

# SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

NICOLAS BERGERON

## Sur l'homologie et le spectre des variétés hyperboliques

*Séminaire de Théorie spectrale et géométrie*, tome 18 (1999-2000), p. 17-26

[http://www.numdam.org/item?id=TSG\\_1999-2000\\_\\_18\\_\\_17\\_0](http://www.numdam.org/item?id=TSG_1999-2000__18__17_0)

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Grenoble), 1999-2000, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# SUR L'HOMOLOGIE ET LE SPECTRE DES VARIÉTÉS HYPERBOLIQUES

*Nicolas BERGERON*

## Résumé

La notion de cycle géodésique de dimension  $\ell$  dans une variété hyperbolique généralise, en dimension  $\ell$ , celle de géodésique fermée. Dans cet article on énonce des résultats (à paraître dans [4]) relatifs à l'existence de tels cycles. Ces résultats s'appliquent à une famille de variétés hyperboliques de dimension 3 que l'on étudie ici. Ce qui nous permet de décrire de nouveaux exemples de variétés hyperboliques isospectrales.

## Introduction

Soit  $n$  un entier  $> 1$ . Soit  $\mathbb{H}^n$  l'espace hyperbolique de dimension  $n$  i.e. l'unique (à isométrie près) variété riemannienne de dimension  $n$  complète simplement connexe de courbure constante égale à  $-1$ . Soit  $\Gamma \subset \text{Isom}^+(\mathbb{H}^n)$  un sous-groupe discret sans torsion de type fini. Alors  $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$  est une variété riemannienne complète orientée de dimension  $n$  et de courbure constante égale à  $-1$ ; dans la suite une telle variété sera appelée *variété hyperbolique*. On appellera *sous-groupe parabolique* de  $\Gamma$  un sous-groupe de  $\Gamma$  fixant un point de  $S_\infty^{n-1}$  (la sphère à l'infini de  $\mathbb{H}^n$ ). Lorsque  $n = 3$  tout sous-groupe parabolique est abélien (c'est un groupe de translations euclidiennes sur une horosphère quelconque centrée au point de la sphère laissé fixe par le groupe (cf. [14])). Rappelons (cf. [14]) que le groupe  $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^n)$  s'identifie via le modèle de l'hyperboloïde au sous-groupe  $PSO(n,1)$  de  $O(n,1)$  (d'indice 4) constitué des matrices de déterminant 1 préservant la nappe supérieure de l'hyperboloïde. Soit  $\ell \in \mathbb{N}$  tel que  $1 \leq \ell < n$ . Une sous-variété de dimension  $\ell$  totalement géodésique et complète dans  $\mathbb{H}^n$  s'identifie avec l'espace hyperbolique de dimension  $\ell$ . On suppose fixée une telle sous-variété que l'on note  $\mathbb{H}^\ell$ . Le groupe  $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^\ell)$  se plonge dans  $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^n)$  via l'inclusion standard de  $O(\ell,1)$  dans  $O(n,1)$ . Notons  $\text{Stab}(\mathbb{H}^\ell)$  le stabilisateur du sous-espace  $\mathbb{H}^\ell$ , via le modèle de l'hyperboloïde le groupe  $\text{Stab}(\mathbb{H}^\ell)$  s'identifie au groupe  $PS(O(\ell,1) \times O(n-1))$ . Soit

$\Lambda = \Gamma \cap \text{Stab}(\mathbb{H}^\ell)$ , et soit  $F = \mathbb{H}^\ell / \Lambda$ . On obtient alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}^\ell & \hookrightarrow & \mathbb{H}^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ F = \mathbb{H}^\ell / \Lambda & \xrightarrow{i} & \mathbb{H}^n / \Gamma = M \end{array}$$

où l'application  $i$  est induite par l'inclusion de  $\mathbb{H}^\ell$  dans  $\mathbb{H}^n$ . En général,  $\Lambda$  est réduit à l'identité. Dans la suite on suppose que  $F$  est compacte. Dans ce cas on dira que  $M$  contient un cycle géodésique de dimension  $\ell$ .

