SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

ERWANN AUBRY

Fonctions harmoniques sur les variétés

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 17 (1998-1999), p. 47-68
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1998-1999__17__47_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
Volume 17 (1999) 47–68

FONCTIONS HARMONIQUES SUR LES VARIÉTÉS

Erwann AUBRY

Un des buts de l'étude des fonctions harmoniques sur les variétés est de trouver des invariants caractéristiques de la métrique dans le comportement du Laplacien. Une des premières études menées dans ce sens fut celle des fonctions harmoniques bornées sur les variétés complètes. On va rappeler brièvement des résultats qui illustrent la dépendance du Laplacien vis-à-vis de la métrique (plus particulièrement de la courbure).

1. L'exemple du disque hyperbolique, conformément équivalent au disque usuel (donc admettant les mêmes fonctions harmoniques) montre qu'en courbure sectionnelle négative, le nombre de fonctions harmoniques bornées peut être très grand (au moins égale au nombre de fonctions continues sur le cercle d'après le théorème de Dirichlet).

2. Un résultat de P. Li et F. Tam [13] montre que sur les variétés à courbure sectionnelle positive à l'infini les choses sont bien mieux contrôlables. En effet, une variété complète vérifiant ces hypothèses a un nombre de bouts fini [on appelle nombre de bout d'une variété relativement à une partie compacte le nombre de composantes non bornées de son complémentaire ; le nombre de bouts de la variété est la borne supérieure (finie ou non) de ces nombres] que les auteurs classent en deux catégories : si E est un bout, on pose $V_E(t) = \mathrm{Vol}(E \cap B_p(t))$. Si la fonction $t/V_E(t)$ est intégrable, on dit que le bout est non parabolique ; sinon, on dit qu'il est parabolique. Les auteurs ont montré que pour chaque bout non parabolique, on peut construire une fonction harmonique bornée qui tend asymptotiquement vers 1 sur ce bout, et vers 0 sur tous les autres bouts non paraboliques (ils montrent aussi que pour chaque bout parabolique il existe une fonction harmonique qui tend vers l'infini le long de ce bout, qui est bornée le long de tous les autres bouts paraboliques, et qui tend asymptotiquement vers 0 le long des bouts non paraboliques). Ils en déduisent que la dimension de l'espace des fonctions harmoniques bornées est égale au nombre de bouts non paraboliques (et que la dimension de l'espace des fonctions harmoniques bornées d'un côté est égale au nombre total de bouts).

3. Le cas de la courbure de Ricci positive est plus délicat que le précèdent puisque l'hypothèse sur la courbure est plus faible. En se référant au théorème structurel des va-

Classification math. : 58G25, 53C20.

riétés complètes de courbure de Ricci positive de Cheeger-Gromoll, dont on déduit que de telles variétés n'ont qu'au plus deux bouts, on peut s'attendre à ce que la dimension de l'espace des fonctions harmoniques bornées soit de dimension finie. En fait on a le résultat suivant plus fort :

THÉORÈME 1 (S. Y. Cheng [4]). — *Toute fonction harmonique de croissance strictement sous-linéaire (i.e. il existe $x_0 \in M$ tel que $f(x) = o(d(x_0, x))$) sur une variété à courbure de Ricci positive est constante.*

La démonstration de ce théorème (donnée dans la deuxième partie de ce papier) découle directement d'une estimation du gradient du log des fonctions harmoniques positives (lemme 1.1).

Une telle rigidité des fonctions harmoniques sur les variétés à courbure de Ricci positive inspira à Yau la conjecture suivante :

On dira d'une fonction à valeurs réelles définie sur un espace métrique (M, d) qu'elle est à croissance polynomiale d'ordre au plus k s'il existe une constante $C > 0$ et un point p de M telle que $f(x) \leqslant (1 + C.d(x, p)^k)$ pour tout point x de M.

