Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Jacques Gasqui
Hubert Goldschmidt

Injectivité de la transformation de Radon sur les grassmanniennes

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 18 (1999-2000), p. 27-41
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1999-2000__18__27_0>

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Grenoble), 1999-2000, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
Volume **18** (2000) 27–41

INJECTIVITÉ DE LA TRANSFORMATION DE RADON SUR LES GRASSMANNIENNES

Jacques GASQUI & Hubert GOLDSCHMIDT

1. Introduction

Nous décrivons ici des résultats d'injectivité de la transformation de Radon et de rigidité spectrale à l'ordre 1 sur les grassmanniennes, qui sont détaillés dans [3]. On considère un espace riemannien symétrique compact (X,g) et on s'intéresse aux propriétés des p-tenseurs symétriques u sur X, satisfaisant la condition

$$\int_\Gamma u(\xi,\dots\xi)d\Gamma = 0, \tag{1}$$

pour tout tore maximal totalement géodésique Γ de X, et tout champ parallèle ξ, tangent à Γ, où $d\Gamma$ est la mesure riemannienne sur Γ.

Lorsque $p = 0$, le tenseur est une fonction f sur la variété et la condition (1) s'écrit

$$\int_\Gamma f\,d\Gamma = 0,$$

pour tout Γ. Si cette dernière condition entraîne la nullité de f, on dit que la transformation de Radon est injective sur (X,g).

Avant d'aller plus loin, observons que si $\mathbb{T}$ est un tore plat et ξ un champ parallèle sur $\mathbb{T}$, alors pour toute fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, nous avons

$$\int_\mathbb{T} df(\xi)d\mathbb{T} = 0.$$

Ceci se voit immédiatement en développant f en série de Fourier. Cette observation permet de donner des exemples non triviaux de tenseurs satisfaisant la condition (1). En premier lieu, si $p = 1$, les formes exactes de degré un vérifient (1). Si $p \geqslant 1$, on voit que les dérivées covariantes symétrisées des tenseurs de degré $p - 1$ satisfont toujours

Classification math.: 53C35, 58G25, 53C65, 44A12.

la condition (1). En particulier, lorsque $p = 2$, et ξ est un champ de vecteurs sur X, la dérivée de Lie $\mathscr{L}_\xi g$ de la métrique g le long de ξ est la dérivée covariante symétrisée de la 1-forme ξ^b associée au champ ξ, via la métrique ; par conséquent les dérivées de Lie de g vérifient la condition (1).

Dans [2], nous avons appelé (1) *condition de Guillemin* en rapport avec le résultat suivant dû à Guillemin [4] :

THÉORÈME 1.1. — *Soit (X,g) un espace riemannien symétrique compact. Si $\{g_t\}$ est une déformation isospectrale de $g = g_0$, alors la déformation infinitésimale $h = \frac{d}{dt}g_t|_{t=0}$ vérifie la condition (1)*

On dira dans la suite qu' un espace riemannien symétrique compact est rigide au sens de Guillemin si les dérivées de Lie de la métrique sont les seules 2-formes symétriques sur X qui satisfont la condition de Guillemin. La rigidité au sens de Guillemin entraîne donc la rigidité spectrale à l'ordre 1. Observons au passage que l'injectivité de la transformation de Radon équivaut à la rigidité dans la classe conforme de la métrique canonique.

Nous nous intéressons dans [3] à la rigidité au sens de Guillemin des grassmanniennes réelles et complexes. D'autre part, nous examinons si les formes de degré un qui satisfont la condition de Guillemin sur ces espaces sont exactes et donnons des preuves très élémentaires de l'injectivité de la transformation de Radon.

Dans cet exposé, nous allons surtout insister sur les cas des fonctions et des formes de degré un.

2. Le cas des espaces de rang 1

Pour un espace de rang 1 (un espace projectif ou une sphère), muni de sa métrique canonique, les tores sont les géodésiques fermées. Dans cette situation, la condition de Guillemin équivaut à la condition d'énergie nulle introduite par Michel. Une p- forme symétrique u est donc à énergie nulle si pour toute géodésique γ de longueur L ($L = \pi$ ou 2π), paramétrée par la longueur d'arc s, on a

$$\int_0^L u(\dot\gamma(s),\dots,\dot\gamma(s))\,ds = 0.$$

Sur la sphère S^n, un tenseur α sera dit pair (resp. impair) si

$$\tau^*\alpha = \alpha \text{ (resp. } -\alpha),$$

où τ désigne la symétrie antipodale. Bien entendu, tous les tenseurs impairs sont à énergie nulle. Les tenseurs sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ s'identifient, via pull-back par la projection du revêtement

$$S^n \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R}), \tag{2}$$

aux tenseurs pairs sur la sphère.

Le seul résultat d'injectivité de la transformation de Radon sur lequel nous nous appuierons dans la suite est le

LEMME 2.1. — *La transformation de Radon est injective sur le plan projectif réel* $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Ce lemme se prouve très facilement en montrant que la transformée de Radon n'est pas identiquement nulle sur chacun des sous-espaces propres du Laplacien sur S^2, donnés par les harmoniques sphériques de degrés pairs.

On déduit immédiatement de ce lemme que la transformation de Radon est injective sur tous les espaces projectifs $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, pour $n \geqslant 2$: en effet, chaque point d'un tel espace est toujours contenu dans un plan projectif réel, totalement géodésique.

Par ailleurs, l'injectivité de la transformation de Radon sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ revient à dire qu'une fonction paire sur la sphère S^n, à transformée de Radon nulle, est nulle.