Dans cet exposé, on étudie l'influence de la présence de tels cycles dans les variétés hyperboliques tant sur le plan topologique que géométrique. Dans une première partie on énonce des résultats à paraître [4]. Puis dans une deuxième partie, on profite de cette occasion pour décrire une famille d'exemples de variétés hyperboliques de dimension 3 contenant des cycles géodésiques de dimension 2 et donc auxquelles les résultats de [4] s'appliquent. On conserve tout au long de cet article les notations introduites ci-dessus.

Commençons tout d'abord par énoncer (et préciser) le lemme algébrique sur lequel les résultats de [4] reposent.

**LEMME 0.1 ([4]).** — *Il existe une suite  $\{\Gamma_m\}$  de sous-groupes d'indices finis dans  $\Gamma$ , décroissante pour l'inclusion, telle que*

$$\Lambda = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \Gamma_m \text{ et } \Gamma_0 = \Gamma.$$

*Remarque.* — Lorsque  $n = 3$ , la preuve de [4], lemme principal, montre en fait que si  $g \in \Gamma - \Lambda$  alors pour presque tout entier  $p$  premier il existe un sous-groupe  $\Gamma(p)$  d'indice fini dans  $\Gamma$  tel que

- $\Lambda \subset \Gamma(p)$ ,
- pour tout sous-groupe parabolique  $P$  de  $\Gamma$ , on ait  $pP \subset \Gamma(p) \cap P$ ,
- $g \notin \Gamma(p)$ .

La preuve du lemme 0.1 suit celle du lemme de Selberg ([18]) en utilisant de plus que  $\Lambda$  est égale à l'intersection de  $\Gamma$  avec un sous-groupe algébrique de  $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ .

## 1. Énoncés des résultats de [4]

À l'aide du lemme 0.1 on peut montrer :

**THÉORÈME 1.1 ([4]).** — *Tout cycle géodésique dans une variété hyperbolique dont le groupe fondamental est de type fini se relève à un revêtement fini en un cycle dont l'image est une sous-variété plongée totalement géodésique.*

Lorsque le cycle est de codimension 1 un peu de topologie (essentiellement le théorème de Van Kampen) permet de montrer le théorème suivant :

**THÉORÈME 1.2** ([4]). — *Tout cycle géodésique de codimension 1 dans une variété hyperbolique de volume fini admet deux relevés disjoints à un revêtement fini dont les images sont deux sous-variétés plongées totalement géodésiques dont l'union est non séparante.*

En particulier on obtient une généralisation d'un théorème de Lubotzky [13], et donc les corollaires suivants :

**COROLLAIRE 1.3.** — *Les variétés hyperboliques arithmétiques construites par Borel dans [6] ont un premier nombre de Betti virtuel infini.*

**COROLLAIRE 1.4.** — *Les variétés hyperboliques non arithmétiques construites par Vinberg dans [21] ou par Gromov et Piatetski-Shapiro dans [8] ont un premier nombre de Betti virtuel infini.*

L'avantage du théorème 1.2 est de permettre de découper les variétés hyperboliques obtenues suivant les sous-variétés totalement géodésiques de codimension 1 et de construire des revêtements finis en les recollant suivant des graphes réguliers. Ainsi le théorème 1.2 permet de jouer avec certaines variétés hyperboliques comme on joue avec les pantalons dans le cas des surfaces.

On peut notamment construire des triplets  $(M, M_1, M_2)$  de variétés hyperboliques telles que

1.  $M_1$  et  $M_2$  sont deux variétés hyperboliques non isométriques revêtant finiment  $M$ ,  
et
2. les groupes fondamentaux de  $M$ ,  $M_1$  et  $M_2$  se surjectent sur un triplet de Sunada (cf. [5]),

et obtenir des conséquences sur le spectre des variétés hyperboliques :

**THÉORÈME 1.5** ([4]). — *Soit  $M$  une variété hyperbolique compacte de dimension  $n$ . Si  $M$  contient un cycle géodésique de dimension  $n - 1$ , alors  $M$  admet deux revêtements finis  $M_1$  et  $M_2$  isospectraux mais non isométriques.*

**COROLLAIRE 1.6.** — *Pour tout  $n$ , il existe des variétés hyperboliques isospectrales non isométriques de dimension  $n$  (non nécessairement arithmétiques).*

Les premiers exemples de variétés hyperboliques isospectrales non isométriques ont été construits par M. F. Vignéras [20] en dimension 2 et 3 ; ce sont des variétés arithmétiques. R. Spatzier dans [19] a montré que pour  $n > 26$  toute variété hyperbolique vérifie les conclusions du théorème 1.5. Enfin récemment A. Reid [16] a construit des exemples non arithmétiques en dimension 3.

