Institut Fourier — Université de Grenoble I

Actes du séminaire de

Théorie spectrale et géométrie

Graham SMITH

Problèmes de plateau equivariants

Volume 24 (2005-2006), p. 67-78.

<http://tsg.cedram.org/item?id=TSG_2005-2006__24__67_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
Grenoble
TSG n° 24 (2007), p. 67 – 78

PROBLÈMES DE PLATEAU EQUIVARIANTS

par Graham Smith

MOTIVATIONS

> Je vais vous présenter les résultats de mon article récent, « Equivariant Plateau problems » que vous pouvez trouver sur l'ArXiV sous la référence **math.DG/0602271**.

On cherche des conditions pour l'existence des réalisations géométriques de certains objets algébriques. Plus explicitement :
– soit Σ une surface compacte de genre au moins 2 ;
– soit M une variété compacte à courbure sectionelle strictement négative ;
– soit $\theta : \pi_1(\Sigma) \to \pi_1(M)$ un homomorphisme.

`Qn` : Étant donné des conditions de courbure préscrites (par exemple minimalité, courbure moyenne constante, courbure gaussienne constante, convexité...), quand existe-t-il une immersion $i : \Sigma \to M$ satisfaisant à ces conditions de courbure et qui réalise θ. C'est-à-dire, telle que :

$$i_\star = \theta.$$

Une breve étude de ce problème révèle un lien avec la théorie des structures complexe projectives : soient $\tilde{\Sigma}$ et $\tilde{M}$ les revêtements universels respectivement de Σ et de M.

Le problème devient alors :
`Qn` : Quand existe-t-il une immersion $i : \tilde{\Sigma} \to \tilde{M}$ satisfaisant à ces conditions de courbure telle que i soit equivariante sous l'action de θ :

$$\forall \gamma \in \pi_1(\Sigma), \qquad i \circ \gamma = \theta(\gamma) \circ i.$$

$\tilde{M}$ est une variété d'Hadamard. Soit $\partial_\infty \tilde{M} \cong S^2$ son bord à l'infini.

On définit l'application de Gauss-Minkowski sur le fibré unitaire de $\tilde{M}$ (voir figure 1) :

$$\vec{n} : U\tilde{M} \to \partial_\infty \tilde{M}.$$

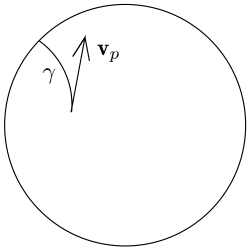

Figure 1

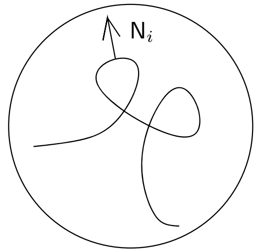

Figure 2

Pour un vecteur $\mathbf{v}_p$ dans $U\tilde{M}$, on définit $\overrightarrow{n}(\mathbf{v}_p)$ comme étant le point dans le bord à l'infini de $\tilde{M}$ où aboutit la géodésique dans $\tilde{M}$ partant du point p dans la direction $\mathbf{v}_p$:

$$\overrightarrow{n}(\mathbf{v}_p) = \gamma(+\infty),$$

où γ est l'unique géodésique telle que $\partial_t\gamma(0) = \mathbf{v}_p$.

Soit $\mathrm{N}_i : \tilde{\Sigma} \to U\tilde{M}$ le champ de vecteurs normal sur i (voir figure 2).

Puisque le groupe $\pi_1(M)$ agit par des isométries sur $\tilde{M}$, il agit également par des homéomorphismes sur $\partial_\infty\tilde{M}$. On considère l'application équivariante :

$$\varphi = \overrightarrow{n} \circ \mathrm{N}_i : \tilde{\Sigma} \to \partial_\infty\tilde{M},$$

$$\varphi \circ \gamma = \theta(\gamma) \circ \varphi \qquad \forall\gamma \in \pi_1(\Sigma).$$

Lorsque i est localement convexe, φ est un homéomorphisme local. De même, si on a un homéomorphisme local φ qui est équivariant sous l'action de θ, alors, il existe une immersion i localement convexe (qui n'est pas forcément unique) telle que :

$$\varphi = \overrightarrow{n} \circ \mathrm{N}_i.$$

Donc, dans le cas où on étudie la condition de courbure de convexité, notre problème de départ devient le problème suivant :

`Qn` : Quand existe-t-il un homéomorphisme local $\varphi : \tilde{\Sigma} \to \partial_\infty\tilde{M}$ équivariant sous l'action de θ.

