

# SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

RICHARD PÉREYROL

**Une inégalité isopérimétrique en courbure négative  
d'après Christopher B. Croke**

*Séminaire de Théorie spectrale et géométrie*, tome 18 (1999-2000), p. 49-57

[http://www.numdam.org/item?id=TSG\\_1999-2000\\_\\_18\\_\\_49\\_0](http://www.numdam.org/item?id=TSG_1999-2000__18__49_0)

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Grenoble), 1999-2000, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# UNE INÉGALITÉ ISOPÉRIMÉTRIQUE EN COURBURE NÉGATIVE d'après Christopher B. Croke

*Richard PÉREYROL*

## 1. Le problème

Le problème isopérimétrique classique consiste à chercher les domaines de  $\mathbb{R}^2$  d'aire maximale parmi les domaines de périmètre fixé. Les disques sont les solutions à ce problème. On peut en fait traduire ce résultat par une inégalité – dite isopérimétrique – liant le périmètre  $P$  et l'aire  $A$  :

$$P^2 \geq 4\pi A,$$

dans laquelle il y a égalité si et seulement si le domaine est un disque. Ce résultat demeure pour les domaines (ouverts relativement compacts à bord lisse) de  $\mathbb{R}^n$  : pour un domaine  $D$ , on a l'inégalité suivante :

$$\text{Vol}(\partial D)^n \geq \bar{C}(n) \text{Vol}(D)^{n-1},$$

avec  $\bar{C}(n) = \frac{\text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})^n}{\text{Vol}(\mathbb{B}^n)^{n-1}} = n^{n-1} \alpha(n-1)$ , si  $\alpha(n) = \text{Vol}(\mathbb{S}^n)$  est le volume de la sphère unité euclidienne de dimension  $n$ .

À propos de ce résultat classique, voir par exemple [Ch].

Une généralisation de ce résultat consiste en la conjecture suivante :

**CONJECTURE 1.** — *Pour tout domaine compact  $M$  d'une variété complète simplement connexe de courbure négative ou nulle, on a l'inégalité suivante*

$$\text{Vol}(\partial M)^n \geq \bar{C}(n) \text{Vol}(M)^{n-1}$$

*avec égalité si et seulement si  $M$  est isométrique à une boule euclidienne.*

*Remarques.*

- si pour les domaines  $M$  on se restreint aux boules géodésiques, la conjecture se montre par des théorèmes de comparaison ;

- si l'espace ambiant est de courbure négative constante, la conjecture se prouve par symétrisation.

Cette conjecture a été prouvée en dimension 2 par A. WEIL en 1926, et elle est ouverte dans les autres dimensions sauf 4 (prouvé par C.B. CROKE : c'est l'objet de cet exposé) et 3 (prouvé par Bruce KLEINER dans [K], voir à ce propos l'exposé de Constantin VERNICOS ([V]) dans le présent volume).

Dans la suite, nous exposons la preuve de C.B. CROKE en montrant le théorème suivant, dont les hypothèses découlent de celles de la conjecture.

**THÉORÈME 1.1.** — *Soit  $M$  une variété compacte de dimension  $n$  ( $n \geq 3$ ) et de courbure négative ou nulle telle que toute géodésique est minimisante jusqu'au bord.*

Alors

$$\text{Vol}(M)^n \geq C(n) \text{Vol}(\partial M)^{n-1},$$

où,

$$C(n) = \frac{\alpha(n-1)^{n-1}}{\alpha(n-2)^{n-2} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n/n-2}(t) \sin^{n-2}(t) dt \right\}^{n-2}}.$$

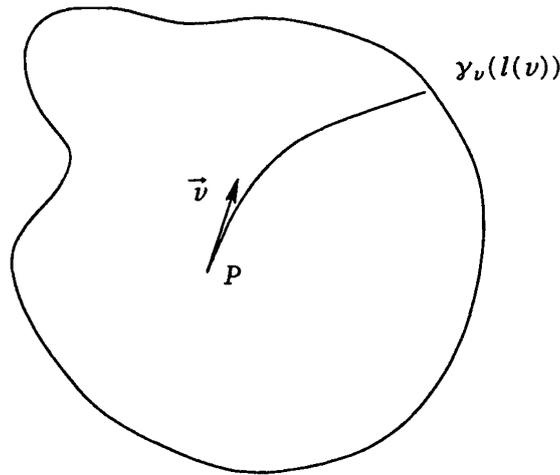
*Si  $n \neq 4$ , il n'y a jamais égalité. Si  $n = 4$ , il y a égalité si et seulement si  $M$  est isométrique à une boule euclidienne.*

Il est à remarquer que ce théorème donne une inégalité isopérimétrique pour toute dimension  $n \geq 3$ , mais résout la conjecture uniquement dans le cas  $n = 4$ , et dans ce cas,  $C(4) = \bar{C}(4) = 128\pi^2$ .

