Institut Fourier — Université de Grenoble I

Actes du séminaire de

Théorie spectrale et géométrie

Arnaud Hilion

Lamination duale à un arbre réel

Volume 24 (2005-2006), p. 9-21.

<http://tsg.cedram.org/item?id=TSG_2005-2006__24__9_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
Grenoble
TSG n° 24 (2007), p. 9 – 21

Lamination duale à un arbre réel

par Arnaud Hilion

Résumé

Nous présentons des résultats reliant un arbre réel muni d'une action par isométries du groupe libre, sa lamination duale et les courants portés par cette dernière.

Introduction

Ce texte s'appuie sur un travail commun avec Thierry Coulbois et Martin Lustig [7, 8, 5, 6] : il ne contient pas de résultats nouveaux. La motivation de ce travail est comprendre dans quelle mesure, la très jolie dualité entre les laminations géodésiques mesurées sur une surface hyperbolique d'une part, et les actions par isométries, petites, du groupe fondamental de cette surface sur des arbres réels d'autre part, peut (ou ne peut pas) être généralisée aux actions par isométries d'un groupe libre sur un arbre réel. Signalons le survol de Martin Lustig [15] qui traite du même sujet, partage beaucoup avec ce texte, et présente en outre une liste de questions ouvertes.

La section I rappelle brièvement les définitions du groupe libre, d'un arbre réel et de l'Outre-espace. On explique ensuite dans la section II la construction classique de l'arbre dual à une lamination géodésique mesurée sur une surface à bord. La section III introduit les laminations algébriques et les courants algébriques. Ces objets sont « intrinsèques » dans le sens qu'ils sont définis sans faire mention d'une base du groupe libre F_N. Si l'on se donne une base, on peut définir des objets équivalents : les laminations et les courants symboliques (qui sont de nature « dynamique symbolique ») d'une part, les langages laminaires et les fonctions de Kolgomorov (qui sont plutôt d'inspiration « combinatoire ») d'autre part. La définition de la lamination duale à un arbre réel est donnée dans la section IV. Enfin, la section V est consacrée à énoncer quelques résultats liant un arbre et sa lamination duale.

I – OUTRE-ESPACE

1. Le groupe libre et son bord

On note F_N le groupe libre de rang $N \geqslant 2$. Une base $\mathcal{A}$ étant fixée, on peut voir $F_N = F(\mathcal{A})$ comme l'ensemble des mots (finis) $w = x_1 \dots x_k$ ($x_i \in \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^{-1}$) réduits (*i.e.* $x_i \neq x_{i+1}^{-1}$) sur l'alphabet $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^{-1}$ (l'élément neutre de F_N étant représenté par le mot vide 1). La loi du groupe est la concaténation-réduction.

Le bord (de Gromov) ∂F_N de F_N peut être vu comme l'ensemble $\partial F(\mathcal{A})$ des mots $X = x_1 \dots x_k \dots$ infinis à droite, réduits sur l'alphabet $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^{-1}$. On munit $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^{-1}$ de la topologie discrète et $(\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^{-1})^{\mathbb{N}^*}$ de la topologie produit. Le bord $\partial F_N \subset (\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^{-1})^{\mathbb{N}^*}$ hérite de la topologie induite : c'est un ensemble de Cantor. Le groupe libre F_N agit (continûment) sur son bord par translations à gauche : si $w = x_1 \dots x_k \in F(\mathcal{A})$,$Y = y_1 \dots y_l \dots \in \partial F(\mathcal{A})$, alors $wY = x_1 \dots x_{k-i} y_{i+1} \dots y_l \dots \in \partial F(\mathcal{A})$ où $y_1 \dots y_i = x_k^{-1} \dots x_{k-i+1}^{-1}$ est le plus long préfixe commun à w^{-1} et Y.

Remarque 1. Le groupe libre F_N et son bord ∂F_N peuvent être définis sans faire mention d'une base $\mathcal{A}$. Par exemple : F_N est le groupe fondamental d'un graphe de caractéristique d'Euler $N-1$; le bord ∂F_N est le bord du revêtement universel (qui est un arbre) de ce graphe. L'utilisation d'une base se révèle être pratique pour définir (et étudier) des objets sur le groupe libre. Mais se pose alors le problème de savoir si ces objets sont « intrinsèques », *i.e.* ne dépendent pas du choix de la base. Ce sera le cas, dans la suite de ce texte, pour les laminations algébriques et les courants.

2. Arbres réels

Un **arbre réel** T est un espace métrique non vide tel que :
- pour tous points $x, y \in T$, il existe un unique arc topologique (*i.e.* l'image dans T d'un plongement d'un intervalle réel) dans T joignant x et y,
- cet arc est isométrique au segment réel $[0, d(x, y)]$,

où d désigne la distance sur T. De manière équivalente, un arbre réel T est un espace métrique, non vide, géodésique et 0-hyperbolique (au sens de Gromov).

3. Action du groupe libre sur un arbre réel

Soit T un arbre réel. Considérons une isométrie w de T. On définit la **longueur de translation** de w dans T par :

$$\|w\|_T = \inf\{d(x, wx) \mid x \in T\}.$$

Seuls deux cas sont possibles :

Cas 1 : $\|w\|_T = 0$. Dans ce cas, w a un point fixe dans T, et l'on dit que w est **elliptique**.

