

Institut Fourier — Université de Grenoble I

*Actes du séminaire de*  
**Théorie spectrale  
et géométrie**

Nicolas JUILLET

**Transport de mesure et courbures de Ricci synthétiques dans le groupe de Heisenberg**

Volume 25 (2006-2007), p. 85-104.

<[http://tsg.cedram.org/item?id=TSG\\_2006-2007\\_\\_25\\_\\_85\\_0](http://tsg.cedram.org/item?id=TSG_2006-2007__25__85_0)>

© Institut Fourier, 2006-2007, tous droits réservés.

L'accès aux articles du Séminaire de théorie spectrale et géométrie (<http://tsg.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://tsg.cedram.org/legal/>).

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du*  
*Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*  
<http://www.cedram.org/>

## TRANSPORT DE MESURE ET COURBURES DE RICCI SYNTHÉTIQUES DANS LE GROUPE DE HEISENBERG

Nicolas Juillet

RÉSUMÉ. — Dans ces notes il sera expliqué que la propriété  $MCP(0, 5)$  est vérifiée par le groupe de Heisenberg  $\mathbb{H}^1$  muni de la distance de Carnot-Carathéodory et de la mesure de Lebesgue. Cette propriété correspond pour les espaces métriques mesurés à une courbure de Ricci positive. Comme application, les mesures interpolées par transport de mesure sont absolument continues. En revanche, la courbure-dimension  $CD(0, N)$ , une autre courbure de Ricci synthétique adaptée aux espaces métriques mesurés est fautive pour  $\mathbb{H}^1$ .

### Introduction

Le groupe de Heisenberg  $\mathbb{H}^n$  apparaît dans de nombreux domaines mathématiques ou plus généralement scientifiques et techniques. Il s'agit en effet d'un espace de référence en théorie du contrôle et en géométrie sous-riemannienne tout comme  $\mathbb{R}^N$  est l'espace de référence de la géométrie riemannienne. Ces espaces ont entre autres choses, en commun le fait de vérifier une inégalité de Poincaré locale avec une mesure canonique doublante. Ceci constitue un cadre très apprécié pour l'analyse dans les espaces métriques mesurés (voir [6]). Plus que cela, le groupe de Heisenberg permet de mesurer le degré de généralité des théories sur les espaces métriques car il se prête assez bien aux calculs. Dans cette veine Ambrosio et Rigot [1] ont étendu à  $\mathbb{H}^n$ , une grande part des résultats connus dans le cas riemannien au sujet du transport de mesure. En particulier il existe un unique transport optimal d'une mesure absolument continue sur une deuxième mesure et ce plan de transport est donné par une application. Dans ces notes, nous allons donner des résultats complémentaires, apparus initialement dans [7] et [5], au sujet du transport de mesure dans le groupe de Heisenberg.

---

*Mots-clés* : groupe de Heisenberg, transport optimal, courbure de Ricci.

D'une part, Figalli et l'auteur ont résolu dans [5] une question posée par Ambrosio et Rigot à la fin de leur article [1, partie 7] : tout comme sur les variétés riemannienne, les mesures qu'interpolent les transports optimaux partant d'une mesure absolument continue, sont aussi absolument continus.

D'autre part, il sera question de l'application récente qui a été faite du transport de mesure pour définir ce qu'est un espace métrique mesuré dont la courbure est minorée. On doit ce développement passionnant à Lott et Villani [8, 9] ainsi qu'à Sturm [11, 12]. Ces auteurs ont tiré parti de l'équivalence qui existe pour les variétés riemanniennes de dimension inférieure à  $N$  grossièrement parlant entre, avoir une courbure de Ricci uniformément supérieure à  $K$  et, avoir une fonctionnelle entropie convexe le long du transport de mesure. Cette seconde propriété porte le nom de courbure-dimension  $CD(K, N)$  (nom emprunté à Bakry et Émery [3] désignant une propriété apparentée mais différente) et a un sens dans les espaces métriques mesurés. Rien n'indique de façon directe que  $\mathbb{H}^1$  doive ou ne doive pas vérifier la condition de courbure-dimension. On a montré dans [7] que cette propriété est fautive pour  $\mathbb{H}^n$  quels que soient les paramètres  $K$  et  $N$ .

La Propriété de Contraction de Mesure ( $MCP(K, N)$ ) aura une importance centrale dans cette note car elle a trait aux deux résultats évoqués précédemment. D'une part, c'est en utilisant  $MCP$  qu'on a pu résoudre la question soulevée par Ambrosio et Rigot. D'autre part,  $MCP(K, N)$  est tout comme  $CD(K, N)$ , une inégalité géométrique qu'un espace métrique mesuré peut vérifier ou non et qu'on interprète comme une courbure de Ricci minorée par  $K$ . Dans le cas de  $\mathbb{H}^1$ , la propriété sera vraie si et seulement si  $K \leq 0$  et  $N \geq 5$ . De façon surprenante, alors que la définition de  $MCP$  engage des idées proches du transport de mesure, cette propriété peut être vraie, tandis que  $CD$  ne l'est pas ( $MCP$  est généralement plus faible). Par ailleurs la dimension 5, optimale, est assez inattendue : ce n'est ni la dimension topologique (qui est 3) ni la dimension de Hausdorff (qui est 4) du groupe de Heisenberg.

Nous avons ici choisi le cadre restreint du premier groupe de Heisenberg  $\mathbb{H}^1$  pour un paramètre courbure  $K$  égal à 0. Les résultats sur  $\mathbb{H}^n$  avec  $n \geq 1$  se démontrent de la même manière mais impliquent des calculs plus longs ; les résultats pour  $K \neq 0$  se déduisent de  $K = 0$  à l'aide d'observations simples (voir [7, Remarque 3.4]). Dans la première partie, nous précisons ce qu'est le groupe de Heisenberg et montrerons qu'il vérifie  $MCP(0, 5)$ . Dans la deuxième il sera question des définitions du transport de mesure et de  $CD$ . On citera le théorème de Ambrosio et de Rigot sur le transport de mesure dans le groupe de Heisenberg, puis on expliquera comment

montrer l'absolue continuité des mesures interpolées lors de ce transport. La troisième partie conclura avec une comparaison des courbures de Ricci synthétiques dans le groupe de Heisenberg et une démonstration de ce que  $CD(0, N)$  n'est pas vraie dans  $\mathbb{H}^1$ .

## 1. Le groupe de Heisenberg et $MCP(0, 5)$

### 1.1. Premiers contacts avec $\mathbb{H}^1$

À  $\mathbb{H}^1$  sont associés la distance de Carnot-Carathéodory  $d_{cc}$  ainsi que  $\mathcal{L}$ , la mesure de Lebesgue de  $\mathbb{R}^3$ . On peut en effet présenter  $\mathbb{H}^1$  comme  $\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{R}$  et un élément courant sera noté  $(z, t)$  avec  $z = x + iy$ . Le produit du groupe est le suivant :

$$(z, t) \cdot (z', t') = (z + z', t + t' + 2\Im(z\overline{z'})).$$

Ici  $\Im$  est la fonction partie imaginaire. Avec ce produit  $\mathbb{H}^1$  est un groupe de Lie d'élément neutre  $(0_{\mathbb{C}}, 0_{\mathbb{R}})$  et pour lequel l'inverse de  $(z, t)$  est  $(-z, -t)$ . Pour l'algèbre de Lie des vecteurs invariants par translation à gauche on utilise le plus souvent la base

$$\mathbf{X} = \partial_x + 2y\partial_t \quad , \quad \mathbf{Y} = \partial_y - 2x\partial_t \quad , \quad \mathbf{T} = \partial_t.$$

L'ensemble  $\mathbb{L} = \{(z, t) \in \mathbb{H}^1 \mid z = 0\}$  est à la fois sous-groupe dérivé et centre du groupe. Comme nous le verrons,  $\mathbb{L}$  joue aussi un rôle important pour la géométrie de  $(\mathbb{H}^1, d_{cc})$ .