## 2. Preuve du théorème

### 2.1. Notations

On note  $UM \xrightarrow{\pi} M$  le fibré unitaire de  $M$  muni de la mesure canonique de Liouville (produit local). Pour  $\nu \in UM$  on désigne par  $\gamma_\nu$  la géodésique telle que  $\gamma'_\nu(0) = \nu$  et par  $\Phi_t(\nu) = \gamma'_\nu(t)$  le flot géodésique. Pour  $\nu \in UM$  soit  $l(\nu) = \max \{t \mid \gamma_\nu([0, t]) \subset M\}$ .



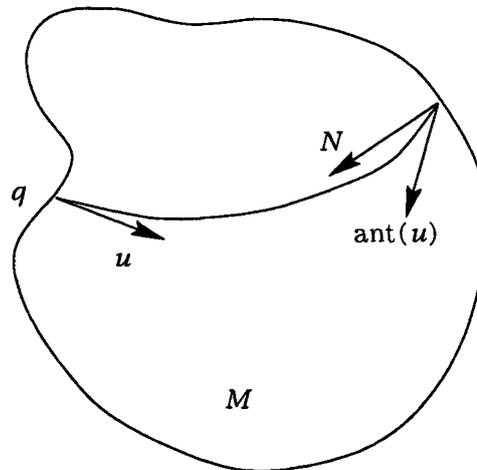
On considère aussi le fibré  $U^+\partial M \rightarrow \partial M$  : si  $N_p$  est la normale intérieure au bord en  $p \in \partial M$ ,

$$U^+\partial M = \{u \in UM \mid \pi(u) \in \partial M \text{ et } \langle u, N_{\pi(u)} \rangle > 0\}.$$

On utilisera les notations suivantes :

$$\text{ant } u = -\Phi_{l(u)}(u);$$

$$\cos u = \langle u, N_{\pi(u)} \rangle.$$



On peut alors obtenir la formule suivante, qui consiste à intégrer le long des rayons géodésiques issus de chaque point du bord :

**Formule de Santalo :** Pour  $f$  intégrable,

$$\int_{UM} f(v) \, dv = \int_{U^+\partial M} \int_0^{l(u)} f(\Phi_t(u)) \cos(u) \, dt \, du.$$

Cette formule appliquée à la fonction constante  $f \equiv 1$  donne l'égalité :

$$\text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})\text{Vol}(M) = \int_{U+\partial M} l(u) \cos u \, du.$$

Nous pouvons alors commencer le preuve du théorème.

## 2.2. L'inégalité

$$\begin{aligned} \text{Vol}(M) &= \frac{1}{\text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})} \int_{U+\partial M} l(u) \cos u \, du \\ &= \frac{1}{\text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})} \int_{U+\partial M} \frac{l(u)}{(\cos(\text{ant } u))^{1/(n-1)}} \cos^{1/(n-1)}(\text{ant } u) \cos u \, du \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Hölder, avec les coefficients  $n-1$  et  $\frac{n-1}{n-2}$ ,

$$\begin{aligned} \text{Vol}(M) &\leq \frac{1}{\text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})} \left[ \int_{U+\partial M} \frac{l(u)^{n-1}}{\cos(\text{ant } u)} \, du \right]^{\frac{1}{n-1}} \times \\ &\quad \times \left[ \int_{U+\partial M} \cos^{1/(n-2)}(\text{ant } u) \cos^{(n-1)/(n-2)} u \, du \right]^{\frac{n-2}{n-1}} \end{aligned} \quad (1)$$

Nous allons maintenant majorer chacun des deux facteurs. Pour cela, nous utilisons les lemmes suivants.

LEMME 2.1.

$$\int_{U+\partial M} \frac{l(u)^{n-1}}{\cos(\text{ant } u)} \, du \leq \text{Vol}(\partial M)^2$$

et il y a égalité si et seulement si  $M$  est plate et convexe.