On appelle une telle structure un « problème de Plateau équivariant ».

En principe, on pourrait dire la même chose pour toutes les conditions de courbure qu'on voudrait imposer (et non pas seulement celle de la convexité). On considère alors la recherche des problèmes de Plateau équivariants comme étant la version la plus généralisé du problème du départ.

STRUCTURES COMPLEXES PROJECTIVES

Lorsque M est à courbure sectionelle constante, on peut transformer ce problème en un autre problème bien connu :

$$\begin{array}{lcl} \tilde{M} & \text{devient} & \mathbb{H}^3, \\ \partial_\infty \tilde{M} & \text{devient} & \partial_\infty \mathbb{H}^3 \cong \widehat{\mathbb{C}} \\ \pi_1(M) & \subseteq & \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^3) = \mathbb{P}SL(2,\mathbb{C}) \\ \theta : \pi_1(\Sigma) & \to & \mathbb{P}SL(2,\mathbb{C}) \end{array}$$

Puisque φ est un homéomorphisme local, en tirant en arrière la structure holomorphe sur $\hat{\mathbb{C}}$, il engendre une structure holomorphe sur $\tilde{\Sigma}$. On a :

$$\varphi : \tilde{\Sigma} \to \hat{\mathbb{C}} \text{ loc. conforme, equivariant}$$

La paire (φ, θ) est donc une structure complexe projective.

On cite maintenant un résultat de Gallo, Kapovich et Marden :

Théorème (Gallo, Kapovich & Marden)**.** *Soit $\theta : \pi_1(\Sigma) \to \mathbb{P}SL(2,\mathbb{C})$ un homomorphisme. Il existe φ telle que (φ, θ) soit une structure complexe projective si et seulement si :*

(i) θ est non-élémentaire et

(ii) $SW_2(\theta) = 0$.

On expliquera bientôt le sens de ces deux conditions. Ce qui nous est important, c'est que ce résultat de Gallo, Kapovich et Marden nous donne des conditions *algebriques* nécéssaires et suffisantes sur θ pour l'existence d'un problème de Plateau équivariant. Maintenant on utilise un théorème d'existence de Labourie :

Théorème (Labourie)**.** *Soit (φ, θ) une structure complexe projective et supposons que Σ est compacte. Alors, il existe une unique immersion $i : \Sigma \to \mathbb{H}^3$ telle que :*

(i) i soit une immersion complète,

(ii) i soit à courbure Gaussienne constante égale à k, et

(iii) $\overrightarrow{n} \circ N_i = \varphi$.

D'ailleurs, l'unicité de i implique que

(iv) i est équivariante sous l'action de θ.

En prenant le quotient de cette immersion, on obtient une immersion de Σ dans M à courbure Gaussienne constante qui réalise θ. On vient de résoudre alors le problème dans le cas de courbure Gaussienne préscrite. C'est-à-dire qu'on vient d'obtenir des conditions *algébriques* sur θ nécéssaires et suffisantes pour l'existence d'une immersion à courbure Gaussienne constante de Σ dans M qui réalise l'homomorphisme θ.

LE THÉORÈME D'EXISTENCE

Maintenant, on va étudier les définitions de ces conditions algébriques et on va voir comment elles pouvent être généralisées au cas où la variété M n'est pas forcément à courbure constante. D'abord :

θ est dit non-élémentaire si et seulement si le sous-groupe $\theta(\pi_1(\Sigma))$ n'a pas de point fixe dans $\partial_\infty \tilde{M} = \partial_\infty \mathbb{H}^3 = \hat{\mathbb{C}}$.