Soit maintenant  $\tau_p(q) = p \cdot q$  la translation à gauche par  $p$ . On remarque qu'il s'agit d'une transformation affine qui préserve le volume de  $\mathbb{R}^3$ , puisque son déterminant vaut 1. Cela fait de  $\mathcal{L}$  la mesure de Haar du groupe. On va voir maintenant que la distance  $d_{cc}$  est elle aussi invariante par translation à gauche.

L'espace métrique  $(\mathbb{H}^1, d_{cc})$  est complet et  $d_{cc}$  induit la topologie usuelle de  $\mathbb{R}^3$ . Entre deux points,  $d_{cc}$  est définie comme l'infimum des longueurs des courbes reliant ces deux points. La fonctionnelle longueur dont il est question a une définition spécifique que nous allons donner par la suite et qui en particulier s'exprime exclusivement pour les courbes de  $\mathbb{R}^3$  absolument continues qui vérifient la condition d'horizontalité :

$$(1.1) \quad \gamma'_t = 2(\gamma_y \gamma'_x - \gamma_x \gamma'_y) \quad \text{pour presque tout } s \in [s_0, s_1]$$

où  $(\gamma_x, \gamma_y, \gamma_t)$  sont les coordonnées de  $\gamma$ . Cette condition exprime le fait que la troisième coordonnée doit croître proportionnellement (avec un coefficient de proportionnalité  $-4$ ) à l'aire balayée par le vecteur  $\overrightarrow{0_{\mathbb{C}}g}$  où

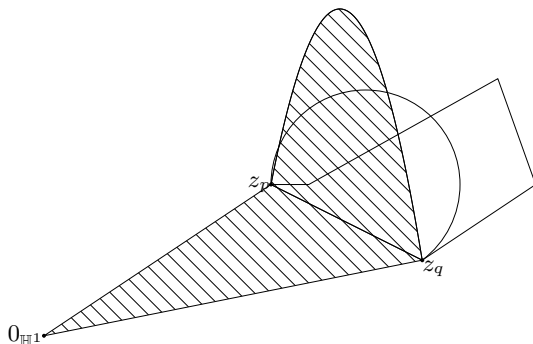


FIG. 1.1. Parmi les courbes balayant une aire donnée, l'arc de cercle est la plus courte.

$g = (\gamma_x, \gamma_y)$  désigne la projection de la courbe  $\gamma$  sur  $\mathbb{C}$ . Plus classiquement, on présente habituellement de façon équivalente les courbes horizontales comme celles qui sont tangentes en presque tout temps  $s$  au sous-espace engendré par  $\mathbf{X}(\gamma(s))$  et  $\mathbf{Y}(\gamma(s))$ .

La longueur d'une courbe horizontale est alors précisément

$$\int_{s_0}^{s_1} \sqrt{\gamma_x'^2 + \gamma_y'^2},$$

la longueur euclidienne de la courbe projetée  $g(s)$ . Une courbe non-horizontale pourra être considérée comme de longueur infinie. Récapitulons :

$$(1.2) \quad d_{cc}(p, q) = \inf_{(\gamma(s_0), \gamma(s_1)) = (p, q)} \begin{cases} \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{\gamma_x'^2 + \gamma_y'^2} & \text{si (1.1)} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'infimum de la formule (1.2) est en fait atteint par au moins une courbe. Une telle courbe sera appelée géodésique dans ce qui suivra et le nom ne sera pas donné abusivement puisque quitte à la reparamétriser, la courbe considérée sera un plongement isométrique d'un segment de  $\mathbb{R}$  dans  $(\mathbb{H}^1, d_{cc})$ . Le fait qu'il existe des courbes qui minimisent la longueur peut se déduire de la connaissance des solutions au problème de Didon, une variante du problème isopérimétrique plan. Il s'agit de comparer pour une courbe  $g(s) \in \mathbb{C}$  non fermée, la longueur de la courbe à l'aire algébrique qu'elle entoure : les solutions sont uniques et sont des arcs de cercles (voir figure

1.1). Dans le problème d’infimum (1.2), on cherche à minimiser la longueur des courbes allant de  $p = (z_p, t_p)$  à  $q = (z_q, t_q)$  et satisfaisant la condition d’horizontalité (1.1). Alors certaines choses sont nécessaires et suffisantes pour représenter de telles courbes  $\gamma$  par leurs projections complexes  $g$  :

- $\gamma(0) = p$
- La courbe projetée  $g$  joint  $z_p$  à  $z_q$ .
- Cette courbe balaie une aire algébrique de valeur  $\frac{t_q - t_p}{-4}$ .

Minimiser la longueur de  $\gamma$  ou de façon équivalente de  $g$  revient donc exactement à résoudre le problème de Didon : la courbe  $g$  de plus petite longueur est un arc de cercle. En menant de  $p$  le relevé horizontal de cette courbe, on arrive en  $q$  (du fait de la condition sur l’aire algébrique) et la courbe relevée  $\gamma$  est une géodésique de  $\mathbb{H}^1$ .

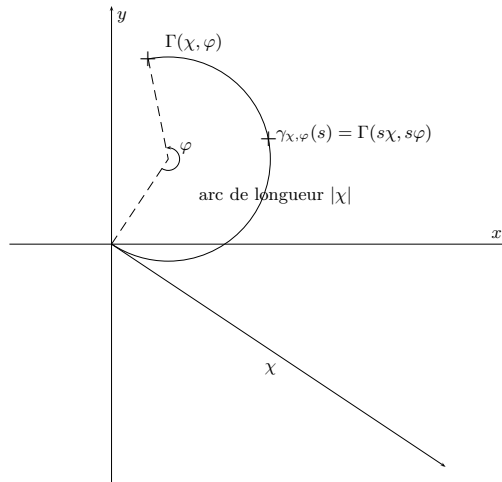


FIG. 1.2. Projection de  $\gamma_{\chi, \varphi}$  sur  $\mathbb{C} \times \{0\}$  dans  $\mathbb{H}^1$ .

Suite à ces explications rapides, nous pouvons donner les équations explicites des géodésiques partant de l’origine  $0_{\mathbb{H}} = (0, 0)$ . Nous paramétrons ces courbes par longueur d’arc sur le segment  $[0, 1]$ . Suivant le principe indiqué à la figure 1.2, on obtient tous les arcs de cercle en spécifiant leur vecteur tangent à l’origine (c’est le vecteur  $\chi \in \mathbb{C}$ ) ainsi que leur angle d’ouverture  $\varphi \in [-\pi, \pi]$ . Il y a une certaine diversité dans les arcs de cercle : parmi les cas particuliers on trouve les cercles entiers dont l’ouverture d’angle est de  $2\pi$  ou  $-2\pi$  (selon le sens de rotation), les demi-cercles qui sont tels

que  $|\varphi| = \pi$  ou encore les segments de droite dont l'ouverture d'angle est 0. Lorsque  $|\varphi| > 2\pi$ , les arcs de cercle correspondant font plus d'un tour et, parmi les courbes balayant la même aire algébrique, ne sont pas ceux de longueur minimale. On a finalement les équations des géodésiques en fonction des paramètres  $\chi$  et  $\varphi$ .

$$\gamma_{\chi,\varphi}(s) = \begin{cases} \left( i \frac{e^{-i\varphi s} - 1}{\varphi} \chi, 2 \frac{\varphi s - \sin(\varphi s)}{\varphi^2} |\chi|^2 \right) & \text{si } \varphi \neq 0 \\ (s\chi, 0) & \text{si } \varphi = 0. \end{cases}$$

La coordonnée complexe suit une paramétrisation d'arc de cercle tandis que la troisième coordonnée se déduit du calcul de l'aire algébrique balayée par cet arc en fonction de  $s$ .