Nous aurons aussi besoin de la

PROPOSITION 2.1. — *La transformation de Radon est injective sur l'espace produit de rang deux* $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Démonstration. — Soit $f : X \to \mathbb{C}$ une fonction à transformée de Radon nulle sur $X = \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Soient $\gamma, \tau : [0,\pi] \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ deux géodésiques paramétrées par la longueur d'arc. Alors

$$Z = Z_{\gamma,\tau} = \{(\gamma(s),\tau(t));\, s,t \in [0,\pi]\}$$

est un tore totalement géodésique de X (ils sont tous de cette forme). Considérons maintenant

$$f_\gamma : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{C},$$

donnée par $f_\gamma(y) = \int_0^\pi f(\gamma(s),y)\,ds$. Avec Fubini,

$$\int_\tau f_\gamma = \int_{Z_{\gamma,\tau}} f\,dZ = 0$$

et la fonction f_γ est à transformée de Radon nulle sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, donc nulle. Fixons maintenant $y \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ et regardons

$$\begin{array}{rcl} f_y : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & f(x,y); \end{array}$$

alors $\int_\gamma f_y = f_\gamma(y)$. Ainsi f_y est aussi à énergie nulle sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ et on voit que $f \equiv 0$. $\square$

Enfin nous utiliserons le résultat suivant concernant les formes de degré un

PROPOSITION 2.2. — *Les formes de degré un sur un espace projectif de dimension* $\geqslant 2$, *à énergie nulle, sont exactes.*

Cette proposition a été établie dans le cas réel par R.Michel dans [5], où est donnée une preuve très élémentaire ne faisant appel qu'à la formule de Stokes dans le plan. Nous l'avons prouvée dans [1] pour les autres espaces projectifs. Dans le cas complexe, si θ est une forme de degré un à énérgie nulle, on voit facilement que $d\theta$ est proportionnelle à la forme de Kähler, ce qui entraîne que θ est fermée.

3. Parité des tenseurs sur les grassmanniennes rélles

Soit E un espace euclidien de dimension $n + m$. On note $G_n(E)$ (resp.$\tilde{G}_n(E)$) la grassmannienne des n-plans de E (resp. des n-plans orientés de E) munie de la métrique induite par le produit scalaire sur E. Si E est $\mathbb{R}^{n+m}$ muni de sa structure euclidienne canonique, on pose $G_{n,m}(\mathbb{R}) = G_n(E)$ et $\tilde{G}_{n,m} = \tilde{G}_n(E)$. Ces espaces sont symétriques de type compact, de rang le minimum de n et m, irréductibles sauf si $m = n = 2$, situation sur laquelle nous reviendrons plus tard. En fait

$$\tilde{G}_{n,m} \approx SO(n+m)/SO(n) \times SO(m).$$

On a une involution

$$\tau : \tilde{G}_n(E) \to \tilde{G}_n(E),$$

donnée par le changement d'orientation ; c'est une isométrie et on voit facilement que $G_n(E)$ est le quotient de $\tilde{G}_n(E)$ par le groupe à deux éléments $\{id.,\tau\}$. On note

$$\varpi : \tilde{G}_n(E) \to G_n(E)$$

la projection correspondante et on obtient un revêtement à deux feuillets qui est l'analogue en rang $\geqslant 2$ de l'application (2). En fait, ϖ est l'application qui à un sous-espace orienté associe ce même sous-espace non-orienté. La parité des tenseurs sur les grassmanniennes réelles orientées se définit alors comme pour les sphères. En particulier, via l'application ϖ, les tenseurs sur $G_n(E)$ s'identifient aux tenseurs pairs sur $\tilde{G}_n(E)$.

Rappelons encore que l'on a une isométrie naturelle entre la grassmannienne $\tilde{G}_{2,n}$ des 2-plans orientés de $\mathbb{R}^{n+2}$ et la quadrique complexe non dégénérée Q_n de $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$, d'équation homogène

$$\zeta_0^2 + \ldots + \zeta_{n+1}^2 = 0,$$

en notant $\zeta_0,\ldots,\zeta_{n+1}$ les coordonnées complexes canoniques de $\mathbb{C}^{n+2}$. On la réalise comme suit : si P est un 2-plan orienté de $\mathbb{R}^{n+2}$ et si $\{e_1,e_2\}$ est une base orhonormée positive de P, alors on identifie P au point de la quadrique donné par le point $e_1 + \sqrt{-1}e_2$ de $\mathbb{C}^{n+2}$. On voit alors facilement que le changement d'orientation sur la grassmannienne correspond à la conjugaison complexe sur la quadrique.

L'application ρ envoyant un sous-espace sur son orthogonal est une isométrie qui permet d'identifier $G_n(E)$ et $G_m(E)$, lorsque E est un espace euclidien de dimension $m + n$. Dans la suite, on pourra donc se restreindre au cas $n \leqslant m$.

