Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

GILLES CARRON

Déterminant relatif et la fonction Xi

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 18 (1999-2000), p. 119-124
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1999-2000__18__119_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
Volume **18** (2000) 119–124

DÉTERMINANT RELATIF ET LA FONCTION Xi

Gilles CARRON

Cet exposé présente certains des résultats que j'ai obtenu dans mon article "Déterminant relatif et la fonction Xi", prépublication de l'ENS Lyon, 1999.

1. Comment définir le déterminant du Laplacien?

1.1. Le Laplacien

Soit (M^n,g) une variété riemannienne : le Laplacien Δ de (M,g) est un opérateur différentiel d'ordre deux elliptique agissant sur les fonctions, il est défini par la formule de Green

$$\int_M |du|^2(x)\,\mathrm{dvol}_g(x) = \int_M (\Delta u)(x)u(x)\,\mathrm{dvol}_g(x), \forall\, u \in C_0^\infty(M);$$

Si $(x_1,\dots,x_n)$ sont des coordonnées locales de M et si $g_{i,j} = g(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j})$, $g^{i,j} = g(dx_i,dx_j)$ et $\Theta dx_1\dots dx_n = \mathrm{dvol}_g$, alors

$$\Delta f = -\sum_{i,j} \frac{1}{\Theta}\frac{\partial}{\partial x_j}\Theta\frac{\partial}{\partial x_i} f.$$

Par exemple, sur la droite réelle euclidienne, on a $\Delta f = -\frac{d^2}{dx^2} f$.

1.2. Le spectre

Si (M,g) est compacte sans bord, alors l'équation $\Delta u = \lambda u$ a une solution non nulle si, et seulement si, λ appartient à une suite croissante non bornée :

$$Sp(\Delta) = \{\lambda_0 < \lambda_1 \leqslant \dots \leqslant \lambda_k \leqslant \dots\},$$

où on a répété les valeurs propres selon leur multiplicité.

Classification math. : 58J50, 58J32, 58J20, 47A40.

On aimerait définir pour $z \in \mathbb{C}$ le polynôme caractéristique du Laplacien :

$$\text{“}\det(\Delta - z) = \prod(\lambda_i - z)\text{”}.$$

Ce produit infini ne converge pas ! Pour donner un sens à ce produit, on utilise la ζ-régularisation :

$$\text{“}\log\det(\Delta - z) = \sum_i \log(\lambda_i - z) = -\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \sum_i (\lambda_i - z)^{-s}\text{”}.$$

Plus rigoureusement, suivant Ray-Singer ([R-S]), on définit la fonction $\zeta(s,z) = \sum_i (\lambda_i - z)^{-s}$; c'est une fonction holomorphe sur le demi-plan $\{s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s) > n/2\}$. En effet l'asymptotique de Weyl :

$$\mathrm{card}\{i,\ \lambda_i \leqslant \lambda\} \simeq (\mathrm{vol}\, M)\frac{i^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)},\ \lambda \to \infty$$

nous assure que cette série converge sur ce demi-plan. De plus, cette fonction $s \mapsto \zeta(s,z)$ admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ qui est en fait holomorphe dans un voisinage de 0.

On pose donc

$$\det(\Delta - z) = e^{-\frac{d}{ds}|_{s=0}\zeta(s,z)}.$$

Cette fonction est en fait holomorphe sur $\mathbb{C}$ et s'annule précisément sur $Sp(\Delta)$.

L'argument essentiel pour montrer le prolongement analytique de la fonction ζ est le suivant : soit $Z_M(t) = \sum_i e^{-t\lambda_i}$, c'est la trace de l'opérateur de la chaleur $e^{-t\Delta}$. On a alors

$$\zeta(s,z) = \int_o^\infty t^{s-1} Z_M(t) e^{tz} \frac{dt}{\Gamma(s)}.$$

Lorsque $t \to 0^+$, la fonction $Z_M(t)$ a un développement asymptotique (dit de Minakshisundaran-Pleijel)

$$Z_M(t) \simeq \sum_{j \geqslant 0} t^{j-n/2} a_j,\ t \to 0^+.$$

Un petit exercice de calcul intégral (plusieurs intégrations par parties) permet de montrer que ce développement asymptotique implique que la fonction ζ a un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ et qu'elle est holomorphe en 0.