Les géodésiques partant du point  $p$  sont simplement les courbes  $(\gamma_{\chi,\varphi}^p = p \cdot \gamma_{\chi,\varphi})$ . La raison en est que la translation à gauche  $\tau_p$  conserve l'horizontalité des courbes (comme on peut le vérifier) et ne fait que translater dans  $\mathbb{C}$  la projection complexe de ces dernières. Il s'en suit que  $\tau_p$  préserve les longueurs et que c'est une isométrie de  $\mathbb{H}^1$ .

Cette paramétrisation des géodésiques partant de l'origine est similaire à la démarche qu'on a lorsqu'on définit les coordonnées sphériques d'un point. En s'en inspirant on peut donc considérer  $(\chi, \varphi)$  comme des coordonnées sphériques de  $\mathbb{H}^1$  et l'application

$$\Gamma(\chi, \varphi) := \gamma_{\chi,\varphi}(1) = \begin{cases} \left( i \frac{e^{-i\varphi} - 1}{\varphi} \chi, 2 \frac{\varphi - \sin(\varphi)}{\varphi^2} |\chi|^2 \right) & \text{si } \varphi \neq 0 \\ (s\chi, 0) & \text{si } \varphi = 0. \end{cases}$$

comme une application de changement de coordonnées sphérique-carthésien. On a alors la proposition :

**PROPOSITION 1.1.** — *L'application  $\Gamma$  est un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\mathbb{C}^* \times ]-\pi, \pi[ =: \mathbb{D}$  sur  $\mathbb{H}^1 \setminus \mathbb{L}$ .*

On rappelle que  $\mathbb{L} = \{(z, t) \in \mathbb{H}^1 \mid z = 0\}$  et que  $\mathbb{C}^*$  est une notation pour  $\mathbb{C} \setminus \{0_{\mathbb{C}}\}$ . La lettre  $\mathbb{D}$  est mise pour domaine des coordonnées sphériques.

Dans la proposition on a exclu les relevés horizontaux des cercles complets ( $\varphi = \pm 2\pi$ ) car pour une longueur  $|\chi|$  donnée, ils atteignent tous le même point de  $\mathbb{L}$  quel que soit l'argument du complexe  $\chi$ .

De façon analogue, pour tout  $s \in ]0, 1]$ , l'application  $\Gamma_s$  définie par

$$\Gamma_s(\chi, \varphi, \cdot) = \gamma_{\chi,\varphi}(s) = \Gamma(s\chi, s\varphi)$$

est un difféomorphisme de  $\mathbb{D}$  sur son image.

### 1.2. Deux applications auxiliaires

Nous définissons ici deux applications qui nous seront utiles dans les prochaines parties. Il s'agit de l'application point-intermédiaire  $\mathcal{M}$  et de l'inverse géodésique  $\mathcal{I}$ .

L'application  $\mathcal{M}$  a pour argument  $(p, q, s)$  un élément de  $\mathbb{H}^1 \times \mathbb{H}^1 \times [0, 1]$  mais on utilisera aussi pour  $\mathcal{M}(p, q, s)$  l'écriture  $\mathcal{M}^s(p, q)$  ou encore  $\mathcal{M}_p^s(q)$ . Lorsque  $z_p$  et  $z_q$  sont distincts,  $\mathcal{M}^s(p, q)$  sera défini de façon univoque comme le point  $m$  pris sur la géodésique de  $p$  à  $q$  en respectant les proportions  $d_{cc}(p, m) = s d_{cc}(p, q)$  et  $d_{cc}(m, q) = (1 - s) d_{cc}(p, q)$ . Il s'en suit que

$$\mathcal{M}(p, q, s) = \tau_p \circ \Gamma_s \circ \Gamma^{-1} \circ \tau_p^{-1}(q)$$

ou bien encore

$$\mathcal{M}(p, q, s) = \gamma_{\Gamma^{-1}(p^{-1}.q)}^p(s)$$

où on reconnaîtra dans  $\gamma_{\Gamma^{-1}(p^{-1}.q)}^p$  la géodésique normalisée allant de  $p$  à  $q$ .

*Remarque 1.2.* — L'application  $\mathcal{M}$  n'est pas définie quand  $z_p = z_q$  car dans ce cas, il y a une infinité de géodésiques entre  $p$  et  $q$  (autant que de cercles d'aire  $(t_q - t_p)/4$  passant par  $z_p$ ) d'où une indétermination.

L'inverse géodésique  $\mathcal{I}$  est pour ainsi dire l'application qui à un point  $p$  associe  $\mathcal{I}(p)$  de façon à ce que la géodésique de  $p$  à  $\mathcal{I}(p)$  ait pour milieu le point origine  $0_{\mathbb{H}}$ . Ainsi lorsque  $\mathcal{I}$  est bien définie, on a l'identité

$$\mathcal{I}(p) = \Gamma(-\Gamma^{-1}(\chi, \varphi)).$$

C'est-à-dire que pour  $p = \Gamma(\chi, \varphi)$  on aura  $\mathcal{I}(p) = \Gamma(-\chi, -\varphi)$ .

*Remarque 1.3.* — Concrètement cette application n'est un inverse géodésique que sur  $\Gamma_{1/2}(\mathbb{C} \times [-2\pi, 2\pi]) = \Gamma(\mathbb{C} \times [-\pi, \pi])$ . On peut en fait voir que cet ensemble est le fermé constitué des points compris entre les deux paraboloides d'équations  $|z|^2 = \pm 2|t|/\pi$  : en dehors, il n'y a pas de courbe d'extrémité  $p$  et de milieu  $0_{\mathbb{H}}$  qui soit globalement géodésique.

Le dernier point que nous voudrions évoquer dans cette partie est le calcul du déterminant jacobien de  $\Gamma$ . C'est en fait un élément de la démonstration de la proposition 1.1 car on y voit que  $\text{Jac}(\Gamma)$  ne s'annule pas. Mais la valeur exacte de ce déterminant nous importe aussi beaucoup pour la suite.

PROPOSITION 1.4. — *Le jacobien de  $\Gamma$  vaut*

$$\text{Jac}(\Gamma_1)(\chi, \varphi) = \begin{cases} 2^4 |\chi|^2 \left( \frac{\sin(\varphi/2)}{\varphi} \right) \frac{\sin(\varphi/2) - (\varphi/2) \cos(\varphi/2)}{\varphi^3} & \text{pour } \varphi \neq 0, \\ |\chi|^2/3 & \text{sinon.} \end{cases}$$



Pour  $0 < s < 1$ , celui de  $\Gamma_s$  est

$$\text{Jac}(\Gamma_s)(\chi, \varphi) = \begin{cases} 2^4 s |\chi|^2 \left( \frac{\sin \frac{s\varphi}{2}}{\varphi} \right) \frac{\sin \frac{s\varphi}{2} - \frac{s\varphi}{2} \cos \frac{s\varphi}{2}}{\varphi^3} & \text{pour } \varphi \neq 0, \\ s^5 |\chi|^2 / 3 & \text{sinon.} \end{cases}$$