## 2. Une famille d'exemples en dimension 3

### Pavages en nids d'abeilles de $\mathbb{H}^3$ .

Dans [7], Coxeter étudie un type particulier de groupes de réflexions. On appelle *pavage en nids d'abeilles* de  $\mathbb{H}^3$  une décomposition de l'espace hyperbolique de dimension 3 en polyèdres réguliers tous congruents. Un polyèdre de cette décomposition est appelé *cellule*. Tous les pavages en nids d'abeilles de  $\mathbb{H}^3$  (et même de  $\mathbb{H}^n$ ) ont été classifiés par Coxeter dans [7] (cf. aussi [21]). Il n'existe que huit pavages en nids d'abeilles de  $\mathbb{H}^3$  différents dont quatre sont constitués de cellules compactes et quatre de cellules non compactes (mais de volume fini). Coxeter code un pavage en nids d'abeilles de  $\mathbb{H}^3$  par trois entiers  $\{a, b, c\}$  où  $\{a, b\}$  est le symbole de Schläfli d'une cellule du pavage et  $c$  le nombre de cellules ayant une arête en commun. L'angle dièdre d'une cellule du pavage est donc égal à  $2\pi/c$ . Avec les notations de Coxeter les 4 pavages à cellules compactes sont

$$\{3,5,3\}, \{5,3,4\}, \{4,3,5\} \text{ et } \{5,3,5\}.$$

Et les 4 pavages à cellules non compactes sont

$$\{3,3,6\}, \{4,3,6\}, \{5,3,6\} \text{ et } \{3,4,4\}.$$

**PROPOSITION 2.1.** — *Soit  $\Gamma$  le groupe de réflexions engendré par un pavage en nids d'abeilles de  $\mathbb{H}^3$ . Soit  $G$  un sous-groupe de  $\Gamma$  sans torsion et d'indice fini. Alors la variété hyperbolique  $M_G = \mathbb{H}^3 / G$  contient un cycle géodésique de dimension 2.*

*Démonstration.* — Soit  $\mathcal{P}$  un pavage en nids d'abeilles de  $\mathbb{H}^3$ . Soit  $\Gamma$  le groupe de réflexions associé à  $\mathcal{P}$ . Soit  $G$  un sous-groupe de  $\Gamma$  sans torsion et d'indice fini (un tel sous-groupe existe toujours d'après un lemme de Selberg [18]). Remarquons pour commencer que si les cellules de  $\mathcal{P}$  sont compactes, alors toute face  $F$  de dimension 2 d'une cellule de  $\mathcal{P}$  induit une famille infinie invariante par  $\Gamma$  de sous-espaces totalement géodésiques de dimension 2 dans  $\mathbb{H}^3$ . De plus l'intersection de chaque membre de cette famille avec une cellule quelconque du pavage est soit vide soit une  $k$ -face ( $k \leq 2$ ) de cette cellule. Comme conséquence immédiate on obtient que la variété  $M_G$  contient un cycle géodésique de dimension 2 (induit par  $F$ ).

Dans la suite on suppose donc que les cellules de  $\mathcal{P}$  sont non compactes. On traite au cas par cas les différents pavages en nids d'abeilles de  $\mathbb{H}^3$  dont les cellules ne sont pas compactes.

*Premier cas :  $\mathcal{P} = \{3,3,6\}$ .* — Chaque cellule de  $\mathcal{P}$  est un tétraèdre idéal régulier.

