Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Bruno Colbois

Une caractérisation spectrale des nilvariétés

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 18 (1999-2000), p. 65-67
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1999-2000__18__65_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
Volume 18 (2000) 65–67

UNE CARACTÉRISATION SPECTRALE DES NILVARIÉTÉS

Bruno COLBOIS

Ce texte fait suite à un exposé donné en janvier 2000 au séminaire de théorie spectrale et géométrie et qui visait à présenter les résultats de [CGR1]. À la suite de l'exposé, des discussions avec E. Aubry et S. Gallot ont permis d'améliorer sensiblement [CGR1]. On en présente ici les grandes lignes, en se référant à [CGR2] pour les détails (voir aussi [A]). Ces deux dernières prépublications seront réunies en vue d'une publication ([ACGR]). Dans la suite, on se réfère à [GHL] pour les questions de géométrie riemannienne.

Si (M, g) désigne une variété riemannienne complète, on sait qu'il existe de nombreuses interactions entre la géométrie de (M, g), en particulier sa courbure, et la topologie de M. On pense par exemple au théorème de Myers :

THÉORÈME. — *Soit (M, g) une variété riemannienne complète de dimension n dont la courbure de Ricci vérifie* $\mathrm{Ric}(M, g) \geq (n-1)C^2 g$, $C > 0$. *Alors* $\mathrm{diam}(M, g) \leq \pi/C$. *En particulier M est compacte et son groupe fondamental est fini.*

De même, on sait que le spectre des opérateurs différentiels que l'on peut définir sur (M, g) (laplacien, opérateur de Dirac) interagit avec la topologie de M. Par exemple, si M est compacte, la dimension de l'espace des p-formes harmoniques, c'est-à-dire du noyau du laplacien agissant sur les p-formes différentielles est un invariant topologique, le p-ième nombre de Betti de M, aussi dimension de la cohomologie de De Rham réelle en degré p.

En combinant ces deux approches, on est arrivé au très classique théorème de Bochner qui a donné lieu à de nombreux développements. Ce théorème dit que le premier nombre de Betti d'une variété riemannienne compacte de dimension n à courbure de Ricci positive est inférieur ou égal à n, avec égalité si, et seulement si, la variété est isométrique à un tore plat. La preuve est une conséquence de la formule de Weitzenböck (cf. [GHL], p. 133).

On a cherché à généraliser ce théorème en relaxant un peu l'hypothèse sur la courbure de Ricci, en fait en acceptant que la courbure de Ricci soit « un peu » négative en

Classification math. : 58G25, 53C20.

comparaison du diamètre. Ainsi, Gallot et Gromov ont obtenus une inégalité de Bochner pour le premier nombre de Betti de M sous l'hypothèse $\mathrm{diam}^2(M,g)\,\mathrm{Ric}(M,g) \geq -\varepsilon(n)$, où $\varepsilon(n)$ est une constante positive ne dépendant que de n (on dit que la courbure de Ricci est «presque positive»). En cas d'égalité, la variété (M,g) n'a plus aucune raison d'être isométrique à un tore plat. En revanche, on peut espérer que M soit difféomorphe à un tore, et cette question très difficile n'a été résolue positivement que très récemment par Cheeger et Colding ([CC], p. 459). Encore faut-il noter que l'on ne maîtrise pas, dans ce cas, la géométrie de (M,g) : on ne sait pas si elle est «proche» de celle d'un tore plat.

Une autre généralisation, due à Gallot et Meyer [GM], consiste à contrôler non plus la dimension des formes harmoniques, mais le nombre de valeurs propres pour le laplacien agissant sur les 1-formes différentielles sous l'hypothèse «Ricci presque positive».

Nous nous sommes penchés sur une question un peu différente. Sous l'hypothèse «courbure de Ricci presque positive», que dire de la topologie de M si l'on a non pas n 1-formes harmoniques, mais n valeurs propres «très petites» pour le laplacien agissant sur les 1-formes différentielles? De manière plus générale, cette question s'inscrit dans la ligne de comprendre si l'on peut tirer une information topologique du fait qu'il y a des valeurs propres petites (mais non nécessairement nulles) pour le laplacien agissant sur les formes différentielles. Notons que dans notre cas, passer des 1-formes harmoniques aux 1-formes propres avec petite valeur propre n'est pas trivial : les exemples bien connus de nilvariétés admettent en effet des métriques à diamètre 1, courbure de Ricci arbitrairement proche de 0, et qui possèdent n valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ arbitrairement petites pour les 1-formes, sans que les nilvariétés en question soient difféomorphes à un tore. Rappelons qu'une nilvariété est le quotient Γ/G d'un groupe de Lie nilpotent G par un sous-groupe discret Γ de G. Les métriques invariantes à gauche du groupe de Lie G passent au quotient.