LEMME 2.2.

$$\int_{U+\partial M} \cos^{1/(n-2)}(\text{ant } u) \cos^{(n-1)/(n-2)} u \, du \leq \text{Vol}(\partial M) C_0(n)$$

$$\text{avec } C_0(n) = \text{Vol}(\mathbb{S}^{n-2}) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n/(n-2)}(t) \sin^{n-2}(t) \, dt.$$

De plus il y a égalité si et seulement si  $\cos u = \cos(\text{ant } u)$  presque partout.

Utilisant ces deux lemmes, on obtient la majoration :

$$\text{Vol}(M) \leq \frac{1}{\text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})} \text{Vol}(\partial M)^{\frac{2}{n-1}} \times \text{Vol}(\partial M)^{\frac{n-2}{n-1}} \times C_0(n)^{\frac{n-2}{n-1}} \quad (2)$$

soit

$$\text{Vol}(\partial M)^n \geq \frac{\text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})^{n-1}}{C_0(n)^{n-2}} \text{Vol}(M)^{n-1}$$

Cela est exactement l'inégalité annoncée dans l'énoncé du théorème avec

$$C(n) = \frac{\text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})^{n-1}}{\text{Vol}(\mathbb{S}^{n-2})^{n-2} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n/n-2} t \sin^{n-2} t dt \right)^{n-2}}$$

### 2.3. Le cas d'égalité

Dans le cas où il y a égalité dans le théorème, il y a égalité dans (2), c'est-à-dire dans le lemme 2.2, et donc  $\cos(\text{ant } u) = \cos u$  presque partout. De même, l'égalité doit avoir lieu dans le lemme 2.1, ce qui force  $M$  à être plate.

De plus, l'égalité dans l'inégalité de Hölder (1) donne

$$\exists \mu \in \mathbb{R}^+, \frac{l(u)^{n-1}}{\cos(\text{ant } u)} = \mu \cos^{1/(n-2)}(\text{ant } u) \cos^{(n-1)/(n-2)} u$$

On en déduit  $l(u)^{n-1} = \mu \cos^{(n+1)/(n-2)} u$

Si  $n = 4$ , cela s'écrit  $l(u)^3 = \mu \cos^3 u$ , c'est-à-dire  $l(u) = \mu^{1/3} \cos u$ . En posant  $r = \frac{1}{2} \mu^{1/3}$ , on obtient dans  $\mathbb{R}^4$  (puisque  $M$  est plate) – ou plutôt dans le demi-espace supérieur, étant donné que  $u$  reste dans une demi-sphère – l'équation en coordonnées polaires

$$l(u) = 2r \cos(u)$$

qui est l'équation d'une sphère de rayon  $r$ .

Pour montrer que l'égalité n'a jamais lieu si  $n \neq 4$ , on raisonne comme ci-dessus et on parvient à l'équation en coordonnées polaires

$$l(u) = \alpha \cos^{2/(n-2)} u.$$

On va voir alors que cela est impossible, car alors on ne peut pas avoir  $\cos(u) = \cos(\text{ant } u)$  presque partout.

Dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $\forall u, \text{ant } u = -u$ .

Choisissons un repère tel que  $0 \in \partial M$ , et la normale intérieure est  $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ .

Il apparaît que le groupe d'isométries constitué des matrices

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} & & & \vdots & & \\ & & & 0 & & \\ & & & \vdots & & \\ & & & \vdots & & \\ \dots & 0 & \dots & 1 & & \end{array} \right), \quad A \in O(n-1)$$

laisse invariant  $l(u)$ . On peut alors se ramener à une étude dans des 2-plans. En effet, il suffit de déterminer  $\text{ant } u$  pour  $u$  de la forme  $(0, \dots, 0, \cos \theta, \sin \theta)$ , mais ce vecteur est laissé invariant par le groupe des matrices :

$$\left( \begin{array}{c|c} \boxed{B} & \begin{array}{c} \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{array} \\ \hline \dots \ 0 \ \dots & \boxed{\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}} \end{array} \right), \quad B \in O(n-2).$$

Par conséquent, la normale en le point de  $\partial M$  paramétré par  $u$  est aussi invariante par ce groupe et donc est de la forme  $(0, \dots, 0, \cos \phi, \sin \phi)$ .