Cette condition se généralise assez facilement au cas où M n'est pas forcément à courbure sectionelle constante. Pour comprendre la condition sur la deuxième classe de Steifel-Whitney de θ, il faut faire d'abord un peu d'algebre. On a la suite exacte courte suivante :

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathbb{P}SL(2,\mathbb{C}) \to 0.$$

En utilisant l'homologie de Cech, on obtient à partir de θ une classe cohomologique :

$$\theta \to [\theta] \in H^1(M, \mathbb{P}SL(2,\mathbb{C})).$$

Si l'on applique l'application de bord de la suite exacte longue de Meyer-Vietoris, on obtient la deuxième classe de Steifel-Whitney de θ :

$$\delta([\theta]) = \mathrm{SW}_2(\theta) \in H^2(M, \mathbb{Z}_2).$$

En fait, ce n'est pas nécéssaire de comprendre les détails de cette construction algébrique, parce que la deuxième classe de Steifel-Whitney de θ s'annule si et seulement s'il existe un relevé $\tilde{\theta}$ de θ dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, le revêtement universel de $\mathbb{P}SL(2,\mathbb{C})$:

$$\mathrm{SW}_2(\theta) = 0 \Leftrightarrow \exists \tilde{\theta} : \pi_1(\Sigma) \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \textbf{ t.q. } \pi \circ \tilde{\theta} = \theta.$$

On peut généraliser SW_2 au cas où M est une variété à courbure strictement négative. En effet, le groupe des isométries du revêtement universel de M agit sur le bord à l'infini de celui-ci par des homéomorphismes. On a alors :

$$\theta : \pi_1(\Sigma) \to \pi_1(M) \cong \mathrm{Isom}(\tilde{M}) \to \mathrm{Homeo}_0(\partial_\infty \tilde{M}) \cong \mathrm{Homeo}_0(S^2).$$

Un résultat classique de Friberg nous dit que le groupe fondamental du groupe d'homéomorphismes de la sphère est isomorphe à $\mathbb{Z}_2$. Le revêtement universel de ce groupe est donc un revêtement à deux nappes, et on obtient la suite exacte courte suivante :

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \to \widetilde{\mathrm{Homeo}}_0(\partial_\infty \tilde{M}) \to \mathrm{Homeo}_0(\partial_\infty \tilde{M}) \to 0.$$

Par conséquent, en utilisant l'homologie de Cech et l'opérateur de bord de la suite de Meyer-Vietoris, on définit, comme avant, un élément :

$$\mathrm{SW}_2(\theta) \in H^2(\Sigma; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2.$$

Ceci est la deuxième classe de Steifel-Whitney de θ, et elle s'annule si et seulement si θ se releve en un homomorphisme à valeurs dans le revêtement universel du groupe d'homéomorphismes de la sphère :

$$\mathrm{SW}_2(\theta) = 0 \Leftrightarrow \exists \tilde{\theta} : \pi_1(\Sigma) \to \widetilde{\mathrm{Homeo}}_0(\partial_\infty \tilde{M}) \textbf{ t.q. } \pi \circ \tilde{\theta} = \theta.$$

On peut maintenant donner l'énoncé de mon résultat :

Théorème. *Soit θ non-élémentaire et supposons que $SW_2(\theta) = 0$. Alors, il existe un homéomorphisme locale $\varphi : \tilde{\Sigma} \to \partial_\infty \tilde{M}$ équivariant sous l'action de θ :*

$$\forall \gamma \in \pi_1(\Sigma), \qquad \varphi \circ \gamma = \theta(\gamma) \circ \varphi.$$

On obtient alors une immersion complète localement convexe, et, en prenant le quotient, on obtient :

Corollaire. *Si θ est non-élémentaire et si $SW_2(\theta) = 0$, alors il existe une immersion $i : \Sigma \to M$ localement convexe qui réalise θ :*

$$i_* = \theta.$$

La démonstration suit une stratégie analogue à celle employée par Gallo, Kapovich et Marden. En effet, la prémière étape est presque identique à la leur. D'abord, en utilisant le fait que θ est non-élémentaire, on obtient une décomposition de Σ en pantalons telle que l'image sous l'action de θ du groupe fondamentale de chaque pantalon est un groupe de Schottky. C'est un peu comme jouer avec un Rubicube.