### 1.3. Propriété de Contraction de Mesure MCP

Nous allons maintenant définir la Propriété de Contraction de Mesure pour certains espaces métriques dont fait partie le groupe de Heisenberg. Par la suite nous donnerons les étapes du calcul qui permet d'établir  $MCP(0, 5)$  pour  $\mathbb{H}^1$ . La propriété  $MCP$  n'a été effectivement considérée comme prolongement de la courbure de Ricci dans les espaces métriques mesurés qu'à partir des articles de Sturm [12] et de Ohta [10]. Leurs définitions sont presque identiques mais différentes et ont l'avantage d'inclure a priori des espaces pour lesquels le nombre de géodésiques entre deux points est illimité. Cependant les espaces connus vérifiant une  $MCP(K, N)$  sont moins sophistiqués. La définition exacte étant difficile à s'approprier, nous donnons ici une formulation plus simple dans le cas où on peut associer à  $(X, d, \nu)$  une application mesurable

$$\mathcal{N} : X \times X \times [0, 1] \rightarrow X$$

telle que pour  $\nu \otimes \nu$ -presque tout couple de points  $(p, q)$ , la géodésique de  $p$  à  $q$  est unique et correspond à  $(\mathcal{N}(p, q, s))_{s \in [0, 1]}$  (l'application  $\mathcal{M}$  est bien sûr une telle application dans le cas de  $\mathbb{H}^1$ ). L'espace métrique mesuré vérifie alors  $MCP(0, N)$  si et seulement si pour presque tout point  $p$ , on a pour tout ensemble  $\nu$ -mesurable  $E$  et pour  $s$  parcourant  $[0, 1]$  :

$$s^N \nu(\mathcal{N}_{p,s}^{-1}(E)) \leq \nu(E)$$

où  $\mathcal{N}_{p,s} = \mathcal{N}(p, q, s)$ . Lorsque l'inverse de  $\mathcal{N}_{p,s}$  est mesurable, on peut opter pour une formulation plus directe du type  $\nu(\mathcal{N}_{p,s}(F)) \geq s^N \nu(F)$  qui met très clairement en évidence que  $\mathbb{R}^N$  vérifie  $MCP(0, N)$  (dans ce cas on a égalité). Cette formulation est en particulier possible sur  $\mathbb{H}^1$  car  $\mathcal{M}_p^s$  est un homéomorphisme de  $\{(z_q, t_q) \in \mathbb{H}^1 \mid z_q \neq z_p\}$  sur son image et car  $p\mathbb{L}$ , l'ensemble complémentaire est de mesure nulle. Dans le groupe de Heisenberg, on peut également tirer parti de la dérivabilité de la contraction et du bon accord de la structure différentielle avec la mesure de référence de l'espace métrique mesuré. Il est en effet suffisant de vérifier une minoration du Jacobien de  $\mathcal{M}_p^s$  : pour presque tout couple de points  $(p, q)$  et pour tout  $s \in [0, 1]$  on souhaite avoir

$$\text{Jac}(\mathcal{M}_p^s)(q) \geq s^N.$$

Enfin l'invariance de la mesure et des distances par translation à gauche permet une dernière simplification de l'énoncé. Pour montrer  $MCP(0, 5)$  dans  $\mathbb{H}^1$ , il suffit de prouver la dernière inégalité pour  $p = 0_{\mathbb{H}^1}$  et  $N = 5$  ce que nous allons faire maintenant. On connaît sur  $\mathbb{H}^1 \setminus \mathbb{L}$  une expression intéressante de  $\mathcal{M}_s^{0_{\mathbb{H}^1}}$  à savoir  $\Gamma_s \circ \Gamma^{-1}$ . Le déterminant jacobien de la contraction de rapport  $s$  au point  $\Gamma(\chi, \varphi)$  est ainsi

$$\left( \frac{\text{Jac}(\Gamma_s)}{\text{Jac}(\Gamma)} \right) (\chi, \varphi)$$

et c'est cette quantité que l'on voudrait être supérieure à  $s^5$  pour tout  $s$  et tout point de coordonnée sphérique  $(\chi, \varphi) \in \mathbb{D}$ . De façon équivalente on voudrait montrer que  $\text{Jac}(\Gamma_s)^{1/5}$  est supérieure à la fonction affine  $s \text{Jac}(\Gamma)^{1/5}$ . Puisque les deux fonctions sont égales en 0 et en 1 il est suffisant de prouver que

$$\text{Jac}(\Gamma_s)^{1/5}(\chi, \varphi) = 2^4 s |\chi|^2 \left( \frac{\sin \frac{s\varphi}{2}}{\varphi} \right) \frac{\sin \frac{s\varphi}{2} - \frac{s\varphi}{2} \cos \frac{s\varphi}{2}}{\varphi^3}$$

est concave en  $s$  et ce bien sûr pour tout  $(\chi, \varphi) \in \mathbb{D}$ . Du fait que  $\varphi$  décrit  $] - 2\pi, 2\pi[$  et de par la symétrie de la fonction en  $\varphi$ , la démonstration se réduit à montrer que

$$F(x) = x \sin(x)(\sin(x) - x \cos(x))$$

est 1/5-concave sur  $[0, \pi]$ .

On sait que pour des fonctions suffisamment dérivables, être 1/5-concave équivaut à ce que  $F''F - F'^2 + \frac{F'^2}{5} \leq 0$  tandis que la log-concavité (concavité du logarithme de la fonction) équivaut seulement à  $F''F - F'^2 \leq 0$ . Or cette log-concavité est aussi une simple conséquence des log-concavités de  $a(x) = x$ , de  $b = \sin$  et de  $c(x) = \sin(x) - x \cos(x)$  sur  $[0, \pi]$  car  $\ln(abc) = \ln(a) + \ln(b) + \ln(c)$ . Cela nous incite à écrire  $F''F - F'^2 + \frac{F'^2}{5}$  sous la forme :

$$\left[ (a''a - a'^2)b^2c^2 + a^2(b''b - b'^2)c^2 + a^2b^2(c''c - c'^2) \right] + \frac{F'^2}{5}.$$

où on a remplacé

$$F''F - F'^2$$

par l'expression entre crochets ce qui permet une deuxième fois de déduire la log-concavité de  $F$  à partir de celle de ces facteurs. On est donc réduit à montrer que dans l'expression

$$\frac{F'^2}{5} - \left[ (bc)^2 + (ac)^2 + (x^2 - \sin^2(x))(ab)^2 \right],$$

le terme positif  $\frac{F'^2}{5}$  ne parvient pas à compenser le terme relatif à la log-concavité de  $F$ . On obtient après une étude approfondie des deux termes

de signes opposés la négativité recherchée (voir [7]). Plus aisément, on peut vérifier par un développement limité en  $s = 0$  que l'exposant 5 est la plus petite puissance pour laquelle on peut obtenir la négativité de l'expression.

## 2. Transport optimal de mesure dans $\mathbb{H}^1$

### 2.1. Généralités et définitions

Le transport optimal de masse connaît un regain d'intérêt depuis une vingtaine d'année car son utilisation a débouché sur des applications dans divers domaines mathématiques. Dans cette sous-section nous allons voir l'emploi qui en est fait en géométrie depuis les travaux de Lott et Villani [8, 9] ainsi que de Sturm [11, 12]. Ces auteurs ont réussi à définir pour les espaces métriques mesurés une propriété qui prolonge de façon convaincante celle d'avoir une courbure de Ricci uniformément bornée inférieurement, propriété qui elle n'a de sens que pour les variétés riemanniennes. Il s'agit de la courbure-dimension que l'on note  $CD(K, N)$  où  $K \in \mathbb{R}$  est la courbure et  $N \geq 1$  est un paramètre-dimension. Nous allons répéter les arguments de [7] où il est montré que le triplet  $(\mathbb{H}^1, d_{cc}, \mathcal{L})$  ne vérifie aucun  $CD(K, N)$  quels que soient les paramètres  $K$  et  $N$ . La partie principale du travail qui consiste à montrer  $CD(0, N)$  n'est vraie pour aucun  $N$  est obtenue par la négation d'une inégalité de Brunn-Minkowski généralisée (voir partie 3 et [7]). Cependant nous allons tout d'abord définir correctement le transport de masse et évoquer sa réalisation dans le groupe de Heisenberg. Les résultats connus à ce sujet sont dus à Ambrosio et Rigot [1] et ont été récemment complétés par Figalli et l'auteur de cette note dans [5].

