. Sci. Ec. Norm. Super. Paris 11, pp. 451-470 (1978).

- o -