GROUPES DE SCHOTTKY ET DOMAINS FONDAMENTALES

Soit $C_a^\pm$,$C_b^\pm$ des courbes de Jordan dans $\partial_\infty \tilde{M}$ orientées de telle sorte que chacune de ces courbes se trouve dans l'extérieure des trois autres (voir figure 3).

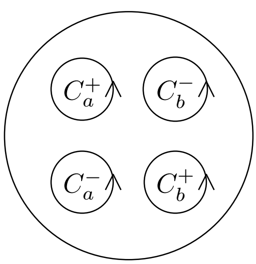

Figure 3

Soit $\alpha, \beta \in \mathrm{Isom}(\tilde{M})$ telles que :

$$\mathrm{Ext}(C_a^-) \cdot \alpha = \mathrm{Int}(C_a^+),$$
$$\mathrm{Ext}(C_b^+) \cdot \alpha = \mathrm{Int}(C_b^+).$$

Alors, le groupe $\langle \alpha, \beta \rangle$ engendré par α et β est un groupe de Schottky.

Le résultat est facile à démontrer pour les pantalons dont l'image du groupe fondamental sous l'action de θ est un groupe de Schottky. Nous rélions les courbes de Jordan par des courbes simples. L'union des images de ces courbes sous l'action du groupe de Schottky définit une courbe de Jordan qui est invariante sous l'action de ce groupe (voir figure 4) :

$$C = \overline{\bigcup_{\gamma \in \langle \alpha, \beta \rangle} (\Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_4) \cdot \gamma}.$$

L'intérieure de cette courbe définit une domaine de Jordan invariante sous l'action du groupe de Schottky :

$$\Omega = \mathrm{Int}(C).$$

On appele une telle domaine une domaine invariante du groupe $\langle \alpha, \beta \rangle$. Le quotient de Ω sous l'action de ce groupe est un pantalon :

$$\Omega / \langle \alpha, \beta \rangle \text{ est un pantalon.}$$

Le groupe fondamentale de ce pantalon est canoniquement isomorphe au groupe de Schottky engendre par α et β :

$$\pi_1(\Omega / \langle \alpha, \beta \rangle) \cong \langle \alpha, \beta \rangle.$$

On obtient maintenant la solution pour ce cas-ci.

Soit P un pantalon. Soit $\theta : \pi_1(P) \to \pi_1(M)$ un homomorphisme dont l'image est un groupe de Schottky :

$$\mathrm{Im}(\theta) = \langle \alpha, \beta \rangle.$$

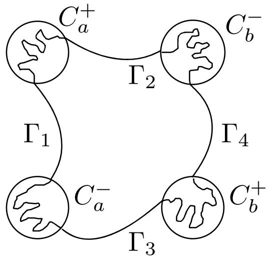

Figure 4

Soit Ω une domaine fondamentale de $\mathrm{Im}(\theta)$.

En utilisant de la topologie élémentaire, on obtient un homéomorphisme :

$$\varphi : P \to \Omega/\langle \alpha, \beta \rangle \text{ **t.q.** } \varphi_* = \theta.$$

L'application φ se releve en un application du revêtement universel da P à valeurs dans Ω :

$$\tilde{\varphi} : \tilde{P} \to \Omega.$$

L'application $\tilde{\varphi}$ est une solution. En effet :

(i) $\tilde{\varphi}$ est un homéomorphisme locale, et

(ii) $\tilde{\varphi} : \tilde{P} \to \partial_\infty \tilde{M}$ est équivariante sous l'action de θ.

La démonstration du théorème

Il suffit maintenant d'établir les conditions sous lesquelles les solutions obtenues pour des pantalons peuvent être recollées pour obtenir une solution sur la surface toute entière.

On rappele qu'on a decomposé Σ en $2g-2$ pantalons $(P_i)_{2g-2}$. Pour chaque i, on note $(C_{i,j})_{j\in\{1,2,3\}}$ les composantes du bord de P_i (voir figure 5).