Tout se passe donc dans le 2-plan  $\{x_1 = \dots = x_{n-2} = 0\}$ . Dans ce plan, l'angle que fait la tangente avec  $u$  est donné par sa tangente :

$$\tan V = \frac{l(\theta)}{l'(\theta)} = \frac{n-2}{2} \frac{\cos \theta}{-\sin \theta} = \frac{n-2}{2} \tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right).$$

Il est alors clair que  $\cos u = \cos(\text{ant } u)$  (c'est-à-dire  $u$  et  $\text{ant } u$  font le même angles avec les normales respectives) n'est possible (presque partout, donc au moins en un point) que si  $\frac{n-2}{2} = 1$  i.e.  $n = 4$ .

### 3. Preuve des lemmes

#### 3.1. Lemme 1

Le membre de gauche est à rapprocher d'un calcul d'«aire» en coordonnées polaires ; c'est pourquoi nous allons voir comment calculer le volume du bord en coordonnées polaires depuis un point  $q \in \partial M$ .

Soit  $q \in \partial M$ . Par la carte exponentielle, on peut utiliser les coordonnées polaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} \{(u,r) \in U_q^+ \partial M \times \mathbb{R}^+ \mid 0 \leq r \leq l(u)\} \\ (u,r) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow M \\ \rightarrow \text{Exp}(ru) \end{array}$$

Dans  $\text{Exp} \{tu \mid u \in U_q^+ \partial M \text{ et } 0 \leq r \leq l(u)\}$ , le volume est donné par la mesure  $dx = F(u,r) du dr$  pour une certaine densité  $F$ .

Maintenant, si  $A$  est le «bord visible à partir de  $q$ », c'est-à-dire

$$A = \text{Exp} \{tu \mid u \in U_q^+ \partial M \text{ et } t = l(u)\},$$

on peut exprimer le volume sur  $A$  par une densité par rapport à  $du$  la mesure sur la sphère unité.

Pour cela, considérons que  $A$  est paramétré dans la carte exponentielle en coordonnées polaires (les rayons géodésiques sont alors des demi-droites issues de l'origine) par :

$$\begin{cases} U_q^+ \partial M & \xrightarrow{R} & M \\ u & \longmapsto & r(u) = l(u) \end{cases}$$

Alors, si  $(X_1, \dots, X_{n-1})$  est une base orthonormée de vecteurs tangents en  $u \in U_q^+ \partial M$ , on veut calculer  $i_{n(u)} \omega_{R(u)}(R_* X_1, \dots, R_* X_{n-1})$  où  $n(u)$  est la normale extérieure et  $\omega$  est la forme volume de  $M$ . En effet, ce calcul donnera «l'élément de volume» sur  $A$  comme densité par rapport à  $du$ .

On a :

$$\begin{aligned} i_{n(u)} \omega_{R(u)}(R_* X_1, \dots, R_* X_{n-1}) &= \frac{1}{\langle \frac{\partial}{\partial r}, n(u) \rangle} i_{\frac{\partial}{\partial r}} \omega_{R(u)}(R_* X_1, \dots, R_* X_{n-1}) \\ &= \frac{1}{\langle \frac{\partial}{\partial r}, n(u) \rangle} i_{\frac{\partial}{\partial r}} \omega_{R(u)}(X_1, \dots, X_{n-1}) \end{aligned}$$

Ici,  $X_i$  représente la projection de  $R_* X_i$  sur l'espace tangent à la sphère de rayon  $l(u)$ . On peut identifier cette projection avec le vecteur  $X_i$  car ce sont des vecteurs dans un espace vectoriel (la carte exponentielle) et qu'ils ont les mêmes composantes (par définition des coordonnées polaires).

On a montré que, si  $\omega_A$  et  $\omega_0$  sont les formes volumes sur  $A$  et la demi-sphère unité,

$$\omega_A(R_* X_1, \dots, R_* X_{n-1}) = \frac{1}{\langle \frac{\partial}{\partial r}, n(u) \rangle} \omega_0(X_1, \dots, X_{n-1}),$$

ce qui donne pour l'élément de volume sur  $A$

$$\frac{1}{\langle \frac{\partial}{\partial r}, n(u) \rangle} F(u, l(u)) du = \frac{F(u, l(u))}{\cos(\text{ant } u)} du$$

Maintenant, on peut calculer le volume de  $A \subset \partial M$  :

$$\int_{U_q^+ \partial M} \frac{F(u, l(u))}{\cos(\text{ant } u)} du = \text{Vol}(A) \leq \text{Vol}(\partial M)$$

Avec égalité si et seulement si  $M$  est étoilé par rapport à  $q$  (c'est une conséquence du fait qu'alors  $A = \partial M$ ).