Le point de départ habituel pour expliquer le transport optimal est le problème de Monge-Kantorovich. Il s'agit, s'étant donné un espace métrique  $(X, d)$  et deux mesures de probabilité boréliennes  $\mu_0$  et  $\mu_1$  sur  $X$ , de considérer le problème d'optimisation :

$$(2.1) \quad \inf_{\pi} \int_{X \times X} d^2(p, q) d\pi(p, q).$$

L'infimum est pris sur les mesures  $\pi$  de  $X \times X$  qui sont des couplages de  $\mu_0$  et  $\mu_1$ , c'est à dire dont les marginales (les projections sur  $X$ ) sont  $\mu_0$  et  $\mu_1$ . La fonction coût  $d^2(p, q)$  est celle qui apparaît le plus souvent dans l'intégrale lorsque il s'agit de géométrie; elle peut prendre d'autres valeurs  $c(p, q)$  dans le cas de la théorie générale. La racine carré de (2.1) est appelée distance de Wasserstein; on la notera  $d_W(\mu_0, \mu_1)$ . Le nom de

distance est justifié lorsqu'on se restreint à l'espace  $W_2(X)$  dit de Wasserstein, constitué des mesures de probabilité dont le second moment est fini ( $\int_X d^2(o, p) d\mu(p) < +\infty$  pour un  $o \in X$  ou de façon équivalente pour tout  $o$ ) : en effet si les deux mesures sont dans cet espace,  $d_W(\mu_0, \mu_1)$  sera nécessairement finie. Il s'avère par ailleurs que lorsque l'espace  $(X, d)$  est géodésique, il en va de même de  $(W_2(X), d_W)$ . Nous allons décrire maintenant plus en détail comment cela se réalise dans  $\mathbb{H}^1$  en commençant par un théorème d'Ambrosio et Rigot (voir [1] et aussi [5]). Ce résultat fait intervenir la différentiabilité approximative dont on peut trouver une description dans [2]. Il n'est cependant pas nécessaire pour la suite de comprendre cette notion en détail. On pourra se contenter de savoir qu'il s'agit d'une extension de la différentiabilité ordinaire.

PROPOSITION 2.1. — *Soit  $\mu_0, \mu_1 \in W_2(\mathbb{H}^1)$ . On suppose par ailleurs que ces deux mesures sont absolument continues par rapport à  $\mathcal{L}$ . Alors il existe un unique couplage optimal  $\pi$  entre  $\mu_0$  et  $\mu_1$  et ce couplage est induit par une application de transport  $T$ , i.e.  $\pi = (\text{Id} \otimes T)_\# \mu_0$ . Si  $\mu_0$  est à support compact, on sait de plus qu'il existe une fonction  $\psi$  différentiable en  $\mu_0$ -presque tout point  $p$  telle que*

$$T(p) := p \cdot \Gamma(\mathbf{X}\psi(p) + \mathbf{iY}\psi(p), \mathbf{T}\psi(p)).$$

Même si  $\mu_0$  n'est pas à support compact, il existe  $\psi$  approximativement différentiable en  $\mu_0$ -presque tout point telle que

$$T(p) := p \cdot \Gamma(\tilde{\mathbf{X}}\psi(p) + \mathbf{i}\tilde{\mathbf{Y}}\psi(p), \tilde{\mathbf{T}}\psi(p)).$$

À partir de là on peut construire une courbe de mesures qui soit géodésique dans  $W_2(\mathbb{H}^1)$ . Illustrons cela par une image : on peut comparer les mesures  $\mu_0$  et  $\mu_1$  à deux nids de fourmis (vivant dans le groupe de Heisenberg!) pour lesquels la densité en fourmi représenterait la densité des mesures et où les fourmis sont indistinctes. Le plan de transport  $\pi$  correspond à la façon optimale pour les fourmis de passer d'une configuration à une autre : il minimise la somme des carrés des distances parcourues par les insectes. Comme on l'a dit dans la proposition précédente, ce plan est unique ce qui signifie que le nid n'a qu'un seul choix de déplacement global ; chaque fourmi de  $\mu_0$  sait exactement où elle doit se rendre au temps 1. Entre les temps 0 et 1 chaque insecte se rend à vitesse constante de son point de départ à son point d'arrivée. Si on arrête le mouvement à l'instant  $s \in [0, 1]$ , on peut observer une nouvelle configuration  $\mu_s$ . En terme mathématique nous sommes en train de parler de  $T_{s\#}\mu_0$  où

$$T_s(p) := x \cdot \Gamma_s(\tilde{\mathbf{X}}\psi(p) + \mathbf{i}\tilde{\mathbf{Y}}\psi(p), \tilde{\mathbf{T}}\psi(p)).$$

On vient de mettre en évidence des plans de transport entre  $\mu_0$  et  $\mu_s$  d'une part, entre  $\mu_s$  et  $\mu_1$  d'autre part : on prend ceux induits par la trajectoire des fourmis. Le premier engendre un coût de  $s^2 d_W^2(\mu_0, \mu_1)$  et le second de  $(1-s)^2 d_W^2(\mu_0, \mu_1)$ . Du fait de l'inégalité triangulaire  $d_W(\mu_0, \mu_1) \leq d_W(\mu_0, \mu_s) + d_W(\mu_s, \mu_1)$ , on en déduit que les deux transports signalés sont optimaux et que la courbe  $(\mu_s)_{s \in [0,1]}$  est géodésique dans l'espace de Wasserstein  $W_2(\mathbb{H}^1)$ .

En adaptant [1, Lemme 4.7] on peut voir que pour  $\mu_0$ -presque tout point la courbe  $\gamma_{\tilde{\mathbf{X}}\varphi(p)+i\tilde{\mathbf{Y}}\varphi(p), \tilde{\mathbf{T}}\varphi(p)}^p$  qui relie  $p$  à  $T(p)$  est l'unique géodésique possible entre ces deux points. Ainsi, les fourmis qui comme on l'a dit ont un but défini de façon unique, ne peuvent-elles emprunter qu'un seul chemin chacune. À l'échelle globale, cela signifie que entre les deux mesures la géodésique est unique dans l'espace de Wasserstein. Cette unicité est a priori une propriété fautive si on part d'une mesure  $\mu_0$  qui n'est pas absolument continue. On peut s'en convaincre en considérant le transport entre deux mesures concentrées sur  $\mathbb{L}$ . Entre deux points distincts de  $\mathbb{L}$ , il y a en effet une infinité de géodésiques et cela se répercute à l'échelle des mesures.

*Remarque 2.2.* — On sait depuis [5] que les mesures  $\mu_s$  pour  $s < 1$  sont elles-même absolument continue ce qui fait du sous-espace  $W_2^{ac}(\mathbb{H}^1) \subset W_2(\mathbb{H}^1)$  des mesures absolument continues un espace totalement géodésique. Cette question concernant l'absolue continuité avait été posée dans [1]. Comme on verra dans la sous-partie 2.2, on ne pouvait pas y répondre en utilisant la technique utilisée sur les variété riemanniennes où là aussi les mesures interpolées par le transport sont absolument continues.

Expliquons maintenant ce qu'on entend par la propriété  $CD(0, N)$ . Pour une variété riemannienne de dimension  $N$  équipée de son volume riemannien, cette propriété est équivalente au fait que la courbure de Ricci est positive en tout point. Pour la définition on prend un espace métrique mesuré  $(X, d, \nu)$ , on considère de nouveau le transport entre mesures absolument continues et on analyse la façon dont l'entropie de Rényi de ces mesures évolue au cours du temps. Cette entropie est une fonctionnelle définie par

$$S_N(\mu \mid \nu) = \begin{cases} - \int_X \rho^{1-1/N} d\nu & \text{si } d\mu = \rho d\nu \\ +\infty & \text{si } \mu \text{ n'est pas absolument continue.} \end{cases}$$

L'entropie est une façon de mesurer la répartition de la mesure : une mesure  $\mu_s$  qui est répartie de façon plutôt uniforme par rapport à  $\nu$  a une entropie petite tandis que une mesure très concentrée autour de certains points a une grande entropie. Un calcul simple illustre et quantifie cela : pour un

ensemble de  $\nu$ -mesure  $V$ , la mesure uniformément répartie sur cet ensemble a une entropie qui vaut  $-V^{1/N}$ . La définition de la courbure dimension s'exprime alors ainsi :

DÉFINITION 2.3. — *L'espace métrique  $(X, d, \nu)$  vérifie  $CD(0, N)$  si pour tout couple  $(\mu_0, \mu_1)$  de mesures absolument continues, il existe une géodésique  $(\mu_s)_{s \in [0,1]}$  de  $W_2^{ac}$ , paramétrée à vitesse constante, telle que pour tout  $s$ ,*

$$S_N(\mu_s \mid \nu) \leq (1 - s)S_N(\mu_0 \mid \nu) + sS_N(\mu_1 \mid \nu).$$

En terme de fourmis se déplaçant dans un espace avec courbure-dimension  $CD(0, N)$ , on s'attend à ce qu'au cours du trajet la fourmière se répartisse de façon plus uniforme et plus large qu'elle ne l'est dans ses positions initiales et finales. Les fourmis s'éloignent les unes des autres pour que relativement à cet éloignement certaines se regroupent de nouveau à la fin, peut-être à différents endroits.