Toute composante du bord de P_i définit une classe de conjugasion dans le groupe fondamentale du pantalon. En utilisant l'homomorphisme θ et la combinatorique de la décomposition, on associe à chaque composante de bord $C_{i,j}$ un élément de $\pi_1(M)$ qu'on considère comme étant l'image sous l'action de θ de la courbe $C_{i,j}$:

$$C_{i,j} \to \alpha_{i,j} \in \pi_1(M) \; [= \theta(C_{i,j})].$$

Tenant compte de ce que les composantes des bords sont orientées de telle sorte que P_i se trouve toujours à leur gauche, chaque fois que deux de ces composantes sont recollées, il faut changer l'orientation d'une des deux. On impose alors la contrainte suivante :

$$C_{i,j} \text{ rec. } C_{i',j'} \Rightarrow \alpha_{i',j'} = \alpha_{i,j}^{-1}.$$

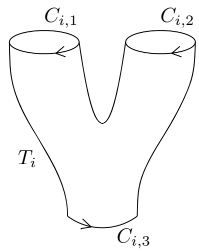

Figure 5

Puisque θ se releve, on peut définir également des relevés de chacun des $\alpha_{i,j}$:

$$C_{i,j} \to \tilde{\alpha}_{i,j} \in \widetilde{\mathrm{Homeo}}_0(\partial_\infty \tilde{M}) \; [= \tilde{\theta}(C_{i,j})].$$

Comme avant, on a :

$$C_{i,j} \text{ rec. } C_{i',j'} \Rightarrow \tilde{\alpha}_{i',j'} = \tilde{\alpha}_{i,j}^{-1}.$$

Nous nous rappelons que, puisque M est compacte, tout élément du groupe fondamental de M agit hyperboliquement sur $\tilde{M}$. En particulier, l'action de chaque élément a exactement deux points fixes dans $\partial_\infty \tilde{M}$.

Pour tout i,j soit $\alpha_{i,j}^{\pm}$ les deux points fixes de $\alpha_{i,j}$ dans $\partial_\infty \tilde{M}$.

On définit un tore :

$$\mathbb{T}_{i,j} = \partial_\infty \tilde{M} \setminus \left\{\alpha_{i,j}^{\pm}\right\} / \langle \alpha_{i,j} \rangle.$$

Trivialement :

$$C_{i,j} \text{ rec. } C_{i',j'} \Rightarrow \mathbb{T}_{i,j} = \mathbb{T}_{i',j'}.$$

Pour chaque pantalon, la solution que nous avons construite définit une classe dans le prémier groupe d'homologie de ces tores :

$$\varphi_i : \tilde{P}_i \to \partial_\infty \tilde{M} \Rightarrow \xi_{i,j} \in H_1(\mathbb{T}_{i,j}).$$

Explicitement :

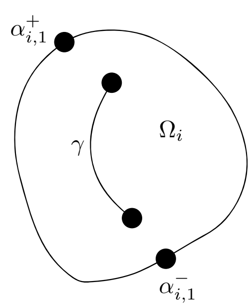

Figure 6

Soit $\Omega_i = \mathrm{Im}(\varphi_i)$ une domaine de Jordan invariante sous $\theta(\pi_1(\mathbb{T}_{i,j}))$. Pour tout j, $\alpha_{i,j}^{\pm} \in \partial\Omega_i$. Soit $\gamma : I \to \Omega_i$ une courbe telle que $\gamma(0) \cdot \alpha_{i,j} = \gamma(1)$ (voir figure 6).

L'image de cette courbe γ sous la projection dans le tore $\mathbb{T}_{i,j}$ définit un lacet fermé dans ce tore. Ceci définit alors une classe homologique $\xi_{i,j}$ dans le tore :

$$\xi_{i,j} = [\pi \circ \gamma] \in H_1(\mathbb{T}_{i,j}).$$

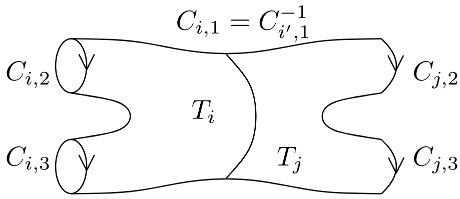

Figure 7

Puisque Ω_i est simplement connexe, cet élément ne dépend pas de la courbe choisi. Il ne dépend alors que de Ω_i et donc de φ_i. Plus tard, on le notera :