Si on intègre par rapport à  $q$ , l'inégalité devient :

$$\int_{U^+ \partial M} \frac{F(u, l(u))}{\cos(\text{ant } u)} du \leq \text{Vol}(\partial M)^2,$$

avec égalité si et seulement si  $M$  est étoilé par rapport à tout point  $q$  de son bord, donc si et seulement si  $M$  est convexe.

Ensuite, puisque  $K_M \leq 0$ , par comparaison de la densité  $F$  à la densité euclidienne :  $F(u, r) \geq r^{n-1}$  avec égalité dans toutes les directions  $u$  si et seulement si  $K \equiv 0$ , i.e.  $M$  est plat.

## 3.2. Lemme 2

$$\begin{aligned}
& \int_{U^+\partial M} \cos^{1/(n-2)}(\text{ant } u) \cos^{(n-1)/(n-2)} u \, du \\
&= \int_{U^+\partial M} \cos^{1/(n-2)}(\text{ant } u) \cos^{1/2} u \times \cos^{1/(n-2)} u \cos^{1/2} u \, du \\
&\leq \left( \int_{U^+\partial M} \cos^{2/(n-2)}(\text{ant } u) \cos u \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{U^+\partial M} \cos^{2/(n-2)} u \cos u \, du \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Les deux facteurs sont en fait identiques grâce au lemme :

LEMME 3.1. — *Pour toute fonction  $g$  intégrable,*

$$\int_{U^+\partial M} g(u) \cos u \, du = \int_{U^+\partial M} g(\text{ant } u) \cos u \, du$$

*Démonstration.* — Remarquons d'abord que l'application de

$$Q = \{(u, t) \mid u \in U^+\partial M \text{ et } 0 \leq t \leq l(u)\}$$

muni de la mesure  $\cos u \, du \, dt$ . dans  $UM$  donnée par le flot géodésique préserve la mesure. De même pour  $\Phi^{-1}$  et l'application antipodale  $a : UM \rightarrow UM$ . Cela montre que l'application  $\Phi^{-1} \circ a \circ \Phi : Q \rightarrow Q$  préserve elle-même la mesure. De plus  $\Phi^{-1} \circ a \circ \Phi(u, t) = (\text{ant } u, l(u) - t)$ . Donc pour toute application mesurable  $G : Q \rightarrow \mathbb{R}$ , on a :

$$\int_{U^+\partial M} \int_0^{l(u)} G(u, t) \cos u \, dt \, du = \int_{U^+\partial M} \int_0^{l(u)} G(\text{ant } u, l(u) - t) \cos u \, dt \, du$$

On finit la preuve du lemme en posant  $G(u, t) = \frac{g(u)}{l(u)}$  et en intégrant par rapport à  $t$ .  $\square$

L'inégalité s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
\int_{U^+\partial M} \cos^{1/(n-2)}(\text{ant } u) \cos^{(n-1)/(n-2)} u \, du &\leq \int_{U^+\partial M} \cos^{n/(n-2)} u \, du \\
&\leq \int_{\partial M} \left( \int_{U_q^+\partial M} \cos^{n/(n-2)} u \, du \right) dq \\
&\leq \text{Vol}(\partial M) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n/(n-2)} t \sin^{n-2} t \, dt.
\end{aligned}$$

C'est l'inégalité recherchée.

C'est une égalité si et seulement si (par le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz) il existe une constante réelle positive ou nulle  $\lambda$  telle que  $\cos(\text{ant } u) = \cos u$  presque partout. Or ces deux fonctions continues ont même maximum 1, donc  $\lambda = 1$ , i.e.  $\cos(\text{ant } u) = \cos u$  presque partout.

## Bibliographie

- [Cr] C.B. CROKE: *A sharp four dimensional isoperimetric inequality*, Comment.Math.Helv. **59**, 187–192 (1984).
- [Ch] I. CHAVEL: *Riemannian geometry - a modern introduction*, Cambridge University Press, 1993.
- [K] B. KLEINER: *An isoperimetric comparison theorem*, Invent. Math. **108**, 37–47(1992).
- [V] C. VERNICOS: *Inégalité isopérimétrique en dimension 3 d'après K. Kleiner*, Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie, 1999–2000.

Richard PÉREYROL  
INSTITUT FOURIER  
Laboratoire de Mathématiques  
UMR5582 (UJF-CNRS)  
BP 74  
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)  
Richard.Pereyrol@ujf-grenoble.fr