La variété  $M_G$  hérite de  $\mathbb{H}^3$  une décomposition en cellules localement isomorphe à  $\mathcal{P}$ . Mais la décomposition cellulaire de  $\mathbb{H}^3$  induite par  $\mathcal{P}$  est isomorphe à la décomposition de  $\mathbb{H}^3$  induite par le groupe de Bianchi  $PSL_2(\mathcal{O}_3)$  où  $\mathcal{O}_3$  est l'anneau des entiers du corps de nombre  $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$  (cf. [9]). La proposition 2.1 de [9] implique alors que  $G$  est un sous-groupe d'indice fini de ce groupe de Bianchi. Or dans [15], A. Reid montre qu'un

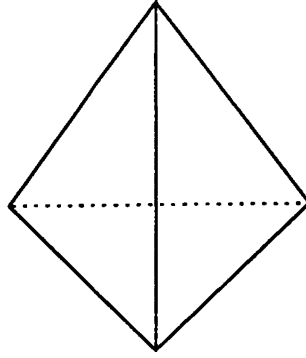


FIG. 1: *Tetraèdre idéal régulier*

tel groupe contient un cycle géodésique de dimension 2 (en fait une infinité). Le premier cas est donc vérifié.

*Deuxième cas:*  $\mathcal{P} = \{3,4,4\}$ . — Ce cas se traite de la même manière que le précédent. Chaque cellule est un octaèdre idéal régulier et il y a quatre cellules autour de chaque arête.

Cette fois le groupe de Bianchi correspondant est  $PSL_2(\mathbb{Z}[i])$  (cf. [9]). Et le théorème de Reid s'applique toujours.

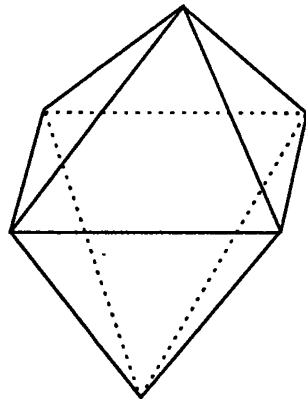


FIG. 2: *Octaèdre idéal régulier*

*Troisième cas:*  $\mathcal{P} = \{5,3,6\}$ . — Chaque cellule est un dodécaèdre idéal régulier (à angles dièdres  $\pi/3$ ). Cette fois on n'a pas affaire à un groupe arithmétique (on peut le vérifier à l'aide de la méthode de Vinberg [21]). Néanmoins Aitchison et Rubinstein ont montré la proposition 2.1 dans ce cas dans [2]. Esquissons leur démonstration.

On se place dans le modèle de la boule unité pour  $\mathbb{H}^3$  et on utilise les coordonnées euclidiennes standards  $x$ ,  $y$  et  $z$ .

Prenons un dodécaèdre euclidien avec deux faces parallèles au plan  $xy$  et avec ses sommets sur 4 parallèles de la sphère unité (parallèles au plan  $xy$ ). L'axe des  $z$  est un axe pour une symétrie d'ordre 5 du dodécaèdre.

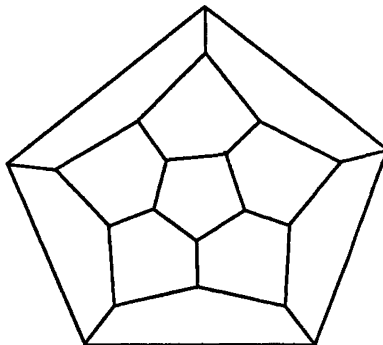


FIG. 3: *Dodécaèdre vu du dessus*

En conservant les mêmes sommets, on remplace ce dodécaèdre euclidien par un dodécaèdre hyperbolique idéal  $\mathcal{D}$ . Les angles dièdres sont tous égaux à  $\frac{\pi}{3}$  et  $\mathbb{H}^3$  peut-être pavé par des copies isométriques de  $\mathcal{D}$  suite à des réflexions dans ses faces. On obtient ainsi le pavage  $\mathcal{P}$ .