Cas 2 : $\|w\|_T > 0$. Dans ce cas, w laisse un axe (*i.e.* l'image d'un plongement de $\mathbb{R}$ dans T), noté $\mathrm{Axe}(w)$, invariant, et agit par translation de longueur $\|w\|_T$ sur $\mathrm{Axe}(w)$. On dit que w est **hyperbolique**.

On suppose que le groupe libre F_N agit par isométries sur T. L'action est dite :
- non triviale s'il n'existe pas de point de T laissé fixe par F_N,
- minimale s'il n'y a pas de sous arbre propre F_N-invariant,
- très petite si :
  i) le stabilisateur d'un arc non dégénéré (*i.e.* non réduit à un point) de T est un sous-groupe cyclique ou trivial de F_N ;
  ii) un élément non trivial de F_N ne fixe pas un tripode non dégénéré de T (un tripode est l'enveloppe convexe dans T de 3 points de T, il est non dégénéré s'il possède un point dont le complémentaire a 3 composantes connexes) ;
  iii) un élément non trivial de F_N ne renverse pas (*i.e.* ne permute pas) les extémités d'un arc non dégénéré de T.

Une action de F_N sur T définit une fonction longueur $\|\cdot\|_T$ dans l'espace $\mathbb{R}^{F_N}$ des fonctions de F_N dans $\mathbb{R}$, et donc aussi un point de l'espace projectif $\mathbb{P}\mathbb{R}^{F_N}$.

Fait 1. *Un arbre T muni d'une action par isométries de F_N non triviale, minimale et très petite est caractérisé (à isométrie F_N-équivariante près) par sa fonction longueur $\|\cdot\|_T$.*

On désigne par $\overline{\mathrm{cv}}_N$ l'ensemble des arbres réels T munis d'une action par isométries de F_N, minimale, non triviale, très petite. L'ensemble $\overline{\mathrm{cv}}_N$ s'injecte dans $\mathbb{R}^{F_N}$ via les fonctions longueurs : il hérite ainsi de la topologie induite.

On désigne par $\mathrm{cv}_N \subset \overline{\mathrm{cv}}_N$ le sous ensemble des actions libres et simpliciales, et on pose $\partial\mathrm{cv}_N = \overline{\mathrm{cv}}_N \smallsetminus \mathrm{cv}_N$. C'est pour les éléments de $\partial\mathrm{cv}_N$ que l'on définira dans la section IV une lamination duale.

Enfin, on désigne par CV_N (resp. $\overline{\mathrm{CV}}_N$ et $\partial\mathrm{CV}_N$) l'espace des classes d'homothétie d'éléments de cv_N (resp. $\overline{\mathrm{cv}}_N$ et $\partial\mathrm{cv}_N$) : CV_N est l'espace de Culler-Vogtmann ou Outre-espace. On pourra consulter [18] pour plus de détails.

Par la suite, on s'intéressera plus particulièrement aux arbres à orbites denses : on dit que T est **à orbites denses** s'il existe un point de T dont l'orbite (sous l'action de F_N) est dense dant T. Dans ce cas, toutes les orbites sont denses ; et si de plus l'action est très petite, on montre que le stabilisateur d'un arc non dégénéré est trivial.

Exemple 1.

(i) Considérons un graphe de Cayley $\Gamma(F_N, \mathcal{A})$ de F_N relatif à une base $\mathcal{A}$, muni de l'action naturelle de F_N. On peut imposer que chaque arête soit isométrique à un segment réel non dégénéré, et ce de manière F_N-équivariante. On obtient un arbre réel, simplicial, muni d'une action libre de F_N par isométries.

(ii) Un exemple d'arbre réel non simplicial muni d'une action par isométries de F_N est donné par l'arbre dual à une lamination géodésique mesurée sur une surface à bord. Cette construction est détaillée dans la section suivante.

Pour plus d'informations sur les arbres réels, on pourra consulter par exemple [1], [16] et [3].

II – Chez les surfaces

1. Laminations géodésiques mesurées sur les surfaces

Soit S une surface orientable, compacte, de genre $g \geqslant 1$, à bord non vide. Son groupe fondamental $\pi_1 S$ est un groupe libre F_N de rang $N \geqslant 2$. On munit S d'une structure hyperbolique telle que le bord de S soit une réunion de géodésiques fermées. Le revêtement universel $\widetilde{S}$ de S est un sous-ensemble convexe de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^2$, et $\pi_1 S = F_N$ agit par isométries sur $\widetilde{S}$. Le bord de Gromov ∂F_N de F_N se plonge alors naturellement dans le bord de $\partial\mathbb{H}^2 = S^1_\infty$ de $\mathbb{H}^2$.

Considérons une famille non vide de géodésiques de $\widetilde{S}$, appelées feuilles, deux à deux disjointes, telles que leur réunion $\widetilde{\mathfrak{L}}$ soit un fermé F_N-invariant de $\mathbb{H}^2$. La projection $\mathfrak{L}$ de $\widetilde{\mathfrak{L}}$ dans S est appelée une **lamination géodésique** (voir [2]). La projection d'une feuille de $\widetilde{\mathfrak{L}}$ est une feuille de $\mathfrak{L}$.