$$\xi_{i,j}(\varphi_i).$$

Supposons maintenant que la composante $C_{i,j}$ est recollée à la composante $C_{i',j'}$:

$$C_{i,j} \text{ rec. } C_{i',j'}.$$

Gallo, Kapovich et Marden ont montré que φ_i et φ_j peuvent être prolongées en une solution au dessus de la réunion de P_i et de P_j lorsque $\xi_{i,j} = -\xi_{i',j'}$ (voir figure 7) :

$$\xi_{i,j} = -\xi_{i',j'} \Rightarrow \varphi_i \text{ et } \varphi_j \text{ engendrent } \varphi_{i,j} \text{ au dessus de } P_i \cup P_j.$$

Pour obtenir la solution globale, il suffit alors de choisir les domaines fondamentales (les Ω_i) de telle sorte que les classes homologiques qu'elles engendrent (les $\xi_{i,j}$) coincident le long des composantes du bord qui sont réliées.

La seule question qui reste à résoudre est alors, « Quand est-ce que ceci est possible ? ».

L'obstruction algébrique

On revient à la définition de la classe homologique engendrée par l'immersion.

Soit $c_{i,j}$ une courbe de Jordan dans $\partial_\infty \tilde{M}$ tel que $\alpha_{i,j}^+$ soit dans son intérieur et que $\alpha_{i,j}^-$ soit dans son extérieure (voir figure 8). Ceci se projette sur une courbe simple dans $\mathbb{T}_{i,j}$:

$$\gamma(0) \cdot \alpha_{i,j} = \gamma(1) \Rightarrow \pi \circ \gamma \text{ traverse } \pi \circ c \text{ une fois allant du droite a gauche .}$$

En utilisant la dualité de Poincaré, on obtient alors :

$$\langle \pi \circ \gamma, \pi \circ c_{i,j} \rangle = 1.$$

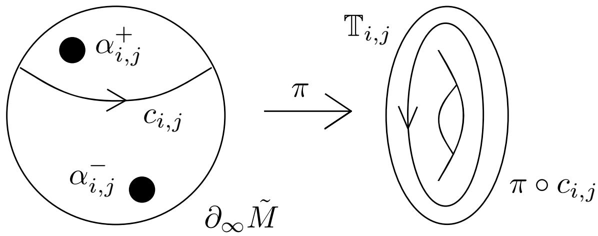

Figure 8

On pose :

$$L_{i,j} = \{[\gamma] \in H_1(\mathbb{T}_{i,j}) \textbf{ t.q. } \langle[\gamma], \pi \circ c_{i,j}\rangle = 1\}.$$

On a :

$$C_{i,j} \text{ rec. } C_{i',j'} \Rightarrow c_{i,j} \text{ va dans le sens contraire à } c_{i',j'}.$$
$$\Rightarrow L_{i,j} = -L_{i',j'}.$$

Trivialement :

$$\xi_{i,j} \in L_{i,j} \text{ pour tout } i, j.$$

On définit maintenant l'application $\mathrm{Lift}_{i,j}$ qui envoie $L_{i,j}$ dans $\widetilde{\mathrm{Homeo}}_0$ $(\partial_\infty \tilde{M})$ de la façon suivante :

Soit $[\gamma] \in L_{i,j}$. Soit $\tilde{\gamma}$ une relevée de γ dans $\partial_\infty \tilde{M} \backslash \{\alpha^\pm_{i,j}\}$. On a $\gamma(0) \cdot \alpha_{i,j} = \gamma(1)$.

On peut considérer les deux points $\alpha^\pm_{i,j}$ comme des courbes constantes dans $\partial_\infty \tilde{M}$. On définit alors une tresse :

$$(\alpha^-_{i,j}, \gamma, \alpha^+_{i,j}) \text{ est une tresse.}$$

De plus, l'application $\alpha_{i,j}$ envoie le point de départ de cette tresse en son point d'arrivée :

$$(\alpha^-_{i,j}, \gamma(0), \alpha^+_{i,j}) \cdot \alpha_{i,j} = (\alpha^-_{i,j}, \gamma(1), \alpha^+_{i,j}).$$

Cette tresse définit alors une classe d'homotopie de courbes dans Homeo_0 $(\partial_\infty \tilde{M})$ allant de Id à $\alpha_{i,j}$, et ceci définit un relevée de $\alpha_{i,j}$ dans $\widetilde{\mathrm{Homeo}}_0(\partial_\infty \tilde{M})$.

