SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

JACQUES LAFONTAINE
LUC ROZOY

Courbure scalaire et trous noirs

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 18 (1999-2000), p. 69-76
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1999-2000__18__69_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
Volume **18** (2000) 69–76

COURBURE SCALAIRE ET TROUS NOIRS

Jacques LAFONTAINE & Luc ROZOY

I. Introduction

L'application *Scal* : $g \mapsto s_g$, dont la source est l'espace des métriques riemanniennes sur une variété M, et le but $C^\infty(M)$, qui à une métrique associe sa courbure scalaire, est génériquement une submersion.(¹)

Plus précisément, *Scal* n'est pas une submersion en g si et seulement si l'équation

$$Ddf + (\Delta f)g - f\,\mathrm{Ric} = 0 \tag{$*$}$$

admet une solution f non triviale. ($\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \ldots$ sur $\mathbb{R}^n$ plat). Malgré les contraintes fortes que cette équation impose sur la métrique (voir plus bas), ses propriétés ne sont pas complètement élucidées.

Dans cette note, nous donnons une classification complète des variétés riemanniennes compactes (M, g) de dimension 3, telles que cette équation ait une solution non triviale qui soit de Bott-Morse. Nous espérons que les techniques développées à cette occasion nous permettrons de nous débarrasser de cette hypothèse artificielle.

II. Points de vue riemannien et relativiste

Le premier résultat sur cette équation remonte à 1975. Si M est compacte, la courbure scalaire est une constante non négative, et $\frac{s_g}{n-1}$ est une valeur propre du Laplacien Δ

Classification math.: 51H99, 53A30, 53C25, 53C80, 83C57.

(¹) Cette propriété joue un rôle clé dans les travaux de J. Kazdan et F. Warner, qui ont caractérisé dans [K-W] l'image de l'application *Scal* pour une variété compacte donnée.

(A. Fisher et J. Marsden, [F-M], amélioré par J.-P. Bourguignon, [Bo]).

Puis O. Kobayashi (cf. [K]) et le premier auteur (cf. [La1]) ont classé, indépendamment, les solutions conformément plates. Le résultat s'énonce ainsi :

THÉORÈME 1 (cf. [K] et [La1]). — *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte telle que $(*)$ ait une solution non triviale. Si la métrique g est conformément plate, on est dans l'une des situations suivantes :*

- *soit (M, g) est isométrique à la sphère standard ;*
- *soit (M, g) est plate ;*
- *soit (M, g) est revêtue (au sens riemannien) par un produit tordu $(S^1 \times S^{n-1}, dt^2 + h(t)^2 g_0)$, où g_0 est la métrique standard de S^{n-1}, et la fonction h telle que la courbure scalaire de $dt^2 + h(t)^2 g_0$ soit une constante strictement positive.*

Notons par ailleurs qu'il existe des exemples non conformément plats compacts pour tout $n \geq 5$ (cf. [La1]), et locaux pour $n = 3$ (cf. [La2])

Ce qui précède fournit de bonnes motivations pour étudier plus particulièrement le cas de la dimension 3. En fait, le résultat annoncé dans l'introduction s'obtient en combinant le théorème 1 et le résultat suivant.

THÉORÈME 2. — *Si (M, g) est une variété compacte de dimension 3 telle que $(*)$ ait une solution non triviale qui est une fonction de Bott-Morse, alors la métrique g est conformément plate.*

L'hydrostatique relativiste utilise comme modèle $]a, b[\times \mathcal{V}_3$ avec comme métrique $-f^2 dt^2 + g$ et les équation d'Einstein imposent à la métrique g de $\mathcal{V}_3$ de vérifier

$$f\mathrm{Ric} = Ddf + \frac{\chi}{2}(\rho - p)g \text{ et } \Delta f = -\frac{3p+\rho}{2}f$$

où p et ρ sont la pression et la densité du fluide, χ la constante gravitationnelle. Pour $p + \rho = 0$ on retrouve exactement le système $(*)$. Les niveaux $f = 0$ du problème $(*)$ (les ensembles nodaux d'une fonction propre particulière) sont les horizons des trous noirs de l'hydrostatique relativiste pour un fluide exotique. Si l'on impose à la pression et la densité d'être non négatives, Lichnerowics a montré qu'il n'existe pas de modèle compact de l'hydrostatique. En acceptant l'équation $p + \rho = 0$, la compacité est possible, et les travaux relativistes ont des implications sur le système $(*)$.