Une lamination géodésique $\mathfrak{L}$ est dite **minimale** si $\mathfrak{L}$ est l'adhérence dans S de chacune de ses feuilles. On dit que $\mathfrak{L}$ **remplit** S si toute géodésique (sauf les composantes de bord) de S rencontre $\mathfrak{L}$.

Soit $\mathcal{J}$ l'ensemble des arcs lisses de S dont les extrémités sont dans $S \setminus \mathfrak{L}$ et qui intersectent les feuilles de $\mathfrak{L}$ transversalement. Une **mesure transverse** sur $\mathfrak{L}$ est une application $\mathfrak{m} : \mathcal{J} \to \mathbb{R}^+$ telle que (voir [12]) :
- la restriction $\mathfrak{m}_{|\gamma}$ de $\mathfrak{m}$ à tout $\gamma \in \mathcal{J}$ est une mesure de Borel σ-additive,
- $\mathfrak{m}(\gamma) = \mathfrak{m}(\gamma')$ s'il existe une isotopie entre $\gamma, \gamma' \in \mathcal{J}$ réalisée par des éléments de $\mathcal{J}$,
- si $\mathfrak{m}(\gamma) > 0$, alors $\gamma \cap \mathfrak{L} \neq \emptyset$.

Une telle mesure transverse se relève naturellement à $\widetilde{S}$ en une mesure transverse $\widetilde{\mathfrak{m}}$ à $\widetilde{\mathfrak{L}}$, F_N-invariante.

2. L'arbre réel dual à une lamination géodésique mesurée

On définit une pseudo-distance $d_{\mathfrak{m}}$ sur $\widetilde{S}$ par :
- $d_{\mathfrak{m}}(x, y) = 0$, si x, y sont dans une même feuille de $\widetilde{\mathfrak{L}}$,
- $d_{\mathfrak{m}}(x, y) = \inf\{\widetilde{\mathfrak{m}}(\gamma) : \gamma \in \widetilde{\mathcal{J}}$ joignant x et $y\}$, sinon,

où $\widetilde{\mathcal{J}}$ est l'ensemble des arcs de $\widetilde{S}$ se projetant sur des arcs de $\mathcal{J}$.

On désigne par $T_{\mathfrak{m}}$ l'espace métrique obtenu en quotientant $\widetilde{S}$ par la relation d'équivalence $x \sim y$ si, et seulement si, $d_{\mathfrak{m}}(x,y) = 0$. On note encore $d_{\mathfrak{m}}$ la distance sur $T_{\mathfrak{m}}$.

L'action de F_N sur $\widetilde{S}$ induit une action par isométries sur $T_{\mathfrak{m}}$.

Fait 2. *$T_{\mathfrak{m}}$ est un arbre réel, muni d'une action très petite de F_N.*

À partir de l'action de F_N sur $T_{\mathfrak{m}}$, on peut reconstruire la surface S et la lamination géodésique mesurée dont $T_{\mathfrak{m}}$ est issu, en utilisant la machinerie de Rips (voir par exemple [1] ou [12]).

III – Laminations algébriques et courants

1. Le point de vue « intrinsèque »

Le **bord double** de F_N est défini comme :

$$\partial^2 F_N = \partial F_N \times \partial F_N \smallsetminus \Delta,$$

où $\Delta = \{(X,X) \mid X \in \partial F_N\}$. Le bord double est naturellement muni :
– de la topologie induite par celle de ∂F_N,
– de l'action de F_N induite par l'action diagonale de F_N sur $\partial F_N \times \partial F_N$,
– de l'involution $(X,Y) \mapsto (Y,X)$, appelée « flip ».

Une **lamination algébrique** est un sous-ensemble non vide $L^2 \subset \partial^2 F_N$ qui est
– fermé,
– F_N-invariant,
– flip-invariant.

L'ensemble des laminations algébriques est noté $\Lambda^2(F_N)$.

Revenons au cas d'une lamination géodésique $\mathfrak{L}$ sur une surface (à bord) S.

Fait 3. *Une lamination géodésique $\mathfrak{L} \subset S$ détermine une lamination algébrique $L^2(\mathfrak{L})$ qui est donnée par les couples de points terminaux des feuilles de $\tilde{\mathfrak{L}}$. On a :*

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}' \iff L^2(\mathfrak{L}) = L^2(\mathfrak{L}')$$

Remarque 2. Le plongement de ∂F_N dans $\partial\mathbb{H}^2 = S^1_\infty$ induit un ordre cyclique F_N-invariant sur ∂F_N : étant donnés quatre points $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \partial F_N$, l'ordre dans lequel on les lit en parcourant S^1_∞ traduit le fait que les géodésiques de $\widetilde{S}$ joignant X_1 et X_2 d'une part, et Y_1 et Y_2 d'autre part, se coupent ou non.