Comme nous l'annonçons depuis tout à l'heure, ce comportement n'est pas celui qui a cours dans le groupe de Heisenberg. Nous en ferons la preuve dans la partie 3.

Remarque 2.4. — Dans le cas de  $\mathbb{H}^1$  où il y a unicité de la géodésique dans  $W_2^{ac}(\mathbb{H}^1)$ , on voit assez vite que  $CD(0, N)$  est équivalente à la convexité de la fonctionnelle entropie le long des géodésiques. Contrairement à ce qui semble, la condition  $CD(0, N)$  est plus faible dans le cas général. Prenons l'exemple des mesures interpolées au temps  $1/2$  par  $\mu_{1/4}$  et  $\mu_{3/4}$  : pour le transport apparent, il s'agit de  $\mu_{1/2}$  mais ce qu'impose  $CD(0, N)$  est que *il existe* une géodésique (non nécessairement celle qu'on connaît) avec les bonnes interpolations sur l'entropie.

## 2.2. Absolue continuité au cours du transport

Le principe de raccourcissement de Monge-Ampère est décrit de façon détaillée dans le livre de Cédric Villani [13, Chapitre 8]. On utilise ce principe pour montrer une inégalité sur un transport de mesure  $(T_s \# \mu_0)_{s \in [0,1]}$ . De cette inégalité de raccourcissement et sous l'hypothèse que  $\mu_0$  est absolument continue par rapport à la mesure de Hausdorff de l'espace, on peut conclure à l'absolue continuité des mesures intermédiaires. On part du constat suivant : pour  $\mu_0 \otimes \mu_0$ -presque tout couple de point  $(a, b)$ , les courbes  $T_s(a)$  et  $T_s(b)$  ne peuvent pas se rencontrer à un temps  $s < 1$  fixé. Si cela arrivait on pourrait raccourcir le transport en « mélangeant » les

courbes : la fin de chacune des courbes (pour les temps supérieurs à  $s$ ) serait remplacée par celle de l'autre courbe. Une version quantitative de cette injectivité du transport, du type

$$(2.2) \quad d(T_s(a), T_s(b)) \geq Cd(a, b)$$

permettrait de déduire

$$(2.3) \quad \mathcal{H}_d^n(T_s(E)) \geq C^n \mathcal{H}_d^n(E)$$

où  $\mathcal{H}_d^n$  désigne la mesure de Hausdorff  $n$ -dimensionnelle pour la distance  $d$ .

À partir de là, si on suppose qu'un ensemble  $F$  a une mesure de Hausdorff nulle, celle de  $T_s^{-1}(F)$  est tout autant nulle car  $F = T_s(T_s^{-1}(F))$ . Par absolue continuité de  $\mu_0$  par rapport à  $\mathcal{H}_d^n$ , on déduit  $\mu_0(T_s^{-1}(F)) = 0$ . L'application  $T_s$  étant une application de transport de  $\mu_0$  sur  $\mu_s$ , il s'en suit finalement  $\mu_s(F) = 0$ . En considérant désormais les bouts de cette chaîne logique on reconnaît que  $\mu_s$  est absolument continue par rapport à  $\mathcal{H}_d^n$ .

Dans le groupe de Heisenberg cette argumentation basée sur l'inégalité lipschitzienne (2.2) répondrait positivement à la question d'Ambrosio et Rigot : on pourrait déduire que  $\mu_s$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue car celle-ci est à une constante près égale à la mesure de Hausdorff 4-dimensionnelle de  $(\mathbb{H}^1, d_{cc})$ . En fait contrairement à ce qui se passe dans le cas riemannien, il est montré dans [5] que l'inégalité (2.2) est tout à fait fautive pour le groupe de Heisenberg : un transport optimal aussi simple que la multiplication à droite par le vecteur  $(1, 0, 0)$  suffit à nier la majoration (2.2).

Il faut donc trouver autre chose pour  $\mathbb{H}^1$ . La démonstration de [5] reprend le schéma précédent au niveau de l'inégalité (2.3) qu'elle démontre à cela près que  $C$  est remplacée par la constante  $(1-s)^5$ . On obtient cette majoration grâce à la souplesse du transport de mesure qui permet un passage à la limite opportun. On envisage en fait la mesure  $\mu_1$  comme la limite faible d'une suite de mesures discrètes  $\mu_1^k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \delta_{y_i}$ . Pour chacun des transports optimaux  $(T_s^k \# \mu_0)_{s \in [0,1]}$  de  $\mu_0$  à  $\mu_1^k$  on peut montrer comme nous allons le voir l'inégalité

$$(2.4) \quad \mathcal{L}(T_s^k(E)) \geq (1-s)^5 \mathcal{L}(E),$$

comme une conséquence de  $MCP(0, 5)$  et de l'injectivité du transport  $T_s^k$ . En travaillant autour de certaines propositions sur le transport, la minoration de  $\mathcal{L}(T_s^k(E))$  dans (2.4) passe à la limite et on peut ainsi remplacer  $T_s^k$  par  $T_s$  et avoir (2.3). Comme on l'a expliqué auparavant, cela suffit pour montrer l'absolue continuité des mesures pour  $s < 1$ . Nous rapportons le

lecteur intéressé à la lecture des théorèmes de ([13, Chapitre 7 et Corollaire 5.23]) pour la justification de ce passage à la limite.

Revenons cependant à l'inégalité (2.4) et voyons son rapport avec *MCP*. C'est pour  $k = 1$  que le lien est le plus apparent : on considère le transport de  $\mu_0$  sur la mesure  $\mu_1^1 = \delta_{y_1}$ . Il n'y a qu'un seul plan de transport possible et celui-ci est nécessairement optimal ; on transporte chaque élément de volume sur  $y_1$  et cela se fait  $\mu_0$ -presque sûrement le long de la  $\mu_0$ -presque sûrement unique géodésique qui mène à  $y_1$ . De fait on a donc presque sûrement

$$T_s^1(q) = \mathcal{M}_{y_1}^{1-s}(q)$$

et l'estimation sur les volumes résulte de *MCP*(0, 5).

Pour  $k > 1$ , on peut démontrer (2.4) en utilisant seulement en plus l'injectivité du transport. On commence par écrire  $E$  comme la réunion disjointes d'ensembles  $(E_j)_{j=1}^k$  sur lesquels l'application  $T_s^k$  est la contraction  $\mathcal{M}_{y_j}^s$ . Alors on doit comparer la mesure de la réunion des  $\mathcal{M}_{y_j}^s(E_j)$  à  $\mathcal{L}(E) = \sum \mathcal{L}(E_j)$ . Puisque *MCP* fournit pour chaque  $E_j$  une inégalité du type (2.4), il suffit de souligner que l'on peut sommer ces inégalités. Le transport étant injectif, les  $T_k^s(E_j) = \mathcal{M}_{y_j}^s(E_j)$  sont en effet disjoints et on a la majoration désirée.