Ce relevé ne dépend que de la classe d'homologie de $[\gamma]$ dans $H_1(\mathbb{T}_{i,j})$. On obtient alors une application :

$$\mathrm{Lift}_{i,j} : L_{i,j} \to \widetilde{\mathrm{Homeo}}_o(\partial_\infty \tilde{M}).$$

En particulier, on rémarque que :

$$\pi \circ \mathrm{Lift}_{i,j}([\gamma]) = \alpha_{i,j}.$$

Tout dépend maintenant du résultat suivant :

Théorème. *Soit $\eta_{i,j} \in L_{i,j}$ pour $j \in \{1,2,3\}$. Il existe un homéomorphisme φ_i : $\tilde{T}_i \to \partial_\infty \tilde{M}$ tel que :*

$$\xi_{i,j}(\varphi_i) = \eta_{i,j} \qquad \forall\, i,$$

si et seulement si

$$\mathit{Lift}(\eta_{i,1}) \cdot \mathit{Lift}(\eta_{i,2}) \cdot \mathit{Lift}(\eta_{i,3})^{-1} = \mathit{Id}'.$$

Où Id' est le relevé de l'identité dans $\widetilde{\mathit{Homeo}_0}(\partial_\infty \tilde{M})$ qui est différent de l'identité.

La solution devient alors triviale :

(i) Pour tout i, j, on choisit $\xi_{i,j} \in L_{i,j}$ tel que :

$$C_{i,j} \text{ rec. } C_{i',j'} \Rightarrow \xi_{i,j} = -\xi_{i',j'}, \tag{1}$$

$$\mathrm{Lift}_{i,j}(\xi_{i,j}) = \mathrm{Id}' \cdot \tilde{\alpha}_{i,j}. \tag{2}$$

(ii) Pour tout i, on a (voir figure 9) :

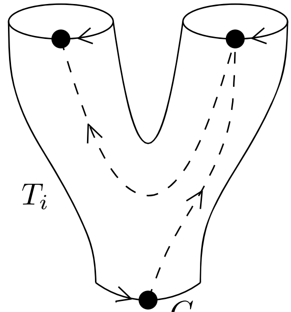

Figure 9

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Lift}_{i,1}(\xi_{i,1}) \cdot \mathrm{Lift}_{i,2}(\xi_{i,2}) \cdot \mathrm{Lift}_{i,3}(\xi_{i,3})^{-1} \\
&\qquad = \mathrm{Id}' \cdot \tilde{\alpha}_{i,1} \cdot \mathrm{Id}' \cdot \tilde{\alpha}_{i,2} \cdot \tilde{\alpha}_{i,3}^{-1} \cdot \mathrm{Id}' \\
&\qquad = (\mathrm{Id}')^3 \cdot \tilde{\alpha}_{i,1} \cdot \tilde{\alpha}_{i,2} \cdot \tilde{\alpha}_{i,3}^{-1} \\
&\qquad = (\mathrm{Id}')^3 \cdot \tilde{\theta}(C_{i,1}) \cdot \tilde{\theta}(C_{i,2}) \cdot \tilde{\theta}(C_{i,3}^{-1}) \\
&\qquad = (\mathrm{Id}')^3 \cdot \tilde{\theta}(C_{i,1} \cdot C_{i,2} \cdot C_{i,3}^{-1}) \\
&\qquad = (\mathrm{Id}')^3 \cdot \tilde{\theta}(\mathrm{Id}) \\
&\qquad = \mathrm{Id}'.
\end{aligned}$$

Il existe alors $\varphi_i : \tilde{T}_i \to \partial_\infty \tilde{M}$ telle que :

$$\xi_{i,j}(\varphi_i) = \xi_{i,j}.$$

(iii) Les solutions pour chacun des pantalons peuvent être alors recollées, et le résultat en découle.

Dr. Graham Smith
Postdoctoral Research Associate
Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences
Inselstrasse 22.
04103 Leipzig (Germany)