Observons encore , dans le cas $m = n$, que

$$\rho : G_n(E) \to G_n(E)$$

est une autre involution naturelle sur la grassmannienne. Dans cette situation, on dit qu'un tenseur h sur $G_n(E)$ est pair (resp. impair) de deuxième espèce si

$$\rho^* h = h \quad (\text{resp. } \rho^* h = -h).$$

4. Injectivité de la transformée de Radon sur les grassmanniennes réelles.

Lorsqu'on est en présence d'une involution sur un espace riemannien symétrique compact, chaque tore maximal est invariant par cette involution. Ce phénomène peut se voit directement sur les grassmanniennes réelles. En effet, si E un espace euclidien de dimension $\geqslant n$, les tores totalement géodésiques de $G_n(E)$ s'obtiennent comme produits de cercles unité de plans de E, orthogonaux deux à deux. Il est alors évident que les formes impaires sur $\tilde{G}_n(E)$ ou les formes impaires de deuxième espèce sur $G_n(E)$, lorsque $\dim E = 2n$, vérifient la condition de Guillemin. En particulier, les fonctions impaires (ou impaires de deuxième espèce) ont toujours une transformée de Radon nulle. On se propose de prouver le

THÉORÈME 4.1. — *(a) La transformation de Radon est injective sur $G_n(E)$, si $\dim E \neq 2n$.*

(b) Si $\dim E = 2n$, avec $n \geqslant 2$, la transformation de Radon sur $G_n(E)$ est injective en restriction aux fonctions paires de deuxième espèce.

Ce théorème dit que les seuls obstacles à l'injectivité de la transformation de Radon sur les grassmanniennes réelles proviennent des deux involutions τ et ρ, décrites ci-dessus.

Commençons par prouver (a). Soit E un espace euclidien de dimension $n + k + 2$, avec $k \leqslant n$. Fixons un 2-plan U de E, dont on note Γ le cercle unité et posons $F = U^{\perp}$. On construit alors une application

$$\Phi_U : \mathscr{C}^\infty(G_{k+1}(E),\mathbb{C}) \to \mathscr{C}^\infty(G_k(F),\mathbb{C})$$

de la manière suivante. Si P est un sous-espace de dimension k de F, et f une fonction sur $G_{k+1}(E)$ à valeurs complexes, on considère la fonction

$$\begin{aligned} f_U^P : \Gamma &\to \mathbb{C} \\ \xi &\mapsto f(\mathbb{R}\xi \oplus P) \end{aligned}$$

et on pose

$$\Phi_U(f)(P) = \int_\Gamma f_U^P \, d\Gamma.$$

Si f est à transformée de Radon nulle, alors, par Fubini, $\Phi_U(f)$ l'est aussi. Nous avons le

LEMME 4.1. — *Si la transformée de Radon est injective sur $G_{k,n}$, elle l'est aussi sur $G_{k+1,n+1}$.*

Démonstration. — Soit P un k-plan fixé d'un espace euclidien E de dimension $n+k+2$; écrivons

$$E = P \oplus W,$$

avec $W = P^{\perp}$ sous-espace de dimension $n+2$. On note $S(W)$ la sphère unité de W. Soit f une fonction sur $G_{k+1}(E)$. La fonction

$$\begin{array}{rcl} \psi : S(W) & \to & \mathbb{C} \\ \xi & \mapsto & f(\mathbb{R}\xi \oplus P) \end{array}$$

est une fonction paire sur $S(W)$. Soit $\xi_0 \in S(W)$ et η_0 un vecteur unitaire de $T_{\xi_0}S(W)$. Alors la géodésique $\gamma = \mathrm{Exp}(\mathbb{R}\eta_0)$ de la sphère est donnée par

$$\gamma(t) = \cos t\ \xi_0 + \sin t\ \eta_0, \quad t \in [0,2\pi].$$

Si U est le plan de base $\{\xi_0,\eta_0\}$, nous avons

$$\int_{\gamma} \psi = \Phi_U(f).$$

Si f est à transformée de Radon nulle, alors par hypothèse, $\Phi_U(f) \equiv 0$ et ψ est une fonction paire à énergie nulle sur $S(W)$, donc nulle.

On en déduit par récurrence sur k, l'injectivité de la transformation de Radon sur $G^{\mathbb{R}}_{k,n}$, pour $k < n$ et $n \geqslant 2$. En effet, avec le lemme précédent, il suffit d'assurer le démarrage de cette récurrence pour $k = 1$, ce qui se voit facilement car, dans cette situation, $G^{\mathbb{R}}_{1,n} = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. □

Prouvons maintenant la partie (b) du théorème. On observe que Φ_U envoie les fonctions paires de deuxième espèce sur des fonctions paires de deuxième espèce. La preuve du lemme 2 va alors nous dire que si la transformation de Radon est injective sur les fonctions paires de deuxième espèce de $G^{\mathbb{R}}_{n,n}$, alors elle le sera aussi sur les fonctions paires de deuxième espèce de $G^{\mathbb{R}}_{n+1,n+1}$. Il suffit donc d'établir cette injectivité pour $n = 2$. Elle résulte de la proposition 2.1 et de la

PROPOSITION 4.1. — *La variété quotient $G^{\mathbb{R}}_{2,2}/\{id.,\rho\}$ est isométrique au produit $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.*

La fin de ce paragraphe est consacrée à la preuve élémentaire de cette proposition.