1.3. Le déterminant relatif

Supposons désormais que (M^n,g) est une variété riemannienne complète ; alors le Laplacien $\Delta : C_0^\infty(M) \longrightarrow C_0^\infty(M)$ a une unique extension autoadjointe à $L^2(M, \mathrm{dvol}_g)$; on note cette extension Δ_M. Le spectre de Δ_M n'est pas discret, et on a des difficultés pour définir en général, le déterminant de Δ_M. Ce qu'on peut définir est le déterminant relatif :

soit $\mathcal{O} \subset M$ un ouvert borné à bord C^∞, on considère alors $\Delta_{M-\mathcal{O}}$ qui est la réalisation autoadjointe du Laplacien sur $M - \mathcal{O}$ pour les conditions de Dirichlet sur $\partial\mathcal{O}$.

THÉORÈME 1.1. — *Suivant W. Müller ([Mu 2]), on peut définir* det $(\Delta_M - z, \Delta_{M-\mathcal{O}} - z)$.

L'argument principal dû à U. Bunke ([B]) est que l'opérateur $e^{-t\Delta_M} - e^{-t\Delta_{M-\mathcal{O}}}$ est un opérateur à trace pour tout $t > 0$, et que la trace de cet opérateur admet un développement asymptotique similaire à celui de Minakshisundaran-Pleijel :

$$\mathrm{Tr}\left(e^{-t\Delta_M} - e^{-t\Delta_{M-\mathcal{O}}}\right) \simeq \sum_{j\geqslant 0} t^{(j-n)/2} a_j, t \to 0^+.$$

Ceci permet de montrer que la fonction

$$\zeta(s,z) = \int_0^\infty t^{s-1}\,\mathrm{Tr}\left(e^{-t\Delta_M} - e^{-t\Delta_{M-\mathcal{O}}}\right) e^{tz} \frac{dt}{\Gamma(s)}.$$

admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ et qu'elle est holomorphe dans un voisinage de 0. Et on définit alors

$$\det(\Delta_M - z, \Delta_{M-\mathcal{O}} - z) = e^{-\frac{d}{ds}\big|_{s=0}\zeta(s,z)}.$$

Lorsque (M,g) est une variété compacte, ce déterminant est simplement le quotient des déterminants régularisés de $\Delta_M - z$ et $\Delta_{M-\mathcal{O}} - z$: $\det(\Delta_M - z, \Delta_{M-\mathcal{O}} - z) = \det(\Delta_M - z)/\det(\Delta_{M-\mathcal{O}} - z)$.

2. Une formule à la "Burghelea-Kappeler-Friedlander"

L'objet de cet exposé est ce déterminant relatif. Le premier résultat est une formule *à la* "Burghelea-Kappeler-Friedlander" ; cette formule relie ce déterminant relatif à celui de l'opérateur Dirichlet-to-Neumann :

2.1. L'opérateur de Dirichlet-to-Neumann

DÉFINITION 2.1. — *Soit $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_+$, alors l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann $\mathcal{N}(z) : C^\infty(\partial\mathcal{O}) \longrightarrow C^\infty(\partial\mathcal{O})$ est défini de la façon suivante : si $f \in C^\infty(\partial\mathcal{O})$ alors il y a une unique fonction $\tilde{f} \in L^2(M)$ telle que*

$$\begin{cases} (\Delta - z)\tilde{f} = 0 & \text{sur } M - \partial\mathcal{O} \\ \tilde{f} = f & \text{le long de } \partial\mathcal{O} \end{cases}$$

La fonction $\tilde{f}$ est alors continue sur M et sa dérivée présente un saut le long de $\partial\mathcal{O}$, alors $\mathcal{N}(z) f$ est précisément ce saut :

$$\mathcal{N}(z) f = \left(\frac{\partial}{\partial n^+}\tilde{f}|_{\mathcal{O}} + \frac{\partial}{\partial n^-}\tilde{f}|_{M-\mathcal{O}}\right),$$

où n^+ et n^- sont les normales unitaires extérieures le long de $\partial\mathcal{O}$.

Par exemple, sur la droite réelle euclidienne avec $\mathcal{O} = \{0\}$, la solution de l'équation

$$-\frac{d^2}{dx^2}u(x) - k^2u(x) = 0,\ x \neq 0$$

est $u(x) = C^{te}e^{ik|x|}$ si on a choisi $\mathrm{Im}(k) > 0$. Alors $\mathcal{N}(k^2)$ est simplement la multiplication par $-2ik$.