Pour commencer il existe des atlas analytiques où f est aussi analytique, voir l'article de Müller zum Hagen à propos de l'analycité des solutions statiques du vide des équations d'Einstein, résultat qui s'étend pour un fluide parfait dont l'équation d'état est analytique, ce qui est notre cas : $p + \rho = 0$.

Ensuite le théorème recherché est l'exacte traduction de la maxime relativiste "les trous noirs n'ont pas de cheveux", maxime qui possède des preuves rigoureuses qui nous donneront un argument clef. Sous jacentes à ces preuves se trouvent les propriétés conformes des espaces riemanniens de dimension trois par lesquelles nous commencerons avant d'ajouter un autre argument géométrique ; celui des ombilics.

III. Le tenseur de Cotton

Pour un espace euclidien E de dimension 3, l'application

$$c : S^2E \longrightarrow \Lambda^2 E \overset{S}{\otimes} \Lambda^2 E$$

définie par

$$c(h)(x,y,z,t) = h(x,z)g(y,t) + h(y,t)g(x,z) - h(y,z)g(x,t) - h(x,t)g(y,z)$$

est un $O(E)$ morphisme bijectif.

Si l'on pose $S = \text{Ricci} - \frac{R}{2(n-1)}g$ (tenseur de Schouten), le tenseur de courbure pour $n = 3$ vaut $c(S)$ (voir [G-H-L], pp. 150–154) ; le tenseur $d^D S(x,y,z) = D_x S(y,z) - D_y(x,z)$ (où D est la dérivée covariante) est un invariant conforme dont la nullité caractérise les variétés conformément plates. Ce tenseur se réinterprète comme un 2-tenseur symétrique à trace nulle : si E est orienté, $\Lambda^2 E \otimes E$ est isomorphe, en tant que $SO(3)$-module, $E \otimes E$ (on reconnaît le produit vectoriel) et les composantes irréductibles de $\Lambda^2 E \otimes E$ s'identifient naturellement au moyen de $SO(3)$ morphismes à E, $S_0^2 E$ et $\mathbb{R} \cdot g$. De plus, $d^D S$ appartient à la composante irréductible isomorphe à l'espace des tenseurs symétrique de trace nulle $S_0^2 E$.

Conclusion.

$$C(x \wedge y, z) = D_x S(y,z) - D_y S(x,z)$$

définit un tenseur symétrique de trace nulle (sa divergence aussi est nulle mais ce résultat ne sera pas utilisé ici). Ce tenseur s'appelle *le tenseur de Cotton.*

Nous allons le calculer dans le cas où l'équation $(*)$ admet une solution non triviale.

En tout point, considérons deux repères orthonormés de l'espace tangent : un repère $R_e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ qui diagonalise Ricci, et un repère (si nous sommes en un point où $\nabla f \neq 0$) $R_y = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3 = \frac{\nabla f}{|\nabla f|})$ tel que $\vec{y}_1$ et $\vec{y}_2$ donnent les directions de courbure de $\mathcal{S}_k$ au point considéré et $W = |\nabla f|^2$. Ces deux repères ne sont pas forcément uniques, mais en chaque point il existe toujours de tels repères. Comme nos considération seront locales, limités à un voisinage d'un ombilic, nous choisirons aussi une orientation locale de l'espace, et les repères seront directs.

$$-f d^D \text{Ric} = (i_{\nabla f} T) \wedge g + 2(df) \wedge T$$

si T est la partie sans trace de Ricci et si le produit entre une 1-forme A et une deux forme symétrique B est donnée par $A \wedge B(x, y, z) = A(x)B(y, z) - A(y)B(x, z)$ et où $(i_{\nabla f} T)$ désigne le produit intérieur entre ∇f et T.