Translatons  $\mathcal{D}$  le long de l'axe des  $z$  jusqu'à ce que la face arrière de  $\mathcal{D}$  repose sur le plan  $xy$ . En baissant un peu le polyèdre  $\mathcal{D}$  le long de l'axe des  $z$ , on peut s'arranger pour que le plan  $xy$  intersecte orthogonalement le polyèdre  $\mathcal{D}$  suivant un pentagone régulier d'angle  $\frac{\pi}{3}$  qui induit le pavage  $\{5,6\}$  (notations de [7]) sur le plan  $xy$ . Le cercle sur la sphère à l'infini correspondant à ce plan est donc disjoint de tous les sommets idéaux de  $\mathcal{P}$ . Par symétrie, on obtient une famille infinie et invariante par  $\Gamma$  de plans de  $\mathbb{H}^3$  dont l'intersection avec chaque cellule de  $\mathcal{P}$  est soit vide soit un pentagone régulier parallèle à une unique face. On en déduit immédiatement la proposition 2.1 dans le cas désiré.

*Quatrième cas :  $\mathcal{P} = \{4,3,6\}$ .* — Chaque cellule de  $\mathcal{P}$  est un cube idéal. Ce cas se traite de la même manière que le précédent. Sur le plan médiateur d'une cellule quelconque de  $\mathcal{P}$ , le pavage  $\mathcal{P}$  induit le pavage  $\{4,6\}$  (notations de [7]) par des carrés d'angles  $\frac{\pi}{3}$ . On conclut alors comme au cas précédent.  $\square$

On dit qu'un groupe a *virtuellement une propriété (P)* s'il possède un sous-groupe d'indice fini qui a la propriété (P).

En appliquant le théorème 1.2 on en déduit le corollaire suivant :

**COROLLAIRE 2.2.** — *Soit  $M_G$  une variété hyperbolique comme dans la proposition 2.1. Alors  $M_G$  admet un revêtement fini qui contient deux sous-variétés compactes de dimension 2, disjointes, totalement géodésiques et dont la réunion est non séparante. En particulier le groupe  $G$  se surjecte virtuellement sur le groupe libre à deux générateurs.*

*Démonstration.* — La variété  $M = M_G$  contient un cycle géodésique de dimension 2 d'après la proposition 2.1. Donc le théorème 1.2 implique que  $M$  a un revêtement fini  $\tilde{M}$  auquel le cycle géodésique se relève en deux cycles dont les images sont deux sous-variétés disjointes non homologues à zéro et entre elles dans  $H_2(\tilde{M}, \partial\tilde{M})$ . La première assertion du corollaire est donc démontrée.

Notons  $F_1$  et  $F_2$  les deux sous-variétés de  $\tilde{M}$  ainsi construites. Soient  $C_i \cong F_i \times [-1, 1]$  (pour  $i = 1, 2$ ), deux voisinages colliers de  $F_1$  et  $F_2$  dans  $\tilde{M}$ . On construit une application continue de  $\tilde{M}$  sur un bouquet de deux cercles en projetant tous les points de  $M - (C_1 \cup C_2)$  sur le point base du bouquet et chaque intervalle  $\{x\} \times [-1, 1]$  sur la première boucle lorsque  $x \in F_1$  et sur la deuxième boucle lorsque  $x \in F_2$ . Au niveau des groupes fondamentaux, cette application induit une surjection du groupe fondamental de  $\tilde{M}$  sur le groupe libre de rang deux. Puisque le groupe fondamental de  $\tilde{M}$  est un sous-groupe de  $G$  d'indice fini, le corollaire est démontré.  $\square$

De même on déduit de la proposition 2.1 et du théorème 1.5 le corollaire suivant :

**COROLLAIRE 2.3.** — *Soit  $M_G$  une variété hyperbolique comme dans la proposition 2.1 et compacte. Alors  $M_G$  admet deux revêtements finis isospectraux mais non isométriques.*

Parmi les variétés  $M_G$  considérées dans la proposition 2.1 on trouve certains complémentaires de nœuds ou d'entrelacs. Notamment les complémentaires du nœud de huit, de l'entrelacs de Whitehead, des anneaux borroméens (cf. [9]) ou des nœuds dodécaédraux construits par Aitchison et Rubinstein dans [1].