Il se trouve que $\mathcal{N}(z)$ est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 1 elliptique inversible et de symbole principal scalaire positif. Ceci permet de définir le déterminant de l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann. Et on a le résultat suivant :

THÉORÈME 2.2. — *Il y a un polynôme à coefficients réels P de degré inférieur à $(n-1)/2$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_+$*

$$\det\,(\Delta_M - z, \Delta_{M-\mathcal{O}} - z) = e^{P(z)}\det\mathcal{N}(z)\det\,(\Delta_{\mathcal{O}} - z).$$

En dimension 1, ce résultat est dû à Levit-Smilansky ([L-S]), sur les surfaces compactes, il est dû à R. Forman ([F]) et à D. Burghelea, L. Friedlander, T. Kappeler ([B-F-K]) ; de plus D. Burghelea, L. Friedlander et T. Kappeler montrent que ce polynôme est nul. Un résultat analogue a été montré par Hassell et Zelditch sur $\mathbb{R}^2$, il montre de plus que ce polynôme est nul ([H-Z]).

3. Déterminant relatif et la fonction de décalage spectrale

Ceci était à ma connaissance inconnu en dimension supérieure. Ce théorème qui affirme qu'un déterminant vaut un autre déterminant peut sembler platonique. On s'attend plutôt à ce que ce déterminant relatif soit relié aux spectres de Δ_M et $\Delta_{M-\mathcal{O}}$, puisqu'il est sensé généraliser la notion de polynôme caractéristique ; nous avons le théorème suivant :

THÉORÈME 3.1. — *La limite*

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\pi}\ \mathrm{Argdet}\ (\Delta_M - \lambda + i\varepsilon, \Delta_{M-\mathcal{O}} - \lambda + i\varepsilon) = \xi(\lambda)$$

existe pour presque tout $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction ξ est localement intégrable et si ν est un entier strictement plus grand que $n/2$, alors $\int |\xi(\lambda)|(1+\lambda)^{-\nu-1}d\lambda < \infty$. Et si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dans l'espace de Schwarz, alors l'opérateur $f(\Delta_M) - f(\Delta_{M-\mathcal{O}})$ est à trace et

$$\mathrm{Tr}\,(f(\Delta_M) - f(\Delta_{M-\mathcal{O}})) = -\int_0^\infty \xi(\lambda)f'(\lambda)d\lambda.$$

Cette fonction ξ est la fonction de décalage spectral introduite par M.G. Krein, elle est très utilisée en théorie spectrale en présence de spectre continu (cf. ([BK], [B-Y], [K1], [K2]) pour plus de détail sur cette fonction). Cette fonction ξ peut être vue comme une version régularisé de la fonction de comptage des valeurs propres. Si M était une variété compacte, on aurait $\xi(\lambda) = N_{M-\mathcal{O}}(\lambda) - N_M(\lambda)$, où $N_{M-\mathcal{O}}(\lambda)$ et $N_M(\lambda)$ sont les fonctions de comptages des valeurs propres de $\Delta_{M-\mathcal{O}}$ et Δ_M, c'est-à-dire $N_M(\lambda) = \mathrm{card}\{\mu \in Sp\Delta_M, \mu \leqslant \lambda\}$. Ce dernier théorème était même inconnu dans le cas euclidien. La formule *à la* "Burghelea-Kappeler-Friedlander" conjugué à ce dernier théorème peut alors être utilisé dans certains cas, pour obtenir l'allure en zéro de la fonction de décalage spectral, ce qui est très délicat.

4. Un analogue de la formule de Weyl

Le comportemant à l'infini de cette fonction ξ obéit à un analogue de la formule de Weyl :

THÉORÈME 4.1. — *Lorsque Λ tend vers l'infini, on a*

$$\int_0^\Lambda \xi(\lambda, \Delta, \Delta_{M-\mathcal{O}})\, d\lambda \sim - \frac{\mathrm{vol}\, \mathcal{O}}{(4\pi)^{n/2}} \frac{\Lambda^{n/2+1}}{\Gamma(n/2+2)}.$$

La fonction de décalage spectral est une version régularisée de la fonction de comptage des valeurs propres : c'est donc à l'asymptotique de Weyl qu'il faudrait s'attendre :

$$-\xi(\lambda, \Delta, \Delta_{M-\mathcal{O}}) \simeq \frac{\mathrm{vol}\, \mathcal{O}}{(4\pi)^{n/2}} \frac{\lambda^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}.$$

Cette asymptotique de Weyl a été obtenue dans de nombreux cadres géométriques : le cadre euclidien ([Bu], [J-K], [M-R], [CdV], [Gu], [P-P], [Me], [R], [C1], [C2]) ; pour les variétés à bouts cylindriques ([C-Z], [P1]), pour les surfaces hyperboliques de géométrie finie ([Mu 1], [P2], [G-Z]). Cependant, si ce type d'asymptotique est sûrement faux en général, notre résultat montre que sa version intégrée est toujours vraie.