Si $(\zeta_0,\dots,\zeta_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, on note $[\zeta_0;\dots;\zeta_n]$ son image dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. On considère le plongement de Segre

$$\begin{array}{rcl} \sigma : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \to & \mathbb{P}^3(\mathbb{C}) \\ ([\xi_0;\xi_1],[\eta_0;\eta_1]) & \mapsto & [\xi_0\eta_0;\xi_0\eta_1;\xi_1\eta_0;\xi_1\eta_1]. \end{array}$$

Alors $\sigma(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ est la quadrique complexe d'équation homogène

$$\zeta_3\zeta_0 = \zeta_1\zeta_2.$$

En composant à droite σ par la transformation unitaire de $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$, donnée en coordonnées homogènes par

$$(\zeta_0,\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(\zeta_0+\zeta_3,\zeta_2-\zeta_1,\sqrt{-1}(\zeta_3-\zeta_0),\sqrt{-1}(\zeta_2+\zeta_1)),$$

on obtient le plongement de Segre "modifié"

$$\begin{array}{rcl} \sigma_1 : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \to & \mathbb{P}^3(\mathbb{C}) \\ ([\xi_0;\xi_1],[\eta_0;\eta_1]) & \mapsto & [\xi_1\eta_1+\xi_0\eta_0;\xi_1\eta_0-\xi_0\eta_1; \\ & & \sqrt{-1}(\xi_1\eta_1-\xi_0\eta_0);\sqrt{-1}(\xi_1\eta_0+\xi_0\eta_1)], \end{array}$$

qui réalise l'isométrie standard entre $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et la quadrique Q_2 de $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$, d'équation homogène

$$\zeta_0^2+\zeta_1^2+\zeta_2^2+\zeta_3^2=0.$$

Si $s : S^2 \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est l'identification naturelle utilisant les projections stéréographiques, on voit facilement que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} S^2 & \xrightarrow{\tau} & S^2 \\ s\downarrow & & \downarrow s \\ \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\theta} & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \end{array}$$

commute, où θ est l'involution de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ donnée par

$$\theta([\xi_0;\xi_1]) = [-\bar{\xi}_1;\bar{\xi}_0]. \tag{3}$$

Il en résulte que

$$\sigma_1(\theta([\xi_0;\xi_1]),\theta([\eta_0;\eta_1])) = \overline{\sigma_1([\xi_0;\xi_1],[\eta_0;\eta_1])}. \tag{4}$$

Si $f : Q_2 \to \mathbb{C}$, on note $\tilde{f} : S^2 \times S^2 \to \mathbb{C}$ la fonction correspondante donnée par

$$\tilde{f}(p,q) = f\sigma_1(s(p),s(q)), \quad \text{pour tous } p,q \in S^2.$$

La formule (4) nous dit alors que f est une fonction paire sur Q_2 si et seulement si

$$\tilde{f}(-p,-q) = \tilde{f}(p,q), \quad \text{pour tous } p,q \in S^2.$$

Autrement dit, $G_{2,2}^{\mathbb{R}}$ s'identifie au quotient $S^2 \times S^2/\{id.,\tau\times\tau\}$, où

$$\begin{array}{rcl} \tau\times\tau : S^2\times S^2 & \to & S^2\times S^2 \\ (p,q) & \mapsto & (-p,-q). \end{array}$$

Lemme 4.2. — *Si, dans l'identification de $S^2 \times S^2$ avec la grassmannienne des 2-plans (orientés) de $\mathbb{R}^4$, un point $(p,q) \in S^2 \times S^2$ correspond à un 2-plan P, alors $(-p,q)$ correspond au 2-plan orthogonal $P^\perp$.*

Ce lemme et les considérations précédentes nous donnent immédiatement la proposition 4.

Démonstration du lemme 3. — Posons $s(p) = [\xi_0; \xi_1]$ et $s(q) = [\eta_0; \eta_1]$. Alors $\{\mathrm{Re}(\zeta), \mathrm{Im}(\zeta)\}$ est une base (orthogonale et positive) de P, où $\zeta = (\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$, avec

$$\begin{aligned} \zeta_0 &= \xi_1\eta_1 + \xi_0\eta_0, \ \zeta_1 = \xi_1\eta_0 - \xi_0\eta_1, \ \zeta_2 = \sqrt{-1}(\xi_1\eta_1 - \xi_0\eta_0), \\ \zeta_3 &= \sqrt{-1}(\xi_1\eta_0 + \xi_0\eta_1). \end{aligned}$$

À l'aide de (3), on voit que $(-p, q)$ correspond au plan Q de base $\{\mathrm{Re}(\nu), \mathrm{Im}(\nu)\}$, où $\nu = (\nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_3)$ et

$$\begin{aligned} \nu_0 &= \bar{\xi}_0\eta_1 - \bar{\xi}_1\eta_0, \ \nu_1 = \bar{\xi}_0\eta_0 + \bar{\xi}_1\eta_1, \ \nu_2 = \sqrt{-1}(\bar{\xi}_0\eta_1 + \bar{\xi}_1\eta_0), \\ \nu_3 &= \sqrt{-1}(\bar{\xi}_0\eta_0 - \bar{\xi}_1\eta_1). \end{aligned}$$

On vérifie aisément que

$$\sum_{j=0}^{3} \zeta_j \nu_j = \sum_{j=0}^{3} \zeta_j \bar{\nu}_j = 0,$$

d'où le lemme. □

On peut aussi prouver la proposition 4.1 en utilisant les quaternions qui nous donnent un isomorphisme

$$SO(4)/\{\pm I\} \cong SO(3) \times SO(3).$$

5. Injectivité de la transformée de Radon sur les grassmanniennes complexes

Soit E un espace hermitien de dimension $n+m$. On note $G_n^{\mathbb{C}}(E)$ la grassmannienne des n-plans complexes de E, munie de la métrique induite par le produit scalaire hermitien de E. Lorsque E est $\mathbb{C}^{n+m}$, avec sa structure hermitienne canonique, on pose $G_{n,m}^{\mathbb{C}} = G_n^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{n+m})$. On voit facilement que $G_{n,m}^{\mathbb{C}}$ est l'espace homogène

$$SU(n+m)/S(U(n) \times U(m)).$$

Ainsi $G_n^{\mathbb{C}}(E)$ est un espace hermitien symétrique irréductible, compact, de rang le minimum de m et n.