CONJECTURE 1. — *Soit M^n une variété complète à courbure de Ricci positive. Si on note $\mathcal{H}_d(M)$ l'ensemble des fonctions harmoniques à croissance d'ordre au plus d sur M, alors on a :*

$$\dim \mathcal{H}_d \leqslant \dim \mathcal{H}_d(\mathbb{R}^n) .$$

On rappelle que $\mathcal{H}_d(\mathbb{R}^n)$ est engendré par les polynômes homogènes harmoniques de degré au plus d. On a donc $\dim \mathcal{H}_d = C_{n+d}^d - C_{d+n-1}^{d-1} = O(d^{n-1})$.

Jusqu'aux travaux de T. Colding et W. Minicozzi ([6], [7], [8], [9]) cette conjecture n'avait été démontrée que dans les cas $d = 1$ et $n = 2$ par P. Li et F. Tam [13].

Dans le cas $d = 1$ (cf. [15]), ils ont montré que si M^n est une variété à courbure de Ricci tel que le volume des boules géodésiques est à croissance polynomiale d'ordre au plus k, alors $\dim \mathcal{H}_1(M) \leqslant \dim \mathcal{H}_1(R^k)$.

Dans le cas $n = 2$ (cf. [16]), ils ont montré que si M est une variété dont la partie négative de la courbure est intégrable, alors pour tout bout e_i :

$$\alpha_i = 1 - \lim_{r \to \infty} \frac{V_{e_i}(r)}{\pi r^2} \text{ existe}$$

et pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\sum_{i=1}^{k} \dim \mathcal{H}_{d(1-\alpha_i)-\varepsilon}(R^2) - k' \leqslant \dim \mathcal{H}_d(M) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \dim \mathcal{H}_{d(1-\alpha_i)}(R^2)$$

avec $k' = \mathrm{card}\{i/\alpha_i = 1\}$ et, par convention : $\dim \mathcal{H}_d(M) = 0$ si $d < 0$. De plus il y a égalité dans la seconde inégalité si la courbure est positive à l'infini. En remarquant alors qu'en courbure partout positive, les surfaces sont soit isométriques à $R \times S^1$, soit elles n'ont qu'un bout.

Ces deux résultats partiels vis-à-vis de la conjecture de Yau sont toutefois beaucoup plus forts que ceux conjecturés. En particulier, ils laissent penser que le $\mathbb{R}^n$ par rapport auquel on compare le comportement harmonique de nos variétés n'est pas celui ayant la même dimension, mais celui de même croissance des volumes (phénomène déjà observé dans l'étude des inégalités isopérimétriques).

Le but principal de ce papier est d'exposer la démonstration, dûe à P. Li ([12]), d'un résultat récent de T. Colding et W. Minicozzi qui a le double mérite d'être beaucoup plus simple que la preuve originale, et de démontrer le résultat plus large suivant :

Dans toute la suite on dira d'une variété riemannienne qu'elle vérifie l'hypothèse $(\mathcal{H}_{C_0,\nu})$ *si :* $\forall x \in M, \forall r' \geqslant r > 0$, *on a :*

$$V_x(r') \leqslant V_x(r) C_0 \left(\frac{r'}{r}\right)^{\nu}$$

(où $V_x(r)$ *est le volume de la boule géodésique de centre* x *et de rayon* r*).*

De même on dira qu'elle vérifie l'hypothèse $(\mathcal{M})$ *si :* $\exists \lambda > 0$, *telle que* $\forall x \in M, \forall r > 0$, *et pour toute fonction sous-harmonique positive sur* M, *on a :*

$$\lambda \int_{B_x(r)} f \geqslant V_x(r) f(x)$$

(où $B_x(r)$ *désigne la boule géodésique de centre* x *et de rayon* r*).*

THÉORÈME 2 (Colding-Minnicozzi, Li). — *Pour toutes constantes* C_0 *et* ν, *il existe une constante* $C(C_o, \nu) > 0$ *telle que pour toute variété riemannienne complète* (M^n, g) *vérifiant* $(\mathcal{H}_{C_0,\nu})$ *et* $(\mathcal{M})$*, pour tout fibré vectoriel euclidien* E *de rang* m *sur* M, *et pour tout sous-espace linéaire* $S_d(M,E) \subset \Gamma(E)$ *de sections de* E *vérifiant* $\forall u \in S_d(M,E)$ *on a :*