### 3. Courbure-dimension dans $\mathbb{H}^1$ : espoirs et déception

Comme nous l'avons expliqué dans l'introduction, les propriétés *CD* et *MCP* prolongent les bornes sur la courbure de Ricci en ce sens qu'elles sont équivalentes avec les propriétés de courbure de Ricci uniformément minorée dans le cas où l'espace considéré est une variété riemannienne de dimension  $N$ , équipée du volume riemannien. Cela ne serait pas suffisant si c'était la seule chose : pourquoi sinon, ne pas proclamer qu'un espace métrique qui n'est pas une variété ne vérifie pas de borne de Ricci synthétique ? Lott, Sturm et Villani ont démontré bien plus que l'équivalence, à commencer par des théorèmes qui sont usuellement obtenus pour les mêmes hypothèses de courbure sur les variétés riemannienne : théorème de Bishop-Gromov, théorème de Bonnet-Myers mais aussi inégalité de Poincaré locale (sous l'hypothèse d'unicité presque certaine des géodésiques entre deux points) en particulier. Un autre point fort de la théorie est la compatibilité avec les distances entre espaces métriques mesurés. En particulier pour la distance décrite par Sturm [11], une distance mélangeant les idées de la distance de Gromov-Hausdorff et celles du transport de masse, une suite convergente



de variétés riemanniennes vérifiant uniformément  $CD(K, N)$  et dont le diamètre est majoré, aura pour limite un triplet  $(X, d, \nu)$  qui satisfera le même  $CD(K, N)$  et la même borne sur le diamètre. Pour plus de renseignement sur les propriétés de  $CD$  et  $MCP$ , on pourra se reporter aux articles fondateurs de la théorie [8, 9, 11, 12] ou au livre formidablement détaillé de Villani [13].

Nous allons maintenant comparer les propriétés  $MCP(0, 5)$  et  $CD(0, 5)$ . Tout d'abord, sous la condition supplémentaire de presque sure existence et unicité d'une géodésique entre deux points,  $MCP(K, N)$  est toujours une conséquence de  $CD(K, N)$ . Nous allons réciproquement voir pourquoi il est raisonnable de penser qu'un espace vérifiant  $MCP(0, 5)$  puisse aussi satisfaire  $CD(0, 5)$ . Si on reprend la définition 2.3, on voit qu'avec  $CD$ , il s'agit de la convexité de l'entropie  $S_5$  le long des géodésiques de  $W_2(\mathbb{H}^1)$ . Le fait est que dans  $\mathbb{H}^1$ , des familles importantes de transports de mesure s'effectue avec la convexité de cette entropie : la première est celle des transports par contraction. Pour la convexité de l'entropie, on exploite une propriété de contraction de mesure renforcée. La seconde famille de transport est celle des transports de mesure qui sont les relevés horizontaux du transport optimaux du plan  $\mathbb{R}^2$ .

Nous sommes tout d'abord à même de prouver la convexité de l'entropie, pour ces géodésiques particulières qui se terminent par une mesure de Dirac  $\delta_y$  et que nous avons déjà rencontrées dans la partie 2.2. L'argument décisif ne sera par proprement  $MCP$  mais la  $1/5$  concavité du jacobien de la contraction sur  $y$ , une propriété plus forte qui nous a permis de démontrer  $MCP$ . Reprenons donc les notations précédentes :  $(\mu_s)_{s \in [0, 1]}$  est une géodésique d'extrémité  $\mu_1^1 = \delta_{y_1}$ . Toutes les mesures sont absolument continues sauf  $\delta_{y_1}$  dont l'entropie est infinie. On calcule donc l'entropie pour  $s < 1$

$$\begin{aligned} S_5(\rho_s \mid \mathcal{L}) &= - \int_{\mathcal{M}_s^y(\mathbb{H}^1)} \rho_s^{1-1/5}(y) dy \\ &= - \int_{\mathbb{H}^1} (\rho_s \circ T_s)^{1-1/5}(x) \text{Jac}(T_s)(x) dx \\ &= - \int (\rho_s \circ T_s \text{Jac}(T_s))^{1-1/5} \text{Jac}(T_s)^{1/5} \\ &= - \int \rho_0^{1-1/5} (\text{Jac}(T_s))^{1/5}. \end{aligned}$$

Avant de conclure, justifions ces égalités. On obtient la deuxième ligne de la première par un changement de variable possible du fait que  $T_s$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{H}^1 \setminus q\mathbb{L}$ . On passe ensuite à la troisième ligne par une manipulation

algébrique et on conclut grâce à l'identité  $\rho_0 = \rho_s(T_s(x)) \text{Jac}(T_s)$  qui dérive de la relation de mesure image  $\mu_s = T_{s\#}\mu_0$ . À partir de cette expression de  $\rho_s$  et de la concavité de  $\text{Jac}(T_s)^{1/5}$  que l'on connaît depuis la partie 1.3, on voit donc que l'entropie de Rényi de dimension 5 est convexe le long des géodésiques "de contraction".

Rien ne s'oppose à faire la même démonstration pour les mesures discrètes  $\mu_1^k$  de tout à l'heure ce qui laisse envisager qu'on puisse de nouveau passer l'inégalité à la limite et conclure à la propriété  $CD(0, 5)$ . Mais cette fois-là la démonstration ne peut pas se faire faute de passage à la limite valide. Nous allons d'ailleurs montrer au théorème 3.1 qu'aucune relation  $CD(0, N)$  ne se vérifie dans  $\mathbb{H}^1$ .

La deuxième classe de transports optimaux d'entropie convexe ne repose pas sur les propriétés du type  $MCP$  mais sur l'essence particulière de  $\mathbb{H}^1$ . Le théorème de Ambrosio et Rigot contient en fait une seconde partie que nous n'avons pas citée dans la proposition 2.1. On y apprend quelles sont les fonctions  $\psi$  qui donnent lieu à un transport optimal. On peut en particulier montrer que les fonctions  $\psi(z, t) = \theta(z)$  pour lesquelles  $\theta(z) + \frac{|z|^2}{2}$  est convexe sur  $\mathbb{C}$  sont de celles-là. Or dans le transport de mesure sur les espaces euclidiens, le transport de Brenier [4], ce sont précisément de telles fonctions  $\theta$  qui indiquent les transports optimaux : les applications de transport sont alors en effet de la forme  $T(z) = z + \nabla\theta(z)$ . Par ailleurs la courbure de Ricci de  $\mathbb{R}^d$  étant 0, l'espace euclidien vérifie  $CD(0, N)$  pour  $N \geq d$  et donc l'entropie est convexe le long du transport optimal.

Ainsi donc en notant  $Z : (z, t) \rightarrow z$  la projection sur  $\mathbb{C}$ , les transports optimaux  $(\mu_s)_{s \in [0,1]}$  de  $\mathbb{H}^1$  hérités des fonctions  $\psi(z, t)$  dont on vient de donner la forme, se projettent en des transports optimaux  $(Z_{\#}\mu_s)_{s \in [0,1]}$  de  $\mathbb{R}^2$  dont l'application de transport est donnée par  $\theta$ . On a même plus car la convexité de l'entropie  $S_N$  quand  $N \geq 2$  pour ces transports de  $\mathbb{H}^1$  est héritée de celle qu'on sait vérifiée pour des transport de mesure donnés par l'application  $T(z) = z + \nabla\theta(z)$ . Ainsi pour la classe de transport optimaux présenté ici, on a la convexité de l'entropie 2-dimensionnelle ce qui est beaucoup mieux que ce que nous laisse espérer  $MCP(0, 5)$ .

Cependant bien que large, les deux familles de transports présentée ici sont loin de constituer l'ensemble des transports optimaux de  $\mathbb{H}^1$ . Dans le théorème suivant, nous présentons un transport particulier pour lequel l'entropie n'est pas convexe quelle que soit sa dimension  $N$ .