On a toujours l'isométrie

$$\rho^{\mathbb{C}} : G_n^{\mathbb{C}}(E) \to G_m^{\mathbb{C}}(E)$$

qui envoie un sous-espace complexe sur son orthogonal et qui donne une involution de $G_n^{\mathbb{C}}(E)$ lorsque $\dim(E) = 2n$. Dans le cas complexe, il n'y a plus qu'une seule notion de parité, lorsqu'on est en présence de cette involution. On a alors le

THÉORÈME 5.1. — *Considérons un espace hermitien de dimension complexe $\geqslant n$.*

(a) La transformation de Radon est injective sur $G_n^{\mathbb{C}}(E)$, lorsque $dim(E) \neq 2n$.

(b) Lorsque la dimension complexe de E est $2n$, la transformation de Radon est injective en restriction aux fonctions paires.

Ce théorème se déduit immédiatement des résultats d'injectivité obtenus dans le cas réel en raison des observations suivantes. Soit V un espace totalement réel maximal de E, muni de la structure euclidienne induite par le produit scalaire hermitien de E. Alors on a un plongement isométrique totalement géodésique

$$\iota : G_n(V) \to G_n^{\mathbb{C}}(E),$$

qui envoie un sous-espace réel F de dimension n de V sur le sous-espace complexe de E engendré par F sur $\mathbb{C}$.

Soit P un n-plan complexe de E, et F (resp. H) un espace totalement réel maximal de P (resp. $P^{\perp}$). Alors $V = F \oplus H$ est un espace totalement réel maximal de E et l'image de F par le plongement de $G_n(V)$ dans $G_n^{\mathbb{C}}(E)$ est P; ainsi par tout point de la grassmannienne complexe, il passe une grassmannienne réelle $G_n(V)$ totalement géodésique (avec V espace totalement réel maximal de E).

Soit $G_n(V) \subset G_n^{\mathbb{C}}(E)$ une grassmannienne réelle totalement géodésique, avec $\dim(V) = n + m$. Puisque $G_n(V)$ et $G_n^{\mathbb{C}}(E)$ sont des espaces symétriques de même rang, les tores maximaux de $G_n(V)$ sont aussi des tores maximaux de la grassmannienne complexe ambiante. Par conséquent, si $f : G_n^{\mathbb{C}}(E) \to \mathbb{C}$ est à transformation de Radon nulle, alors la restriction de f à $G_n(V)$ est aussi à transformation de Radon nulle. Avec ces considérations, la partie (a) du théorème est démontrée. Pour obtenir la partie (b), dans le cas d'un espace hermitien de dimension $2n$, il suffit de remarquer que si V est un espace totalement réel maximal de E et si $f : G_n^{\mathbb{C}}(E) \to \mathbb{C}$ est une fonction paire, alors $f \circ \iota : G_n(V) \to \mathbb{C}$ est une fonction paire de deuxième espèce. En effet, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G_n(V) & \xrightarrow{\rho} & G_n(V) \\ \iota \downarrow & & \downarrow \iota \\ G_n^{\mathbb{C}}(E) & \xrightarrow{\rho^{\mathbb{C}}} & G_n^{\mathbb{C}}(E) \end{array}$$

est clairement commutatif.

6. Formes de degré un sur les grassmanniennes réelles.

On notera dans tout ce qui suit T_X resp.(T_X^*) le fibré tangent resp.(cotangent) d'une variété X. Si F un espace euclidien de dimension $\geqslant p$ et si V est un sous-espace de dimension p de F, rappelons que l'espace tangent $T_{X,x}$ au point $x = \{V\}$ de la grassmannienne $X = G_p(F)$ s'identifie naturellement à $V \otimes W$, où W est le sous-espace orthogonal de V.

Rappelons encore le résultat suivant de [2]

PROPOSITION 6.1. — *Les formes paires de degré 1 sur la quadrique complexe Q_n, avec $n \geqslant 3$, satisfaisant la condition de Guillemin, sont exactes.*

Avec les considérations du paragraphe 3, cette proposition équivaut à

PROPOSITION 6.2. — *Les formes différentielles de degré 1 sur la grassmannienne $G_{2,n}^{\mathbb{R}}$ des 2-plans de $\mathbb{R}^{n+2}$, avec $n \geqslant 3$, qui satisfont la condition de Guillemin, sont exactes.*

Soient F un espace euclidien de dimension $m + n + 2$ et U un sous-espace de dimension $m + n$ de F. On note Γ le cercle unité de $U^{\perp}$. On considère l'application

$$\iota : \Gamma \times G_n(U) \to G_{n+1}(F) \tag{5}$$

donnée par

$$\iota(\nu,y) \mapsto \mathbb{R}\nu \oplus y,$$

pour tous $\nu \in \Gamma$, $y \in G_n(U)$, et on pose dans la suite $X = G_{n+1}(F)$ et $Y = G_n(U)$. Alors l'application

$$\begin{array}{rcl} \iota_\nu : G_n(U) & \to & G_{n+1}(F) \\ y & \mapsto & \mathbb{R}\nu \oplus y \end{array}$$

est un plongement totalement géodésique.