Les feuilles d'une lamination géodésique $\mathfrak{L}$ étant deux à deux disjointes, la lamination algébrique $L^2(\mathfrak{L})$ a la propriété remarquable de « préserver l'ordre cyclique » sur ∂F_N induit par le plongement dans $\partial\mathbb{H}^2 = S^1_\infty$. Les laminations algébriques préservant un ordre cyclique sur ∂F_N forment un sous-ensemble strict remarquable de $\Lambda^2(F_N)$.

Un **courant** μ est une mesure de Radon $\mu > 0$ sur $\partial^2 F_N$, F_N-invariante et flip-invariante. Le **support** Supp(μ) est l'intersection des fermés de $\partial^2 F_N$ sur le complémentaire desquels $\mu = 0$. Il est clair que :

Fait 4. *Le support d'un courant est une lamination algébrique.*

Revenons au cas d'une lamination géodésique mesurée $(\mathfrak{L}, \mathfrak{m})$ sur une surface (à bord) S.

Fait 5.

1) *Une mesure transverse* $\mathfrak{m}$ *sur* $\mathfrak{L}$ *détermines un courant* $\mu_{\mathfrak{m}}$. *On a :*

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}' \iff \mu_{\mathfrak{m}} = \mu_{\mathfrak{m}'}.$$

2) *Si* $(\mathfrak{L}, \mathfrak{m})$ *est une lamination géodésique mesurée sur* S*, on a Supp*$(\mu_{\mathfrak{m}}) \subset L^2(\mathfrak{L})$*. Si de plus* $\mathfrak{L}$ *est minimale, alors Supp*$(\mu_{\mathfrak{m}}) = L^2(\mathfrak{L})$*.*

2. Laminations symboliques et courants symboliques

Fixons une base $\mathcal{A}$ du groupe libre $F_N = F(\mathcal{A})$. Rappelons qu'un point du bord $X \in \partial F_N$ s'écrit comme un mot réduit infini $X_{\mathcal{A}} = x_1 x_2 x_3 \ldots \in \partial F(\mathcal{A})$ in $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^{-1}$.

On désigne par $\Sigma_{\mathcal{A}}$ l'ensemble des mots bi-infinis réduits

$$Z = \ldots z_{-i-1} z_{-i} \ldots z_{-1} z_0 \cdot z_1 z_2 \ldots z_i z_{i+1} \ldots$$

avec $z_i \in \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^{-1}$ (comme précédemment, par « réduit », on entend que pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $z_i \neq z_{i+1}^{-1}$). On munit $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^{-1}$ de la topologie discrète et $(\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^{-1})^{\mathbb{Z}}$ de la topologie produit : $\Sigma_{\mathcal{A}} \subset (\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^{-1})^{\mathbb{Z}}$ hérite de la topologie induite.

L'**inverse** Z^{-1} d'un élément $Z = \ldots z_{i-1} z_i z_{i+1} \cdots \in \Sigma_{\mathcal{A}}$ est $Z^{-1} = \ldots z'_{i-1} z'_i z'_{i+1} \ldots$ où $z'_i = z_{-i+1}^{-1}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Le **décalage** $\sigma : \Sigma_{\mathcal{A}} \to \Sigma_{\mathcal{A}}$ est défini par $\sigma(Z) = Z'$ où $Z = \ldots z_{i-1} z_i z_{i+1} \ldots$, $Z' = \ldots z'_{i-1} z'_i z'_{i+1} \ldots$ et $z'_i = z_{i+1}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Le décalage et l'inversion sont des homéomorphismes de $\Sigma_{\mathcal{A}}$.

Une **lamination symbolique** $L_{\mathcal{A}}$ dans la base $\mathcal{A}$ est un sous ensemble non vide de $\Sigma_{\mathcal{A}}$ qui est :
- fermé,
- invariant sous le décalage,
- symétrique (*i.e.* invariant sous l'inversion).

L'ensemble des laminations symboliques est noté $\Lambda_{\mathcal{A}}$. Les mots bi-infinis $Z \in L_{\mathcal{A}}$ sont appelés feuilles de $L_{\mathcal{A}}$.

Soit $(X, Y) \in \partial^2 F_N$, et $X_{\mathcal{A}}, Y_{\mathcal{A}} \in \partial F(\mathcal{A})$ les mots infinis réduits correspondants. On obtient un mot bi-infini réduit $Z_{\mathcal{A}}$ en concaténant et réduisant $X_{\mathcal{A}}^{-1}$ et $Y_{\mathcal{A}}$:

$$Z_{\mathcal{A}} = X_{\mathcal{A}}^{-1} Y_{\mathcal{A}} = \ldots x_{i+2}^{-1} x_{i+1}^{-1} x_i^{-1} . y_i y_{i+1} y_{i+2} \ldots$$

où $x_1 \dots x_{i-1} = y_1 \dots y_{i-1}$ est le plus long préfixe commun à $X_{\mathcal{A}}$ et $Y_{\mathcal{A}}$. Considérons une lamination algébrique $L^2 \subset \partial^2 F_N$.