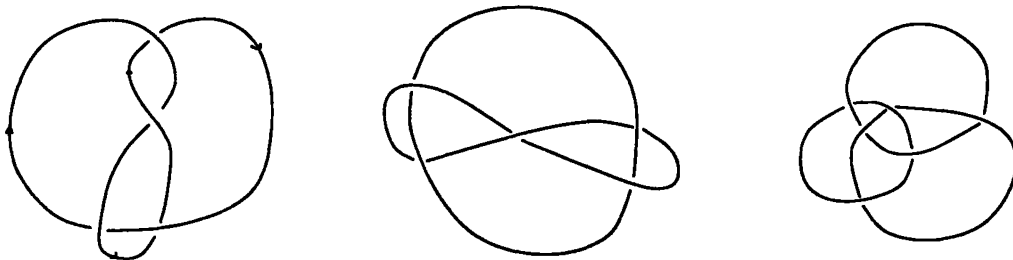


FIG. 4: Nœud de huit, entrelacs de Whitehead et anneaux borroméens

Dans [11] il est conjecturé que les variétés de dimension 3 dont le groupe fondamental est infini ont un premier nombre de Betti virtuel infini. Dans cet article Kojima et Long construisent une famille infinie de variétés de dimension 3 vérifiant cette conjecture. Soit  $M$  une variété de dimension 3 fermée et orientable. Alors  $M$  peut-être réalisée comme un revêtement ramifié de  $S^3$ , ramifié sur le nœud de huit (cf. [10]). À l'aide du corollaire 2.2 on peut montrer :

**THÉORÈME 2.4.** — *Soit  $K$  le nœud de huit (ou l'un des nœuds dodécaédraux construits dans [1], l'entrelacs de Whitehead ou encore les anneaux borroméens). Soit  $M$  un revêtement ramifié compact orientable de  $S^3$ , ramifié sur  $K$ . Il existe un entier  $p_0$  tel que*



si tous les indices de ramification sont divisibles par un même entier premier  $p \geq p_0$  alors  $M$  est finiment revêtue par une variété contenant deux surfaces plongées disjointes dont la réunion est non séparante. En particulier le groupe fondamental de  $M$  se surjecte virtuellement sur le groupe libre de rang deux.

*Démonstration.* — Soit  $r : M \rightarrow \mathbb{S}^3$  un revêtement ramifié sur  $K$ , dont tous les indices de ramification sont divisibles par un même entier premier  $p$ . Soit  $N$  le complémentaire d'un voisinage régulier ouvert de  $K$  dans  $\mathbb{S}^3$ . Soit  $\pi : X = r^{-1}(N) \rightarrow N$  le revêtement non ramifié associé. Remarquons que  $\partial X$  et  $\partial N$  sont réunion disjointe de tores.

La variété  $\text{int}(N) \cong \mathbb{S}^3 - K$  admet une structure hyperbolique et contient un cycle géodésique (Proposition 2.1). Soit  $\Gamma_K$  (resp.  $\Gamma$ ) l'image de  $\pi_1(N)$  (resp.  $\pi_1(X) \subset \pi_1(N)$ ) dans  $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$  par l'application d'holonomie de cette structure hyperbolique. Soit  $\mu$  un méridien dans une composante  $T$  de  $\partial N$ . Dans chaque composante  $\tilde{T}_i$  de  $\pi^{-1}(T)$ , il existe un lacet  $\alpha_i$  qui se projette sur le lacet  $\mu$  parcourut  $r_i$  fois, où  $r_i$  est l'indice de ramification correspondant dans le revêtement ramifié  $M \rightarrow \mathbb{S}^3$ .