Si $\theta \in C^\infty(T_X^*)$, on construit une forme $\theta_U \in C^\infty(T_Y^*)$ de la manière suivante. Si $\xi \in T_Y$, on pose

$$\theta_U(\xi) = \int_\Gamma (\iota_\nu^*\theta)(\xi)\,d\nu.$$

On vérifie avec Fubini le

LEMME 6.1. — *Si θ satisfait la condition de Guillemin sur X, alors θ_U satisfait la condition de Guillemin sur Y.*

Par ailleurs, il est évident que, lorsque $m = n$, la forme θ_U est paire sur Y dès que θ est une forme paire sur X. Ici la parité est celle correspondant à l'involution donnée par le passage à l'orthogonal.

Nous avons en vue la

PROPOSITION 6.3. — *Soit θ une forme différentielle de degré 1 sur $X = G_{n+1}(F)$, avec $2 \leqslant n \leqslant m$. Si pour tout sous-espace U de dimension $n + m$ de F, on a $d\theta_U = 0$, alors θ est une forme fermée, donc exacte, sur X.*

Démonstration. — Il suffit de prouver que $d\theta(\xi,\eta) = 0$, pour tout $x \in X$ et tous vecteurs tangents $\xi,\eta \in T_{X,x}$. En fait, si nous écrivons $T_{X,x} = V \otimes W$, nous aurons seulement à établir que $d\theta(v_1 \otimes w_1, v_2 \otimes w_2) = 0$, pour tous $v_1,v_2 \in V$ et $w_1,w_2 \in W$. On considère un sous-espace W_1 de dimension 2 de W, contenant w_1,w_2. On pose alors

$U' = V \oplus W_1$, et on note U'' l'orthogonal de U' dans F. Soit Γ un grand cercle de la sphère unité $S(U'')$ de U'', et notons U_1'' le sous-espace de dimension 2 de U'' tel que le cercle unité de U_1'' soit égal à Γ. On considère alors $U = U_1''^{\perp}$ et le plongement totalement géodésique ι, donné par (5). On note $f : S(U'') \to \mathbb{C}$ la fonction paire donnée par

$$f(v) = \iota_v^* d\theta(v_1 \otimes w_1, v_2 \otimes w_2),$$

pour tout $v \in \Gamma$. Par construction, les vecteurs tangents $\xi = v_1 \otimes w_1$ et $\eta = v_2 \otimes w_2$ sont tangents à $G_n(U)$, et puisque $\iota_v^* d\theta = d\iota_v^* \theta$, on a

$$\int_\Gamma f = d\theta_U(\xi, \eta).$$

Cette dernière intégrale est nulle par hypothèse, donc f est une fonction paire, à énergie nulle, sur la sphère $S(U'')$, donc nulle d'après les résultats du paragraphe 3. Ainsi $d\theta(\xi, \eta) = 0$. □

Avec les propositions 6.3 et 6.2, nous avons le

THÉORÈME 6.1. — *Si $2 \leqslant n < m$, alors les formes de degré 1, satisfaisant la condition de Guillemin sur la grassmannienne $G_{n,m}^{\mathbb{R}}$, des n-plans de $\mathbb{R}^{n+m}$, sont exactes.*

Démonstration. — Nous allons montrer ce résultat par récurrence sur l'entier $n \geqslant 2$. La proposition (6.3) nous dit que le résultat est vrai pour $n = 2$. Supposons-là établie pour un entier $n \geqslant 2$ et tout $m > n$. Considérons une forme θ de degré un, à énergie nulle sur $G_{n+1,m+1}^{\mathbb{R}}$, avec $m > n$. Alors, pour tout sous-espace U de dimension $n + m$ de $F = \mathbb{R}^{n+m+2}$ la forme θ_U satisfait la condition de Guillemin sur $Y = G_n(U)$. Avec l'hypothèse de récurrence, la forme θ_U est exacte sur Y et $d\theta_U = 0$. Ainsi θ est exacte, d'après la proposition (6.3). □

Rappelons que $G_{2,2}^{\mathbb{R}}$ est le revêtement universel à deux feuillets de $\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}^2$, et que, via la projection de ce revêtement, les formes de degré 1 sur $\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}^2$ s'identifient aux formes paires de degré 1 sur $G_{2,2}^{\mathbb{R}}$. Avec ceci, on constate que les formes paires sur $G_{2,2}^{\mathbb{R}}$, satisfaisant la condition de Guillemin ne sont pas toujours exactes. En effet, on construit très facilement de telles formes sur $\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}^2$. Notons p_1, p_2, les projections de $\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}^2$ sur $\mathbb{RP}^2$. Si $f_1, f_2 : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{C}$ sont deux fonctions non constantes, alors $\theta = f_1 \circ p_1 d(f_2 \circ p_2)$ est une forme non fermée mais qui satisfait la condition de Guillemin. Nous ne savons pas si les formes paires sur $G_{3,3}^{\mathbb{R}}$ satisfaisant la condition de Guillemin sont exactes. La récurrence mise en place dans la preuve de la proposition 6.2 nous permet seulement d'établir la

PROPOSITION 6.4. — *Soit n un entier $\geqslant 3$. Si les formes paires de degré 1, satisfaisant la condition de Guillemin sur $G_{n,n}^{\mathbb{R}}$ sont exactes, alors pour tout entier $m \geqslant n$, les formes paires de degré 1, satisfaisant la condition de Guillemin sur $G_{m,m}^{\mathbb{R}}$ sont exactes.*

7. Formes de degré un sur les grassmanniennes complexes

Les constructions du paragraphe précédent s'étendent sans peine au cas des grassmanniennes complexes, en considérant des sous-espaces totalement réels.