Fait 6 ([7]). *L'ensemble des mots bi-infinis obtenus par le procédé précédant à partir de toutes les feuilles (X, Y) d'une lamination algébrique L^2 forme une lamination symbolique $L_{\mathcal{A}}(L^2)$. On obtient ainsi une bijection entre $\Lambda^2(F_N)$ et $\Lambda_{\mathcal{A}}$.*

Un **courant symbolique** est une mesure de Borel σ-invariante et invariante par l'inversion. Le support d'un courant symbolique est une lamination symbolique. Un courant algébrique détermine un unique courant symbolique.

3. Langages laminaires et fonctions de Kolgomorov

Le **langage laminaire** de la lamination algébrique L^2, ou de la lamination symbolique $L_{\mathcal{A}}(L^2)$, est l'ensemble $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(L^2) \subset F(\mathcal{A})$ de tous les sous-mots finis w des feuilles de $L_{\mathcal{A}}(L^2)$.

Réciproquement, un ensemble infini $\mathcal{L}_{\mathcal{A}} \subset F(\mathcal{A})$ définit une lamination algébrique $L^2(\mathcal{L}_{\mathcal{A}})$ dont les feuilles sont les couples (X, Y) tels que tout sous mot fini $w \in F(\mathcal{A})$ de $X_{\mathcal{A}}^{-1} Y_{\mathcal{A}}$, ou son inverse w^{-1}, est sous mot d'un mot de $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$.

On obtient ainsi (voir [7]) une bijection canonique entre l'ensemble des laminations algébriques $\Lambda^2(F_N)$ et les langages laminaires $\Lambda_{\mathcal{L}}$.

Dans le contexte des langages laminaires, on peut définir l'équivalent d'un courant de la manière suivante. Une *fonction de Kolmogorov* est une application

$$\mu_{\mathcal{A}} : F(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

qui vérifie, pour tout mot réduit $w = y_1 \dots y_k \in F(\mathcal{A})$:

(i) $\mu_{\mathcal{A}}(w^{-1}) = \mu_{\mathcal{A}}(w)$,

(ii) $\mu_{\mathcal{A}}(w) = \sum_{y \neq y_k^{-1}} \mu_{\mathcal{A}}(wy) = \sum_{y \neq y_1^{-1}} \mu_{\mathcal{A}}(yw)$ (pour $y \in \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^{-1}$).

Un courant μ définit une fonction de Kolgomorov, et réciproquement. Le courant μ correspond à la fonction de Kolmogorov $\mu_{\mathcal{A}}$ si, et seulement si, pour tout mot réduit $w = y_1 \dots y_k \in F(\mathcal{A})$ on a

$$\mu_{\mathcal{A}}(w) = \mu(C^2_{\mathcal{A}}(w)),$$

où $C^2_{\mathcal{A}}(w) \subset \partial^2 F(\mathcal{A}) = \partial^2 F_N$ est le **cylindre algébrique** définit par :

$$\{(X_{\mathcal{A}}, wX'_{\mathcal{A}}) \mid X_{\mathcal{A}} = x_1 x_2 \dots, X'_{\mathcal{A}} = x'_1 x'_2 \dots \in \partial F(\mathcal{A}), x_1 \neq y_1, x'_1 \neq y_k^{-1}\}.$$

Pour plus de détails, voir [10] ou [11].

Remarque 3. Dans [7], on définit trois topologies (métrisables) naturelles sur l'ensemble des laminations algébriques $\Lambda^2(F_N)$, sur l'ensemble des laminations symboliques $\Lambda_{\mathcal{A}}$, et sur l'ensemble des langages laminaires $\Lambda_{\mathcal{L}}$. On décrit aussi l'action du groupe des automorphismes extérieurs Out(F_N) de F_N sur ces trois espaces. On montre que les bijections entre $\Lambda^2(F_N)$, $\Lambda_{\mathcal{A}}$ et $\Lambda_{\mathcal{L}}$ explicitées plus haut, sont en fait des homéomorphismes Out(F_N)-équivariants.

IV – Lamination algébrique duale à une arbre réel

Soit T un arbre réel muni d'une action par isométries de F_N. On suppose comme précédemment que l'action est non triviale, minimale et très petite, mais on exclut le cas d'une action libre sur un arbre T simplicial (*i.e.* $T \in \partial \mathrm{cv}_N$).

Fixons une base $\mathcal{A}$ de F_N. On définit $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(T) \subset F(\mathcal{A})$ comme l'ensemble des mots réduits $w \in F(\mathcal{A})$ tels que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un mot $v \in F(\mathcal{A})$ cycliquement réduit dont w est un sous-mot et dont la distance de translation dans T vérifie $||v||_T < \varepsilon$.

La **lamination algébrique duale à** T, notée $L^2(T)$, est définie comme la lamination algébrique dont le langage laminaire est $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(T)$.

Fait 7. *Cette définition est en fait indépendante du choix de la base $\mathcal{A}$ (cf. [8]).*

Remarque 4. Dans le cas d'une action libre simpliciale, la définition reste valable, mais $L^2(T)$ est l'ensemble vide (et donc n'est pas une lamination algébrique).

Considérons le cas où $T = T_{\mathfrak{m}}$ est l'arbre dual d'une lamination géodésique mesurée $(\mathfrak{L}, \mathfrak{m})$ sur une surface S.