Exprimons cette dernière relation dans la base R_e, nous obtenons la matrice C_e qui représente Cotton dans la base R_e :

$$C_e = \begin{pmatrix} 0 & \frac{c(r_2-r_1)}{f} & \frac{b(r_1-r_3)}{f} \\ \frac{c(r_2-r_1)}{f} & 0 & \frac{a(r_3-r_2)}{f} \\ \frac{b(r_1-r_3)}{f} & \frac{a(r_3-r_2)}{f} & 0 \end{pmatrix},$$

avec $\nabla f = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_2$ et r_1, r_2 et r_3 les valeurs propres de Ricci.

Dans la base R_y le tenseur de Cotton est représenté par la matrice C_y

$$C_y = \begin{pmatrix} 0 & \frac{W(C_2-C_1)}{f^2} & \frac{\nabla_{\vec{y}_2}(W)}{f^2} \\ \frac{W(C_2-C_1)}{f^2} & 0 & -\frac{\nabla_{\vec{y}_1}(W)}{f^2} \\ \frac{\nabla_{\vec{y}_2}(W)}{f^2} & -\frac{\nabla_{\vec{y}_1}(W)}{f^2} & 0 \end{pmatrix},$$

où C_2 et C_1 sont les courbures principales de la surface $S_k = f^{-1}(k)$ au point considéré.

Donc pour annuler Cotton, il faut annuler $C_1 - C_2$. D'où la recherche d'ombilics.

IV. L'argument des ombilics

La difficulté du problème vient de ce que, au vu de la classification du théorème 1, il existe essentiellement (écartant le cas sans intérêt des solutions constantes non nulles, qui donnent les variétés plates) deux modèles de références, celui de la sphère standard et celui des produits tordus. Leur point commun est le fait que les niveaux $f = C^{te}$ définissent un feuilletage (éventuellement singulier) par des sphères totalement ombilicales : pour la sphère standard $S^3 \subset \mathbf{R}^4$, f est la restriction d'une forme linéaire, et pour un produit tordu $f = \lambda h'$ (λ une constante). L'idée principale est de construire un modèle de référence à partir d'une ligne constituée d'ombilics des surfaces de niveau.

Soit S_0 une composante connexe du bord de $f^{-1}(0)$.

Proposition. — *Sur S_0, $df \neq 0$ et S_0 est totalement géodésique.*

Preuve. — On pose $\Phi = f \circ \gamma$ pour γ une géodésique. Alors comme $\mathrm{Hess}(f) = f(\mathrm{Ricci} - \frac{R}{2}g)$ on obtient $\ddot{\Phi} + F\Phi = 0$ où F est une fonction lisse définie le long de la géodésique via Ricci et la métrique. Partons d'un point a tel que $f(a) = 0$ et $df_a = 0$ et dans n'importe quelle direction. Alors $\Phi(t) = f(\exp_a(tv))$ pour $v \in T_a^*V$ vérifie $\Phi(0) =$

$\dot{\Phi}(0) = 0$ et donc f est identiquement nulle le long de toute géodésique partant de a. Contradiction, (on veut f non identiquement nulle) et donc $\mathcal{S}_0$ est une sous variété, mais comme pour $f = 0$ on obtient $\mathrm{Hess}(f) = 0$, $\mathcal{S}_0$ est aussi totalement géodésique.

On a de plus le résultat suivant de Y. Shen (cf. [Sh]).