Soient F un espace hermitien de dimension complexe $m+n+2$ et U un sous-espace complexe de dimension $m+n$ de F. On considère un plan totalement réel $\tilde{U}$ maximal de $U^{\perp}$, muni du produit scalaire euclidien induit par le produit scalaire hermitien de $U^{\perp}$, et Γ le cercle unité de $\tilde{U}$. On a de nouveau une application

$$\iota : \Gamma \times G_n^{\mathbb{C}}(U) \to G_{n+1}^{\mathbb{C}}(F),$$

donnée par

$$\iota(\nu,z) = \mathbb{C}\nu \oplus z,$$

pour tous $\nu \in \Gamma$, $z \in G_n^{\mathbb{C}}(U)$. On pose $\iota_\nu(z) = \iota(\nu,z)$. Maintenant, si θ est une forme de degré 1 sur la grassmannienne complexe $X = G_{n+1}^{\mathbb{C}}(F)$, on construit une forme $\theta_{U,\tilde{U}}$ de degré 1 sur $Y = G_n^{\mathbb{C}}(U)$ en posant

$$\theta_{U,\tilde{U}}(\xi) = \int_\Gamma \iota_\nu^*(\xi)d\nu,$$

pour tout $\xi \in T_Y$. On a alors le résultat suivant

LEMME 7.1. — *Si θ satisfait la condition de Guillemin sur X, alors $\theta_{U,\tilde{U}}$ satisfait la condition de Guillemin sur Y.*

De même, on démontre la proposition suivante, dont la preuve est analogue à celle de la proposition (6.3), et dont nous aurons seulement besoin dans le cas $m = n$.

PROPOSITION 7.1. — *Soit θ une forme différentielle de degré 1 sur $X = G_{n+1}^{\mathbb{C}}(F)$, avec $2 \leqslant n \leqslant m$. Si pour tout sous-espace complexe U de dimension $n + m$ de F et tout plan totalement réel $\tilde{U}$ de $U^{\perp}$, on a $d\theta_{U,\tilde{U}} = 0$, alors θ est une forme fermée, donc exacte, sur X.*

Nous avons maintenant le

THÉORÈME 7.1. — *Les formes différentielles de degré 1 sur la grassmannienne complexe $G_{n,m}^{\mathbb{C}}$ des n-plans complexes de $\mathbb{C}^{n+m}$, avec $2 \leqslant n < m$, qui satisfont la condition de Guillemin, sont exactes.*

Démonstration. — Considérons un espace hermitien F de dimension complexe $n+m$ et F' un sous-espace totalement réel maximal de F, muni de la structure euclidienne induite par le produit scalaire hermitien de F. On note $j : G_n(F') \to G_n^{\mathbb{C}}(F)$ le plongement canonique, qui est totalement géodésique. Soit θ une forme différentielle de degré 1 sur $G_n^{\mathbb{C}}(F)$, satisfaisant la condition de Guillemin. Puisque $G_n(F')$ et $G_n^{\mathbb{C}}(F)$ sont des espaces symétriques de même rang, la restriction $j^*\theta$ est une forme différentielle de degré 1 sur $G_n(F')$, satisfaisant la condition de Guillemin. Elle est donc exacte d'après le théorème (6.1) et nous avons

$$d\theta(\xi,\eta) = 0, \tag{6}$$

pour tous vecteurs ξ,η tangents à une sous-variété totalement géodésique de $G_n^{\mathbb{C}}(F)$, de la forme $G_n(F')$, avec F' sous-espace totalement réel maximal de F. Il nous reste à prouver que θ est une forme fermée, en utilisant la relation (6). Considérons un point x de $X = G_n^{\mathbb{C}}(F)$ et écrivons $T_{X,x} = V \otimes W$. Prenons alors des bases $\{\alpha_1,\ldots\alpha_n\}$ et $\{w_1,\ldots,w_m\}$ de sous-espaces totalement réels maximaux de V et W, respectivement. Si J est la structure complexe de X, alors (6) nous dit que

$$d\theta(\alpha_i \otimes w_k, \alpha_j \otimes w_l) = d\theta(J(\alpha_i \otimes w_k), J(\alpha_j \otimes w_l)) = 0.$$

Lorsque $i \neq j$ ou $k \neq l$, les vecteurs $\alpha_i \otimes w_k$, $J(\alpha_j \otimes w_l)$ sont tangents à une sous- variété totalement géodésique de X, de la forme $\exp_x U$, avec U sous -espace totalement réel de $T_{X,x}$. On en déduit qu'on a encore

$$d\theta(\alpha_i \otimes w_k, J(\alpha_j \otimes w_l)) = 0.$$

Enfin, les vecteurs $\alpha_i \otimes w_k, J(\alpha_i \otimes w_k)$ sont tangents à une sous-variété totalement géodésique M de X, isométrique à l'espace projectif complexe $\mathbb{CP}^n$. Considérons une géodésique fermée γ de M, qui est contenue dans un tore maximal totalement géodésique Z de X. Puisque les tores maximaux de X sont conjugués, il existe une transformation unitaire ϕ et un tore maximal Z_0 contenu dans une grassmannienne réelle du type $G_n(F')$, avec F' sous-espace totalement réel maximal de F, tels que $\phi Z = Z_0$. Alors $\phi^*\theta$ est une forme de degré 1 sur X, satisfaisant la condition de Guillemin ; par conséquent, sa restriction à Z_0 est exacte. On voit alors que

$$\int_\gamma \theta = \int_{\phi\circ\gamma} \phi^*\theta = 0.$$

Ainsi la restriction de θ à l'espace projectif M est une forme à énergie nulle, donc exacte d'après la proposition 2.2 et on obtient

$$d\theta(\alpha_i \otimes w_k, J(\alpha_i \otimes w_k)) = 0.$$

□

Nous avons encore le

THÉORÈME 7.2. — *Les formes différentielles de degré 1 sur la grassmannienne complexe $G_{n,n}^{\mathbb{C}}$ des n-plans complexes de $\mathbb{C}^{2n}$, avec $n \geqslant 2$, qui sont paires et qui satisfont la condition de Guillemin sont exactes.*