Fait 8. *On a :*

$$L^2(\mathfrak{L}) \subset L^2(T_{\mathfrak{m}}) \,.$$

Si de plus $\mathfrak{L}$ est minimale et remplit S, alors la lamination $L^2(T_{\mathfrak{m}})$ s'obtient en rajoutant à la lamination $L^2(\mathfrak{L})$ ses feuilles diagonales.

Considérons une lamination géodésique $\mathfrak{L}$ minimale et qui remplit S. Les composantes connexes du complémentaire de $\widetilde{\mathfrak{L}}$ dans $\widetilde{S}$ sont des n-gones idéaux (*cf.* [2]). Lorsque $n \geqslant 4$, il y a des géodésiques dans le n-gone joignant deux sommets du n-gone : ce sont les « feuilles diagonales » de $\widetilde{\mathfrak{L}}$.

V – Relations entre un arbre et sa lamination duale

1. La topologie métrique sur $\widehat{T}$

Considérons un arbre réel T. Un rayon est l'image d'un plongement de $\mathbb{R}$ dans T. Deux rayons de T sont équivalents s'ils ont une intersection non compacte. Le bord de Gromov de T, que l'on note ∂T, est l'ensemble des classes d'équivalence de rayons dans T. On désigne par $\overline{T}$ le complété (de Cauchy) de T et par $\widehat{T}$ la réunion de $\overline{T}$ et ∂T.

Soit P un point de T. Une composante connexe de $T \smallsetminus \{P\}$ est appelée une **direction de** T en P.

La distance sur T s'étend canoniquement en une distance sur $\overline{T}$, et induit canoniquement une topologie sur $\widehat{T}$, appelée **topologie métrique** :
– une base de voisinages d'un point de $\overline{T}$ est donnée par les boules ouvertes centrées en ce point,
– une base de voisinages d'un point $X \in \partial T$ est donnée par l'ensemble des directions de T qui ont une intersection non bornée avec un rayon représentant X.

2. La topologie des observateurs sur $\widehat{T}$

On peut généraliser la définition d'une direction : si P un point de $\widehat{T}$, on appelle **direction de** $\widehat{T}$ en P toute composante connexe de $\widehat{T} \smallsetminus \{P\}$. La **topologie des observateurs** sur $\widehat{T}$ est la topologie engendrée par les directions de $\widehat{T}$. On désigne par $\widehat{T}^{\text{obs}}$ l'espace $\widehat{T}$ muni de la topologie des observateurs.

Proposition 9 ([6]). *Soit T un arbre réel. Alors :*
– *$\widehat{T}^{obs}$ est compact,*
– *l'identité $id : \widehat{T} \to \widehat{T}^{obs}$ est continue,*
– *la topologie métrique et la topologie des observateurs sont les mêmes sur les sous-arbres finis de T (un sous-arbre fini est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points de T).*

Il est à noter que si T est à orbites denses, alors ni T, ni $\widehat{T}$ ne sont localement compacts. Typiquement, considérons une suite P_k de points de $\widehat{T}$ telle que :
– $d(P_0, P_k)$ ne tend pas vers 0,
– $d(P_0, Q_k)$ tend vers 0,
où Q_k est défini par $[P_0, Q_k] = [P_0, P_k] \cap [P_0, P_{k+1}]$. La suite P_k ne converge pas dans $\widehat{T}$ muni de la topologie métrique, mais converge vers P_0 dans $\widehat{T}^{\text{obs}}$.

3. L'application $\mathcal{Q}$

On suppose par la suite que $T \in \overline{cv}_N$ est un arbre réel à orbites denses.

Levitt et Lustig construisent dans [14] une application

$$\mathcal{Q} : \partial F_N \longrightarrow \widehat{T}.$$

Cette application est F_N-équivariant et surjective, mais n'est, en général, ni injective ni continue.

Lorsque $T = T_{\mathfrak{m}}$ est l'arbre dual à une lamination géodésique mesurée $(\mathfrak{L}, \mathfrak{m})$ sur une surface S, l'application $\mathcal{Q}$ est donnée par l'application « d'inclusion-rétraction » canonique $\partial F_N \subset \mathbb{H}^2 \cup S^1_\infty \to \overline{T}_{\mathfrak{m}} \cup \partial T_{\mathfrak{m}}$. En particulier, si X est un point de S^1_∞ atteint par une feuille de $\mathfrak{L}$, alors $\mathcal{Q}(X)$ est précisément le point de T défini par cette feuille.

Théorème 10 ([8]). *Si $T \in \overline{cv}_N$ est à orbites denses, alors*

$$L^2(T) \;=\; \{(X, Y) \in \partial^2 F_N \mid \mathcal{Q}(X) = \mathcal{Q}(Y)\}.$$

On désigne par $\partial F_N / L^2(T)$ le quotient du bord ∂F_N par la relation d'équivalence : $X \sim Y$ si, et seulement si, $(X, Y) \in L^2(T)$. D'après le théorème 10, l'application $\mathcal{Q}$ induit une bijection F_N-équivariante de $\partial F_N / L^2(T)$ sur $\widehat{T}$.