Bibliographie

[BK] M.Sh Birman, M.G. Krein, on the theory of wave operators and scattering operators, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **144** (1962), 475–478 ; traduction anglaise in *Soviet. Math. Dokl.*, **3** (1962).

[B-Y] M.Sh Birman, D.R. Yafaev, The spectral shift function, the work of M.G. Krein and its further developement, *St. Petersburg Math. J.*, **4** (1993), no 5, 833–870.

[B] U. Bunke, Relative Index theory, *J. Funct. Anal.*, **105** (1992), 63–76.

[B-F-K] D. Burghelea, L. Friedlander, T. Kappeler, Mayer-Vietoris formula for determinants of elliptic operators, *J. Funct. Anal.*, **107** (1992) 34–65.

[Bu] V.S. Buslaev, Scattered plane waves, spectral asymptotics and trace formulae in exterior problems. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **197** (1971) 999–1002 ; traduction anglaise *Soviet Math. Dokl.*, **12** (1971), 591–595].

[C-Z] T. Christiansen, M. Zworski, Spectral asymptotics for manifolds with cylindrical ends, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **45**, (1995), 251–263.

[C1] T. Christiansen, Spectral asymptotics for compactly supported perturbations of the Laplacian on R^n, *Comm. Partial Differential Equations*, **23** (1998), n° 5-6, 933–948.

[C2] T. CHRISTIANSEN, Weyl asymptotics for the laplacian on asymtotically euclidean spaces, *American J. of Math.*, **121** (1999), 1–22.

[CdV] Y. COLIN DE VERDIÈRE, Une formule de trace pour l'opérateur de Schrödinger dans $\mathbb{R}^3$, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, **4** (1981), 27–39.

[F] R. FORMAN, Functional determinants and geometry, *Invent. Math.*, **88** (1987) 447–493.

[Gu] L. GUILLOPÉ, Asymptotique de la phase de diffusion pour l'opérateur de Schrödinger avec potentiel. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **293** (1981), n° 12, 601–603.

[G-Z] L. GUILLOPÉ, M. ZWORSKI, Scattering asymptotics for Riemann surfaces, *Ann. of Math.*, **145** (1997), 597–660.

[H-Z] A. HASSELL, S. ZELDITCH, Determinants of laplacians in exterior domains, IMRN, (1999), n° 18, pp 971–1004.

[J-K] A. JENSEN, T. KATO, Asymptotics behaviour of the scattering phase for exterior domains, *Comm. Partial Differential Equations*, **3** (1978), 1165–1195.

[K1] M.G. KREIN, On the trace formula in perturbation theory, *Mat. Sb.*, **75** (1953), 597–626.

[K2] M.G. KREIN, On perturbation determinants and the trace formula for unitary and selfadjoint operators. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **144** (1962), 268–271 ; traduction anglaise in *Soviet. Math. Dokl.*, **3** (1962).

[L-S] S. LEVIT, U. SMILANSKY, A theorem on infinite products of eigenvalues of Sturm type operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **65**, (1977), 299–303.

[M-R] A. MAJDA, J. RALSTON, An analogue of Weyl's theorem for unbounded domains, I, II, III, *Duke Math. J.*, **45** (1978), 183–196, 513–536 ; **46** (1979), n° 4, 725–731.

[Me] R. MELROSE, Weyl asymptotics for the phase in obstacle scattering, *Comm. Partial Differential Equations*, **13** (1988), 1431–1439.

[Mu 1] W. MÜLLER, Spectral geometry and scattering theory for certain complete surfaces of finite volume, *Invent. Math.*, **109**, (1992), 265–305.

[Mu 2] W. MÜLLER, Relative zeta functions, relative determinants and scattering theory, *Comm. Math. Phys.*, **192** (1998), n° 2, 309–347

[P1] L. B. PARNOVSKI, Spectral asymptotics of the Laplace operator on manifolds with cylindrical ends. *Internat. J. Math.*, **6** (1995), n° 6, 911–920.

[P2] L. B. PARNOVSKI, Spectral asymptotics of Laplace operators on surfaces with cusps. *Math. Ann.*, **303** (1995), n° 2, 281–296.

[P-P] V. PETKOV, G. POPOV, Asymptotic behavior of the scattering phase for non-trapping obstacles, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **32** (1982), 111–149.

[R-S] D.B. RAY, I.M. SINGER, *R*-torsion and the Laplacian on Riemannian manifolds *Advances in Math.*, **7** (1971), 145–210.

[R] D. ROBERT, Sur la formule de Weyls pour les ouverts non-bornés, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **319** (1994), 29–34.

Gilles CARRON
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
UMR5582 (UJF-CNRS)
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)
Gilles.Carron@ens-lyon.fr