THÉORÈME. — *La caractéristique d'Euler de $\mathcal{S}_0$ est strictement positive.*

Appelons "surface de Shen" une composante connexe du bord de $[f > 0]$. Soit maintenant $\mathcal{S}_k$ une composante connexe du niveau $[f = k]$ proche d'une surface de Shen $\mathcal{S}_0$, donc aussi de caractéristique d'Euler 1 ou 2. Si $\mathcal{S}_k$ indétermine ses lignes de courbure la situation est aisée à traiter même si $\mathcal{S}_k$ est isolée comme surface de niveau qui indétermine ses lignes de courbure : l'argument opère alors entre $\mathcal{S}_0$ et cette surface. Si toutes les $\mathcal{S}_k$ indéterminent leurs lignes de courbure (au moins dans un ouvert) [La1] conduit au résultat. L'analycité permet si $\mathcal{S}_k$ n'indétermine pas ses lignes de courbure de compléter éventuellement les familles des lignes de courbures de $\mathcal{S}_k$ par des lignes d'ombilics d'indice nul en deux familles de lignes tracées sur $\mathcal{S}_k$ qui définissent deux champs de directions sur tout $\mathcal{S}_k$, sauf en un nombre fini de points singuliers où ces champs n'existent pas (ce sont des ombilics de $\mathcal{S}_k$ d'indice non nul). Le théorème de Poincaré-Hopf (pour la dimension deux et des champs de directions) nous affirme que la somme des indices des ombilics de $\mathcal{S}_k$ vaut 1 ou 2, et donc qu'il existe au moins un ombilic d'indice positif sur $\mathcal{S}_k$. En faisant varier k entre 0 et la plus petite valeur δ telle qu'il existe un point M avec $\nabla(f)(M) = 0$ et $f(M) = \delta$, ce point ombilic varie et décrit une ligne transverse à chaque $\mathcal{S}_k$ traversée. Une application plus fine du théorème de Poincaré-Hopf sur un domaine à bord, et l'utilisation de la locale finitude des stratifiés de Whitney analytiques réels montre que l'on peut trouver une telle ligne qui soit continue, analytique par morceaux (avec un nombre fini de morceaux) transverse à chaque $\mathcal{S}_k$, et que sur chaque morceau l'indice de l'ombilic est constant et positif.

Pour construire notre modèle de référence à partir d'un tel arc d'ombilics, nous avons besoin d'un résultat encore plus fort :

THÉORÈME. — *En un ombilic d'indice positif de $\mathcal{S}_k$, Cotton= ∇Cotton= 0.*

Si $W = |\nabla f|^2$, alors cette propriété du tenseur de Cotton équivaut, à cause de $(*)$, à deux nullités

– celle des germes d'ordre un et deux de W restreint à $\mathcal{S}_k$,

– celle de la dérivée covariante de la deuxième forme fondamentale de $\mathcal{S}_k$.

Ce résultat est une conséquence des travaux de Brian Smith et Frederico Xavier et des contraintes du problème si l'indice est supérieur ou égal à 1. Il reste alors l'indice $\frac{1}{2}$ à traiter (et une singularité qui ne contient pas de secteurs elliptiques sinon l'argument précédent fonctionne). Nous utilisons alors la théorie du repère mobile et le comportement du déterminant du tenseur C de Cotton autour de l'ombilic : si le germe d'ordre 1 dans $\mathcal{S}_k$ de cette fonction est non nul en l'ombilic, il contrôle explicitement comment les directions de courbure se comportent à la limite en tendant vers l'ombilic, en fonction de la tangente à une courbe de convergence régulière quelconque. Ce qui annule la dérivée covariante de la deuxième forme fondamentale, et annule aussi ce germe d'ordre un du déterminant de C supposé non nul ! Ce germe est donc bien nul et la preuve est réinitialisée avec le même résultat que celui de Brian Smith et Frederico Xavier pour l'indice $\frac{1}{2}$ à cause des contraintes forte du système $(*)$ exploitées via le tenseur de Cotton.