Considérons le revêtement (non ramifié)  $Y \rightarrow X$  correspondant au sous-groupe  $\Gamma \cap \Gamma_K(p) \subset \Gamma$ , où  $\Gamma_K(p)$  est un sous-groupe de  $\Gamma_K$  comme dans la remarque suivant le lemme 0.1. Les sous-groupes  $\pi_1(\tilde{T}_i)$  de  $\pi_1(X)$  sont des sous-groupes paraboliques maximaux. Donc, d'après la remarque suivant le lemme 0.1,

$$\alpha_i \in p\pi_1(\tilde{T}_i) \subset \Gamma_K(p).$$

On en déduit :

**Fait 1.** — Les lacets  $\alpha_i$  dans  $\tilde{T}_i$  se relèvent en des lacets dans les préimages (toriques)  $\tilde{T}_i^j$  de  $\tilde{T}_i$  dans le bord de  $Y$ .

On rappelle qu'une variété est obtenue par *chirurgie de Dehn* sur une variété  $V$  de dimension 3 relativement à un lacet dans une composante torique de  $\partial V$  en attachant un tore solide à  $\partial V$  de manière à ce que ce lacet borde un disque méridien dans le tore solide.

Dans chaque composante  $\tilde{T}_i^j$ , on choisit un relevé  $\beta_{ij}$  de  $\alpha_i$ . D'après le fait 1,  $\pi|_{\tilde{T}_i^j}$  est un revêtement régulier qui se restreint en un homéomorphisme de  $\beta_{ij}$  sur  $\alpha_i$ . Or  $\tilde{M}$  est obtenue à partir de  $X$  en effectuant des chirurgies de Dehn sur les courbes  $\alpha_i$ . Si  $\tilde{M}$  est la variété obtenue par chirurgie de Dehn sur  $\beta_{ij}$ , on obtient le fait suivant.

**Fait 2.** — Le revêtement  $Y \rightarrow X$  s'étend en un revêtement (non ramifié)  $\tilde{M} \rightarrow M$ .

On conclut la preuve du théorème 2.4 en remarquant que pour presque tout entier  $p$  premier on peut choisir  $\Gamma_K(p)$  de manière à ce que la variété  $\tilde{M}$  contienne deux sous-variétés disjointes et d'union non séparante. En effet d'après le corollaire 2.2 et la remarque suivant le lemme 0.1, pour presque tout entier  $p$  premier on peut choisir le sous-groupe  $\Gamma_K(p)$  de manière à ce que la variété  $\mathbb{H}^3/\Gamma_K(p)$  contienne deux sous-variétés disjointes, disjointes du bord et d'union non séparante. Alors il en est de même de la variété  $Y$ , puis de la variété  $\tilde{M}$ .  $\square$

*Remarque.* — M. Baker [3] a montré que si  $M$  est une variété compacte orientable qui est un revêtement ramifié au-dessus du nœud de huit de  $S^3$  et dont tous les indices de ramification sont divisibles par un même entier  $n \geq 5$  alors le groupe fondamental de  $M$  se surjecte virtuellement sur  $\mathbb{Z}$ .

Pour finir remarquons que les preuves des théorèmes 1.5 et 2.4 permettent de construire de nombreux exemples de variétés hyperboliques isospectrales en dimension 3.

**THÉORÈME 2.5.** — *Soit  $K$  le nœud de huit (ou l'un des nœuds dodécaédraux construits dans [1], l'entrelacs de Whitehead ou encore les anneaux borroméens). Soit  $M$  un revêtement ramifié compact orientable de  $S^3$ , ramifié sur  $K$ . Il existe un entier  $p_0$  tel que si tous les indices de ramification sont divisibles par un même entier premier  $p \geq p_0$  alors  $M$  est finiment revêtu par deux variétés hyperboliques isospectrales non isométriques.*

Pour prouver ce théorème, comme dans la démonstration du théorème 2.4, on considère le revêtement non ramifié associé  $X \rightarrow N$  et la démonstration du théorème 2.4 nous assure que  $X$  (qui est hyperbolique) contient un cycle géodésique de dimension 2.

Les mêmes jeux combinatoires que dans la preuve du théorème 1.5 permettent alors de construire deux revêtements finis  $X_1$  et  $X_2$  de  $X$  tels que leurs groupes fondamentaux se surjectent sur un triplet de Sunada. Puisque le cycle géodésique évite le bord de  $X$ , les chirurgies de Dehn sur les  $X_i$  donnent deux revêtements finis  $M_1$  et  $M_2$  de  $M$  dont les groupes fondamentaux se surjectent sur un triplet de Sunada. Les variétés  $M_1$  et  $M_2$  sont donc isospectrales. On montre qu'elles ne sont pas homéomorphes de la même manière que dans la preuve du théorème 1.5.