Notre résultat principal dit que, sous une hypothèse supplémentaire pour la norme du tenseur de courbure, ce sont les seules possibilités. En outre, un exemple montre que cette hypothèse supplémentaire est nécessaire.

Théorème ([CGR2], thm. 2.1). — *On considère une variété M de dimension n. Pour tous nombres positifs k_0, p tels que $n < p \leq \infty$, il existe une constante positive $\varepsilon_0(k_0, n, p)$ telle que les assertions suivantes soient vérifiées : on suppose que (M,g) est telle que*

$$\begin{aligned} \mathrm{diam}(M,g) &\leq d \\ \|R\|_{p/2} d^2 &\leq k_0 \text{ où } R \text{ désigne le tenseur de courbure de } (M,g) \\ \mathrm{Ric}(M,g) d^2 &\geq -\varepsilon \text{ avec } \varepsilon \geq 0\,. \end{aligned}$$

Si $\lambda_n d^2 + \varepsilon \leq \varepsilon_0(k_0, n, p)$ alors M est difféomorphe à une nilvariété. Si l'hypothèse ne porte que sur la $(n-1)$-ième valeur propre, à savoir $\lambda_{n-1} d^2 + \varepsilon \leq \varepsilon_0(k_0, n, p)$, alors M est difféomorphe soit à une nilvariété, soit une infranilvariété non orientable.

Dans les deux cas, la métrique g de M est proche au sens C^0 de la métrique invariante à gauche provenant du groupe nilpotent.

Un exemple, tiré d'un travail d'Anderson [An], montre que l'hypothèse sur le tenseur de courbure est nécessaire [CGR2], § 5.

La méthode permettant de démontrer ce théorème utilise deux ingrédients principaux :

- Généralisation d'un résultat de Lecouturier et Robert [LCR] sur une inégalité de Harnack généralisée portant sur les solutions d'une équation de Schrödinger.

- Utilisation d'un théorème dû à Ghanaat permettant de caractériser les nilvariétés [Gh].

Bibliographie

[A] E. Aubry. — *Inégalités de Harnack pour les combinaisons linéaires de sections propres de l'opérateur de Hodge. Généralisations et applications*, Prépublication de l'Institut Fourier n° 515, Grenoble, 2000.

[ACGR] E. Aubry, B. Colbois, P. Ghanaat, E. Ruh. — En préparation,.

[An] M.T. Anderson. — *Hausdorff perturbations of Ricci-flat manifolds and the splitting theorem*, Duke Math. J. **68** (1992), 67–82.

[CC] J. Cheeger, T.H. Colding. — *On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below, I*, J. Differential Geom. **45** (1997), 406–480.

[CGR1] B. Colbois, P. Ghanaat, E.A. Ruh. — *Curvature and gradient estimates for eigenforms of the Laplacean*, Preprintreihe der Fakultät für Mathematik Nr. 1999/17, Universität Karlsruhe, 1999.

[CGR2] B. Colbois, P. Ghanaat, E.A. Ruh. — *Curvature and a spectral characterization of nilmanifolds*, Forschungsinstitut für Mathematik, ETHZ, Prépublication, 2000.

[GHL] S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine. — *Riemannian geometry*, Springer Verlag, 1987.

[Gh] P. Ghanaat. — *Almost Lie groups of type R^n*, J. Reine Angew. Math. **401** (1989), 60–81.

[GM] S. Gallot, D. Meyer. — *D'un résultat hilbertien à un principe de comparaison entre spectre et applications*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. 4ème série **21** (1988), 561–591.

[LCR] M. Le Couturier, G. Robert. — *L^p-pinching and the geometry of compact riemannian manifolds*, Comment. Math. Helv. **69** (1994), 249–271.

Bruno COLBOIS
INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Université de Neuchâtel
Rue Émile Argand 11
CH-2007 NEUCHÂTEL (Suisse)
Bruno.Colbois@unine.ch