V. Construction du modèle de référence

Soit W_0 la valeur que prend $W = |\nabla f|^2$ au point ombilic d'indice positif de $\mathcal{S}_k$ que nous avons étudié. Décidons de définir sur chaque composante connexe de $[\nabla f \neq 0]$ qui contienne une surface de Shen une fonction notée aussi W_0 constante dans chaque $\mathcal{S}_k$ telle que W_0 soit égale à la valeur donnée par la fonction W en l'ombilic. Nous obtenons ainsi une fonction qui ne dépend que de f, et qui vérifie exactement la même équation différentielle que si nous supposons que la variété est localement conformément plate (ceci à cause de Cotton= ∇Cotton= 0 le long de cette courbe d'ombilics qui est alors une géodésique orthogonale aux $\mathcal{S}_k$). Ce qui nous construit un modèle de référence. Nous pouvons appliquer à cette fonction le même traitement que dans [La1] et par changement de variable revenir à une forme $dt^2 + h^2(t)g_0$ où g_0 est la métrique canonique de S^2 de courbure u_0, et obtenir la même équation différentielle que dans [La1]

$$uh^2 = u_0 - 2h'^2 - 4hh''$$

qui s'intègre en

$$h'^2 = \frac{C}{h} + \frac{u_0}{2} - \frac{u}{6}h^2$$

où C est une constante.

Cette situation est alors complètement guidée pour notre espace modèle grâce à une relation classique de type h'^2 fonction de h et comme f doit rester bornée dans le modèle puisqu'il l'est dans notre variété compacte, la constante d'intégration C est négative et nous disposons d'une partie ouverte d'un modèle conformément plat pour $0 < f < \delta$ où δ est la plus petite valeur non nulle telle qu'il existe un point M où $\nabla f(M) = 0$ et $\delta = f(M)$.

Le théorème à l'origine de "l'âge d'or des trous noir" est le théorème d'Israël, dont l'intuition est relativiste (que devient le champ électromagnétique (les cheveux) dans l'implosion d'une étoile conduisant à un trou noir ?) et la preuve un calcul technique en coordonnées. Beaucoup de travaux ont été consacrés à l'extension de ce résultat et au décryptage de ses significations. La seule conclusion mathématique utilisée ici est que l'on peut réinterpréter la preuve d'Israël grâce à un principe du maximum (divergence positive) où le second membre s'annule avec le tenseur de Cotton, c'est-à-dire $\mathcal{L}(E) = \lambda|\mathrm{Cotton}|^2$ où $\mathcal{L}$ est un opérateur elliptique, λ une quantité positive et E une expression dont la constance implique la locale conforme platitude. Shen innove en introduisant un principe du maximum $\mathcal{L}(E) = \lambda|T|^2$ où T est la partie sans trace de Ricci, mais ce principe du maximum ne peut conduire qu'au cas de la sphère qui annule la partie sans trace du tenseur de Ricci. Le système $(*)$ permet d'exprimer le tenseur de Cotton (défini à partir de ∇Ricci) uniquement en fonction de la partie sans trace de Ricci. C'est l'origine des identités $\mathcal{L}(E) = \lambda|\mathrm{Cotton}|^2$. L'identité de Shen est liée au quotient de Rayleigh et au minimax à cause de l'aspect première valeur propre du Laplacien, mais ce n'est pas le cas chez les relativistes qui se situent dans l'analogue des valeurs propres suivantes..., avec une autre équation d'état ces "valeurs propres" ne sont plus constantes mais le tenseur de Cotton continue à avoir les mêmes propriétés et la situation est très similaire). Nous allons utiliser la méthode de Beig et Simon du cas relativiste pour construire de telles expressions à partir de l'identité de Shen. Leur travail montre que c'est une alternative pour étendre les identités d'Israël si l'on procède par différence avec les identités dans l'espace modèle, généralisant un article de Massod-ul-Alam.