## Bibliographie

- [1] I. R. AITCHISON and J. H. RUBINSTEIN, *Combinatorial cubings, cusps, and the dodecahedral knots*, Topology '90 (Columbus, OH, 1990), 17–26, Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ., 1, de Gruyter, Berlin, 1992.
- [2] I. R. AITCHISON and J. H. RUBINSTEIN, *Geodesic surfaces in knot complements*, Experiment. Math. 6 (1997), n° 2, 137–150.
- [3] M. D. BAKER, *The virtual  $\mathbb{Z}$ -representability of certain 3-manifold groups*, Proc. Amer. Math. Soc. 103 (1988), n° 3, 996–998.
- [4] N. BERGERON, *Premier nombre de Betti et spectre du laplacien de certaines variétés hyperboliques*, à paraître dans L'Enseignement Mathématique.
- [5] P. BUSER, *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces*, Birkhäuser (1992).
- [6] A. BOREL, *Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces*, Topology 2 (1963), 111–122.
- [7] H. S. M. COXETER, *Regular honeycombs in hyperbolic space*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1954, Amsterdam, vol. III, pp. 155–169. Erven P. Noordhoff N.V., Groningen; North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1956.
- [8] M. GROMOV and I. PIATESKI-SHAPIRO, *Non-arithmetic groups in Lobachevsky spaces*, Publ. Math. I. H. E. S., pp. 93–103 (1988).
- [9] A. HATCHER, *Hyperbolic structures of arithmetic type on some link complements*, J. London Math. Soc. (2), 27 (1983), 345–355.
- [10] H. HILDEN, M. LOZANO and J. MONTESINOS, *On knots that are universal*, Topology 24 (1985), 499–504.
- [11] S. KOJIMA and D. D. LONG, *Virtual Betti numbers of some hyperbolic 3-manifolds*, A fête of topology, 417–437, Academic Press, Boston, MA, (1988).

- [12] D. D. LONG, *Immersions and embeddings of totally geodesic surfaces*, Bull. London Math. Soc. **19**, pp. 481–484 (1987).
- [13] A. LUBOTZKY, *Free quotients and the first Betti number of some hyperbolic manifolds*, Transform. Groups **1**, pp. 71–82 (1996).
- [14] J. G. RATCLIFFE, *Fundations of hyperbolic manifolds*, Graduate Texts in Mathematics 149, Springer-Verlag (1994).
- [15] A. W. REID, *Totally geodesic surfaces in hyperbolic 3-manifolds*, Proc. Edinburgh Math. Soc. (1991) **34**, 77–88.
- [16] A. W. REID, *Isospectrality and commensurability of arithmetic hyperbolic 2- and 3-manifolds*, Duke Math. J. (1992) **65**, 215–228.
- [17] P. SCOTT, *Subgroups of surface groups are almost geometric*, J. London Math. Soc. **17** (2) (1978) 555–565.
- [18] A. SELBERG, *On discontinuous groups in higher-dimensional symmetric spaces*, in: Contributions to Function Theory, edited by K. Chandrasekharan, Tata Inst. of Fund. Research, Bombay (1960), 147–164.
- [19] R. J. SPATZIER, *On isospectral locally symmetric spaces and a theorem of von Neumann*, Duke Math. J. (1989) **59**, 289–294; *Correction*, Duke Math. J. (1990) **60**, 561.
- [20] M.-F. Vignéras, *Variétés Riemanniennes isospectrales et non isométriques*, Ann. of Math. (1980) **112**, 21–32.
- [21] E. B. Vinberg, *Geometry II*, Encyclopedia of Mathematical Sciences, **29**, Springer-Verlag (1993).

Nicolas BERGERON  
UMPA ENS-Lyon  
46 Allée d'Italie  
69364 Lyon Cedex 7 (France)  
nbergero@umpa.ens-lyon.fr