Théorème 11 ([6]). *Soit $T \in \overline{cv}_N$ à orbites denses. L'application F_N-équivariante surjective $\mathcal{Q} : \partial F_N \to \widehat{T}^{obs}$ est continue. De plus, si l'on munit $\partial F_N / L^2(T)$ de la topologie quotient, l'application $\mathcal{Q}$ induit un homéomorphisme F_N-équivariant*

$$\partial F_N / L^2(T) \longrightarrow \widehat{T}^{obs}.$$

Fait 12. *Le théorème 11 montre que $\widehat{T}^{obs}$ est entièrement déterminé par $L^2(T)$. Mais T (ou $\widehat{T}$) n'est pas déterminé par $L^2(T)$, (cf [4]).*

Par exemple, si $\mathfrak{L} \subset S$ est une lamination géodésique minimale, qui remplit S, et non uniquement ergodique (de telles laminations existent, *cf.* [17, 13]), deux mesures ergodiques $\mathfrak{m}_1$ et $\mathfrak{m}_2$ projectivement distinctes sur $\mathfrak{L}$ donnent lieu à deux arbres duaux T_1 et T_2 dans $\overline{\mathrm{cv}}_N$, à orbites denses, qui ont la même lamination duale $L^2(T_1) = L^2(T_2)$ (*i.e.* $\widehat{T}_1^{\mathrm{obs}} = \widehat{T}_2^{\mathrm{obs}}$). Mais on montre dans [4] qu'il n'existe pas d'homéomorphisme F_N-équivariant entre T_1 et T_2.

4. La distance duale sur T

Soit $T \in \overline{\mathrm{cv}}_N$ à orbites denses. Alors $\mathcal{Q} : \partial F_N \to \widehat{T}$ induit une application F_N-équivariante $\mathcal{Q}^2 : L^2(T) \to \overline{T}$. Bien que l'application $\mathcal{Q}$ ne soit pas en général continue, on a :

Proposition 13 ([8]). *L'application $\mathcal{Q}^2 : L^2(T) \to \overline{T}$ est continue.*

Considérons un courant μ porté par $L^2(T)$: $\mathrm{Supp}(\mu) \subset L^2(T)$. Puisque $\mathcal{Q}^2$ est continue, on peut transporter μ par $\mathcal{Q}^2$: on obtient une mesure de Borel F_N-invariante $\mu_{\overline{T}}$ sur $\overline{T}$. On définit une « pseudo-distance » sur $\overline{T}$, en posant :

$$d_\mu(x, y) = \mu_{\overline{T}}([x, y]) \quad \left(= \mu\left((\mathcal{Q}^2)^{-1}([x, y])\right)\right)$$

pour tout $x, y \in \overline{T}$. On parle de « pseudo-distance » car, a priori, deux points distincts peuvent être à distance d_μ nulle ou infinie.

Fait 14. *Soit $(\mathfrak{L}, \mathfrak{m})$ une lamination géodésique mesurée sur une surface S. On désigne par $T_{\mathfrak{m}}$ l'arbre dual (et par $d_{\mathfrak{m}}$ la distance sur $T_{\mathfrak{m}}$). La mesure transverse $\mathfrak{m}$ définit un courant $\mu_{\mathfrak{m}}$ qui vérifie Supp$(\mu_{\mathfrak{m}}) \subset L^2(\mathfrak{L}) \subset L^2(T_{\mathfrak{m}})$. Dans ce cas, on a :*

$$d_{\mu_{\mathfrak{m}}} = d_{\mathfrak{m}}$$

Cette parfaite dualité n'a plus cours, en toute généralité, pour un arbre réel quelconque. Dans la section suivante, on explique comment contruire un contre-exemple.

5. Un exemple d'arbre dont la distance duale diffère de la distance

Un automorphisme φ de F_N est dit à puissances irréductibles (ou *iwip*) s'il n'existe pas de facteur libre propre non-trivial de F_N qui soit envoyé sur un conjugué de lui-même par une puissance (positive) de φ.

Fait 15. *Si $\varphi \in Aut(F_N)$ est iwip, alors il existe un unique (à homothétie près) arbre réel T_φ muni d'une action très petite, laissé projectivement invariant, avec un facteur de dilatation $\lambda_\varphi > 1$: pour tout $w \in F_N$, on a*

$$\|\varphi(w)\|_{T_\varphi} = \lambda_\varphi \|w\|_{T_\varphi} .$$

De plus T_φ est à orbites denses.

Les automorphismes iwip de F_N sont considérés comme les analogues, pour le groupe libre, des homéomorphismes pseudo-Anosov d'une surface hyperbolique. Plus précisément, si S est une surface possédant une seule composante de bord, alors un homéomorphisme pseudo-Anosov f de S induit un automorphisme φ iwip sur $F_N = \pi_1(S)$. L'homéomorphisme f fixe deux laminations géodésiques mesurées, la lamination stable $(\mathfrak{L}^+, \mathfrak{m}^+)$ et la lamination instable $(\mathfrak{L}^-, \mathfrak{m}^-)$: il existe un facteur $\lambda_f > 1$ tel que $f_*\mathfrak{m}^+ = \lambda_f^{-1}\mathfrak{m}^+$ et $f_*\mathfrak{m}^- = \lambda_f \mathfrak{m}^-$ (cf [9, 2]). Dans ce cas $T_\varphi = T_{\mathfrak{m}^-}$, $T_{\varphi^{-1}} = T_{\mathfrak{m}^+}$, $\lambda_\varphi = \lambda_{\varphi^{-1}} = \lambda_f$.