**THÉORÈME 3.1.** — *Quelle que soit la dimension  $N$ , la propriété  $CD(0, N)$  est fautive dans le groupe de Heisenberg.*

Fixons  $N \geq 1$ . Nous allons donc considérer un transport de mesure pour lequel l'entropie  $S_N$  n'est pas convexe. Cet exemple ne dépendra en fait même pas de la dimension  $N$ . Soit  $r > 0$  un paramètre réel qui a vocation à être petit. on considère  $B_r$  la boule euclidienne (de  $\mathbb{R}^3$ ) centrée en  $(1, 0, 0)$  et  $I_r := \mathcal{I}(B_r)$  son conjugué géodésique. Les deux ensembles ont un même volume  $V_r = \frac{4}{3}\pi r^3$  car les paramètres sphériques de  $\mathbb{D}$  qui décrivent ces ensembles sont opposés et car  $\text{Jac}(\Gamma)(-\chi, -\varphi) = \text{Jac}(\Gamma)(\chi, \varphi)$ . Les mesures que nous nous proposons de transporter l'une sur l'autre sont simplement les mesures uniformément distribuées sur ces ensembles :

$$\mu_0 = \mathbf{1}_{B_r}/V_r \quad , \quad \mu_1 = \mathbf{1}_{I_r}/V_r.$$

Les entropies de  $\mu_0$  et  $\mu_1$  sont égales et valent  $-(V_r)^{1/N}$ . Nous allons montrer que  $S_N(\mu_{1/2}) > -(V_r)^{1/n}$  pour  $r$  suffisamment petit, ce qui suffira à nier la convexité de la fonctionnelle  $S_N$ . De part la structure du transport de mesure,  $\mu_{1/2}$  se concentre sur  $M_r = \mathcal{M}^{1/2}(B_r, I_r)$ , l'ensemble des milieux des géodésiques reliant les points de  $B_r$  à ceux de son conjugué géodésique :

$$M_r = \{\mathcal{M}(p, \mathcal{I}(q)) \mid (p, q) \in (B_r)^2\}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} S_N(\mu_{1/2}) &= - \int_{M_r} \rho_{1/2}^{1-1/N} \\ &= \mathcal{L}(M_r) \int_{M_r} -\rho_{1/2}^{1-1/N}(x) \frac{dx}{\mathcal{L}(M_r)} \\ &\geq \mathcal{L}(M_r) \left( - \left( \int_{M_r} \rho_{1/2}(x) \frac{dx}{\mathcal{L}(M_r)} \right)^{1-1/N} \right) \\ &\geq -(\mathcal{L}(M_r))^{1/N}. \end{aligned}$$

Ce calcul basé sur l'inégalité de Jensen nous apprend qu'entre les différentes mesures de probabilité concentrées sur un ensemble, celle dont l'entropie est la plus faible est la mesure uniforme. Cela est en accord avec notre présentation utilisant les fourmis : plus le nid est bien réparti et plus les fourmis prennent de la place, plus l'entropie est basse.

Il suffit donc pour terminer la preuve de montrer que  $\mathcal{L}(M_r) < V_r$ .

Essayons de comprendre ce qu'est l'ensemble  $M_r$ . C'est la superposition (mathématiquement parlant la réunion) des ensembles  $\mathcal{M}_{1/2}(\mathcal{I}(p), B_r)$  lorsque  $p$  décrit  $B_r$ . Cette réunion est loin d'être disjointe et c'est aussi pourquoi l'ensemble  $M_r$  est relativement petit. En fait  $0_{\mathbb{H}}$  est contenu dans chacun des  $\mathcal{M}^{1/2}(\mathcal{I}(p), B_r)$  en temps que milieu de  $p$  et  $\mathcal{I}(p)$ . Avec un peu

de calcul différentiel (voir [7]), on a plus précisément

$$(3.1) \quad \mathcal{M}^{1/2}(\mathcal{I}(p), B_r) \subset D\mathcal{M}_{\mathcal{I}(p)}^{1/2}(p) \cdot (B_r - p) + B(0_{\mathbb{H}}, o(r)).$$

Ici les opérations  $+$  et  $-$  sont prises au sens de  $\mathbb{R}^3$  et  $B(0, o(r))$  est une boule euclidienne centrée en  $0_{\mathbb{H}}$  dont le rayon est négligeable devant  $r$ . Cette inclusion est en fait également vraie lorsqu'on remplace uniformément  $D\mathcal{M}_{\mathcal{I}(p)}^{1/2}(p)$  par  $D\mathcal{M}_{(-1,0,0)}^{1/2}(1, 0, 0)$  qui lui est proche et correspond à  $p = (1, 0, 0)$ , le centre de la boule  $B_r$ . Le  $o(r)$  dans (3.1) est certes remplacé par une fonction plus grande, mais cette grandeur est encore négligeable par rapport à  $r$ , uniformément en  $p$ . On peut désormais faire la réunion de ces relations ensemblistes et obtenir

$$M_r \subset D\mathcal{M}_{(-1,0,0)}^{1/2}(1, 0, 0) \cdot (B_r - B_r) + B(0, o(r)).$$

L'ensemble  $B_r - B_r$  n'est rien d'autre que la boule euclidienne de rayon  $2r$  et son volume est tout simplement  $8V_r$ . On prend l'image de cet ensemble par une application affine de déterminant  $1/2^5$  comme c'est le cas ici (voir la proposition 1.4 et la sous-section 1.3) et on obtient un ellipsoïde de volume  $V_r/4$ . L'ensemble qui nous intéresse et qui contient  $M_r$  est le  $o(r)$ -voisinage tubulaire de cet ellipsoïde. Son volume équivaut ainsi à  $V_r/4$ . On conclut alors au fait que  $\mathcal{L}(M_r) < V_r$  pour  $r$  suffisamment petit ce qui, comme on l'a déjà souligné, suffit à la démonstration.

## BIBLIOGRAPHIE

1. L. Ambrosio and S. Rigot, *Optimal mass transportation in the Heisenberg group*, J. Funct. Anal. **208** (2004), no. 2, 261–301.
2. Luigi Ambrosio, Nicola Gigli, and Giuseppe Savaré, *Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures*, Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005.
3. D. Bakry and M. Émery, *Diffusions hypercontractives*, Séminaire de probabilités, XIX, 1983/84, Lecture Notes in Math., vol. 1123, Springer, Berlin, 1985, pp. 177–206.
4. Yann Brenier, *Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions*, Comm. Pure Appl. Math. **44** (1991), no. 4, 375–417.
5. A. Figalli and N. Juillet, *Absolute continuity of Wasserstein geodesics in the Heisenberg group*, accepted in J. Funct. Anal. (2007).
6. J. Heinonen, *Lectures on analysis on metric spaces*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2001.
7. N. Juillet, *Ricci curvature bounds and geometric inequalities in the Heisenberg group*, preprint SFB611 Bonn, 2006.
8. J. Lott and C. Villani, *Ricci curvature for metric-measure spaces via optimal transport*, Annals of Math., to appear.
9. ———, *Weak curvature conditions and functional inequalities*, J. Funct. Anal. **245** (2007), no. 1, 311–333.

10. Shin-ichi Ohta, *On the measure contraction property of metric measure spaces*, Comment. Math. Helv. **82** (2007), no. 4, 805–828.
11. K.-T. Sturm, *On the geometry of metric measure spaces. I*, Acta Math. **196** (2006), no. 1, 65–131.
12. ———, *On the geometry of metric measure spaces. II*, Acta Math. **196** (2006), no. 1, 133–177.
13. C. Villani, *Optimal transport, old and new*, St-Flour Summer School Lecture Notes 2005 to appear in Lecture Notes in Math.

Nicolas JUILLET  
Université Grenoble 1  
Institut Fourier — UMR CNRS-UJF 5582  
BP 74  
38402-Saint Martin d'Hères cedex (France)  
et  
Universität Bonn  
Institut für Angewandte Mathematik  
Poppelsdorfer Allee 82  
53115 Bonn (Germany)