Pour cela il faut d'abord remarquer que

$$|T|^2 = \frac{|\mathrm{Cotton}|^2}{2W} + \frac{3}{8}\left(\frac{\langle\nabla A, \nabla f\rangle}{Wf}\right)^2$$

où T est la partie sans trace du tenseur de Ricci, $A = W + \frac{R}{6}f^2$ l'expression de Shen et R notre courbure scalaire constante positive. Le terme additionnel $\left(\frac{\langle\nabla A,\nabla f\rangle}{Wf}\right)^2$ doit être éliminé : la différence entre l'identité $\mathcal{L}(E) = \lambda|T|^2$ dans l'espace de Riemann et dans l'espace modèle le réintègre dans l'opérateur elliptique en partie, dans une quantité positive qui ne s'annule qu'avec le tenseur de Cotton et finalement aussi dans un terme coeff$(W - W_0)$. L'existence du modèle de référence construit le type d'identité voulue : il est nécessaire de reprendre toute la machinerie de [Be-Si], pour obtenir une identité de la forme $\mathcal{L}(W - W_0) = (\mathrm{coeff})(W - W_0) + |\cdots|^2$ où $|\cdots|^2$ s'annule si et seulement si le tenseur de Cotton est nul. Ensuite nous contrôlons le signe de (coeff) entre une surface de Shen et le premier niveau critique rencontrée à l'aide de l'équation différentielle du paragraphe précédent. C'est exactement la méthode de [Be-Si] sans hypothèse de l'existence de l'espace modèle puisque nous l'avons construit explicitement. Si nous supposons alors que f est de Bott-Morse, la fonction $W - W_0$ est nul sur les bords de l'ouvert ainsi considéré ($W = W_0 = 0$ sur les niveaux critiques d'une telle fonction), la courbe d'ombilic est donc une courbe de maximums de $W - W_0$ à l'intérieur de l'ouvert et nous avons démontré :

THÉORÈME. — *Si (M, g) est une variété compacte de dimension 3 telle que $(*)$ ait une solution non triviale, avec f de Bott-Morse, alors la métrique g est localement conformément plate.*

Bibliographie

[Be-Si] R. BEIG and W. SIMON. — *On the uniqueness of static perfect fluids solutions in general relativity*, Comm. Math. Phys. **144-2** (1992), 373–392.

[Bo] J.-P. BOURGUIGNON. — *Une stratification de l'espace des structures riemaniennes*, Compositio Math. **30** (1975), 1–41.

[Ko] O. KOBAYASHI. — *A differential equation arising from scalar curvature*, J. Math. Soc. Japan **34** (1982), 665–675.

[K-W] J.L. KAZDAN and F.W. WARNER. — *A direct approach to the determination of Gaussian and scalar curvature functions*, Inventiones Math. **28** (1975), 227–230.

[La1] J. LAFONTAINE. — *Sur la géométrie d'une généralisation de l'équation différentielle d'Obata*, J. de Math. pures et appliquées **62** (1983), 63–72.

[La2] J. LAFONTAINE. — *A remark on static space times*, Preprint, Erwin Schrödinger Institute, Vienne, 1998.

[Sh] Y. SHEN. — *A note on Fischer-Marsden's conjecture*, Proc. of the Amer. Math. Soc. **125** (1997), 901–905.

[Sm-Xa] B. SMITH and F. XAVIER. — *A sharp geometric estimate for the index of an umbilic on a smooth surface*, Bull London Math. Soc. **24-2** (1992), 176–180.

Jacques LAFONTAINE
Département de Mathématiques, Case 51
CNRS, ESA 5030
Université de Montpellier
F-34095 MONTPELLIER Cedex 5 (France)
jaclaf@math.univ-montp2.fr

Luc ROZOY
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
UMR5582 CNRS-UJF
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)
rozoy@ujf-grenoble.fr