Fait 16. *Il existe des automorphismes iwip φ de F_N tels que $\lambda_\varphi \neq \lambda_{\varphi^{-1}}$.*

C'est par exemple le cas de l'automorphisme de $F_3 = \langle a, b, c\rangle$ défini par $\varphi(a) = ab$, $\varphi(b) = ac$, $\varphi(c) = a$. Mais on en connait aussi des familles (par exemple, celles des automorphisme dit « parageométriques »).

Considérons un tel automorphisme φ. Cet automorphisme agit sur l'arbre réel T_φ en multipliant la distance par un facteur λ_φ. D'autre part, la lamination duale $L^2(T_\varphi)$ est uniquement ergodique, i.e. porte, à multiplication par un scalaire non nul près, un seul courant μ (c'est un fait général pour tous les automorphismes iwip). On peut montrer que φ agit sur $L^2(T_\varphi)$ en multipliant le courant μ par $\lambda_{\varphi^{-1}}$. Donc φ agit sur T_φ en multipliant la distance duale $d_* = d_\mu$ par $\lambda_{\varphi^{-1}}$. C'est la clé de la preuve du :

Théorème 17 ([5]). *Si $\varphi \in Aut(F_N)$ est iwip avec $\lambda_\varphi \neq \lambda_{\varphi^{-1}}$, alors la pseudo-distance duale d_* est totalement dégénérée sur T_φ : soit $d_*(x,y) = 0$ pour tout $x, y \in T_\varphi$, soit $d_*(x,y) = \infty$ pour tout $x, y \in T_\varphi$, $x \neq y$.*

Références

[1] M. Bestvina, *$\mathbb{R}$-trees in topology, geometry, and group theory*, Handbook of geometric topology, North-Holland, Amsterdam, 2002, pp. 55–91.

[2] A. Casson and S. Bleiler, *Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thurston*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 9, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[3] M. Cohen and M. Lustig, *Very small group actions on* **R***-trees and Dehn twist automorphisms*, Topology **34** (1995), no. 3, 575–617.

[4] T. Coulbois, A. Hilion, G. Levitt, and M. Lustig, en préparation.

[5] T. Coulbois, A. Hilion, and M. Lustig, *$\mathbb{R}$-trees and laminations for free groups III : Currents and dual $\mathbb{R}$-tree metrics*, preprint available on http ://junon.u-3mrs.fr/hilion/, 2005.

[6] ———, *Non uniquely ergodic r-trees are topologically determined by their algebraic lamination*, preprint available on http ://junon.u-3mrs.fr/hilion/, 2005.

[7] ———, *$\mathbb{R}$-trees and laminations for free groups I : Algebraic laminations*, arXiv :math.GR/0609416, 2006.

[8] ———, *$\mathbb{R}$-trees and laminations for free groups II : The dual lamination of an $\mathbb{R}$-tree*, arXiv :math.GR/0702281, 2007.

[9] A. Fathi, F. Laudenbach, and V. Poenaru (eds.), *Travaux de Thurston sur les surfaces*, Astérisque, vol. 66-67, Société Mathématique de France, Paris, 1976.

[10] I. Kapovich, *Currents on free groups*, ArXiv :math.GR/0311053, 2005.

[11] I. Kapovich and M. Lustig, *The actions of $Out(F_k)$ on the boundary of outer space and on the space of currents : minimal sets and equivariant incompatibility*, arXiv :math/0605548, 2006.

[12] Michael Kapovich, *Hyperbolic manifolds and discrete groups*, Progress in Mathematics, vol. 183, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2001.

[13] H. Keynes and D. Newton, *A "minimal", non-uniquely ergodic interval exchange transformation*, Math. Z. **148** (1976), no. 2, 101–105.

[14] G. Levitt and M. Lustig, *Irreducible automorphisms of F_n have north-south dynamics on compactified outer space*, J. Inst. Math. Jussieu **2** (2003), 59–72.

[15] M. Lustig, *$\mathbb{R}$-trees - currents - laminations : a delicate relationship*, preprint, 2007.

[16] P. Shalen, *Dendrology of groups : an introduction*, Essays in group theory, Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 8, Springer, New York, 1987, pp. 265–319.

[17] W. Veech, *Strict ergodicity in zero dimensional dynamical systems and the Kronecker-Weyl theorem* $\bmod 2$, Trans. Amer. Math. Soc. **140** (1969), 1–33.

[18] K. Vogtmann, *Automorphisms of free groups and outer space*, Proceedings of the Conference on Geometric and Combinatorial Group Theory, Part I (Haifa, 2000), vol. 94, 2002, pp. 1–31.

Arnaud Hilion
LATP - UMR 6632
Université Aix-Marseille 3
Avenue de l'escadrille Normandie-Niémen
13397 Marseille Cedex 20 (France) arnaud.hilion@univ-cezanne.fr