Avant de démontrer ce théorème, nous avons besoin de préciser le point suivant. Le plongement de Plücker

$$\Phi : G_{2,n}^{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}(\Lambda^2\mathbb{C}^{n+2})$$

qui envoie un 2-plan complexe engendré par des vecteurs v_1,v_2 de $\mathbb{C}^{n+2}$ sur la droite complexe de $\Lambda^2\mathbb{C}^{n+2}$ engendrée par $v_1 \wedge v_2$ est un plongement isométrique. Lorsque $n = 2$, il permet d'identifier la grassmannienne complexe $G^{\mathbb{C}}_{2,2}$ et la quadrique Q_4 comme suit. Si $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ est la base canonique de $\mathbb{C}^4$, les vecteurs

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4),\ \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4),\\
\omega_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 \wedge e_3 + e_1 \wedge e_4),\ \omega_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 \wedge e_3 - e_1 \wedge e_4),\\
\omega_5 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4),\ \omega_6 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge e_3 - e_2 \wedge e_4)
\end{aligned}$$

forment une base de $\Lambda^2\mathbb{C}^4$ dont on note $(\zeta_1,\dots,\zeta_6)$ les coordonnées complexes correspondantes. Ceci permet d'identifier $\Lambda^2\mathbb{C}^4$ avec l'espace euclidien $\mathbb{C}^6$ et Φ induit alors un plongement isométrique

$$\Phi_1 : G^{\mathbb{C}}_{2,2} \to \mathbb{P}^5(\mathbb{C})$$

dont l'image est la quadrique complexe Q_4, d'équation homogène

$$\zeta_1^2 + \dots + \zeta_6^2 = 0.$$

On démontre alors par un calcul élémentaire la

PROPOSITION 7.2. — *Soit θ une forme de degré un sur la quadrique complexe Q_4. Alors θ est une forme paire (i.e invariante par la conjugaison complexe) sur la quadrique si et seulement si $\Phi_1^*\theta$ est une forme paire sur la grassmannienne des 2-plans de $\mathbb{C}^4$ (i.e invariante par l'involution envoyant un 2-plan sur son orthogonal).*

Nous pouvons maintenant donner la preuve du théorème 7.2. Soit θ une forme paire de degré 1 sur $X = G^{\mathbb{C}}_n(F)$, avec F espace hermitien de dimension complexe $2n+2$. On commence par observer que si U est un $2n$–plan complexe de F et $\tilde{U}$ un 2-plan totalement réel de $U^\perp$, alors $\theta_{U,\tilde{U}}$ est encore une forme paire sur la grassmannienne des n–plans de U. On procède alors par récurrence sur $n \geqslant 2$. Tout d'abord le résultat est vrai pour $n = 2$. En effet, d'après la proposition7.2, les formes paires sur $G^{\mathbb{C}}_{2,2}$ s'identifient aux formes paires sur la quadrique de dimension 4 et d'après la proposition 6.1, les formes paires de degré 1 sur Q_4, satisfaisant la condition de Guillemin sont exactes. Maintenant une récurrence basée sur le lemme 7.1 et la proposition 7.1 permet d'établir le résultat pour tout $n \geqslant 2$.

Pour terminer, énonçons les résultats de rigidité que nous avons établi dans [3].

THÉORÈME 7.3. — *les grassmanniennes réelles ou complexes $G^{\mathbb{R}}_{n,m}$, et $G^{\mathbb{C}}_{n,m}$ sont spectralement rigides à l'ordre 1, lorsque $n \neq m$, et $n + m \geqslant 3$.*

En d'autre termes sur ces espaces, les seules formes quadratiques, satisfaisant la condition de Guillemin, sont les dérivées de Lie de la métrique canonique.

Bibliographie

[1] J. Gasqui- H. Goldschmidt, *Rigidité infinitésimale des espaces projectifs et des quadriques complexes*, J. Reine Angew. Math., **396** (1989), 87–121.

[2] J. Gasqui- H. Goldschmidt, *Radon transforms and spectral rigidity on the complex quadrics and the real grassmannian of rank two*, J. Reine Angew. Math., **480** (1996), 1–69.

[3] J. Gasqui- H. Goldschmidt, *Deformations of compact symmetric spaces*, à paraître.

[4] V. Guillemin, *On micro-local aspects of analysis on compact symmetric spaces*, in "Seminar on micro-local analysis, by V. Guillemin, M. Kashiwara and T. Kawai, Ann. of Math. Studies, n° 93, Princeton University Press, University of Kyoto Press, Princeton, N.J. (1979), 79–111.

[5] R. Michel, *Sur quelques problèmes de géométrie globale des géodésiques*, Bull. Soc. Brasil. Mat., **9** (1978), 19–38.

Jacques GASQUI
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
UMR5582 (UJF-CNRS)
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)

Hubert GOLDSCHMIDT
Department of Mathematics
COLUMBIA UNIVERSITY
NEW YORK, N.Y. 10027 (U.S.A.)