a) $\triangle |u|^2 \leqslant 0$

b) $|u|(x) \in \mathcal{O}(\rho^d(x))$

alors, on a :

$$\dim S_d(M) \leqslant mC\lambda d^{\nu-1} .$$

Le lien entre ce théorème et la conjecture de Yau est le cas du sous espace de sections $\mathcal{H}_d$ du fibré trivial en droite (i.e. $\Gamma(E) = \mathcal{C}^\infty$). L'idée de la démonstration est de munir $S_d(M,E)$ des formes bilinéaires symétriques positives suivantes :

$$\langle f, g \rangle_r = \int_{B_p(r)} (f, g) d\nu .$$

Si K est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $S_d(M,E)$, alors, ce sont des produits scalaires pour r assez grand. On compare alors les boules unités de $S_d(M,E)$ pour ces différentes métriques. Plus particulièrement, on étudie $\det A_r^{r'}$ où $A_r^{r'}$ est définie par $\langle \cdot , \cdot \rangle_r = \langle A_r^{r'} \cdot , \cdot \rangle_{r'}$.

La démonstration se décompose en deux lemmes. Le premier démontre que si M est une variété complète à croissance polynomiale des volumes (hypothèse $(\mathscr{H})$), et K est un espace vectoriel de dimension k dont les éléments vérifient une inégalité de la moyenne $(\mathscr{M})$, alors on a :

$$k \leqslant \frac{m\lambda C(2d)^{\nu-1}}{\left(\det A_r^{(1+1/2d)r}\right)^{1/k}} .$$

Enfin, le deuxième lemme montre que si les éléments de K sont à croissance polynomiale d'ordre au plus d, et M vérifie $(\mathscr{H})$, alors on a :

$$\det A_r^{(1+1/2d)r} \geqslant \left(1 + \frac{1}{2d}\right)^{-k(2d+\nu+1/2d)} .$$

En combinant les deux inégalités on a que la dimension k du sous-espace de $S_d(M,E)$ est majoré par une constante ne dépendant que de d et des caractéristiques de M. On en déduit que $S_d(M,E)$ est de dimension finie, et que sa dimension est majorée par la constante précédente, d'où le théorème annoncé.

Ce rapport comporte deux parties. Dans la première, un peu technique, on démontre que les variétés à courbure de Ricci positive vérifient les hypothèses $\mathscr{H}_{C_0,\nu}$ et $\mathscr{M}$ du théorème de Colding-Minicozzi, Li (c'est donc une partie de résultats analytiques et géométriques), et dans la seconde on présente la démonstration de Li du théorème cité plus haut. La première partie de ce rapport a été écrite de façon à rendre sa lecture possible par le plus grand nombre. On y trouvera beaucoup de choses classiques.

Je tiens à remercier G. Besson pour m'avoir proposé de m'intéresser à ce sujet dans le cadre de mon stage de magistère, et de m'avoir inviter à l'exposer dans ce séminaire.

1. Quelques propriétés des variétés à courbure de Ricci positive

1.1. La courbure de Ricci et le Laplacien

La courbure de Ricci, comme toutes les autres notions de courbure, est un outil permettant l'étude locale des variétés riemanniennes. Nous ne travaillerons, dans la suite, que dans le cadre riemannien. C'est-à-dire que la connexion de nos variétés est celle de Levi-civita. Si (M,g) est une variété riemannienne le tenseur de courbure est :

$$R(X,Y,Z,W) = g\left(D_X D_Y W - D_Y D_X W - D_{[X,Y]} W, Z\right) . \tag{1}$$

On a alors, en particulier, les relations suivantes :

$$\begin{array}{llcl} a) & R(X,Y,Z,W) & = & -R(Y,X,Z,W) = R(Y,X,W,Z) \\ b) & R(X,Y,Z,W) & = & R(Z,W,X,Y) \end{array} \tag{2}$$

La courbure de Ricci, notée Ric, est une trace de R. Si $e_1, \cdots, e_n \in T_pM$ est une base orthonormale, alors :

$$\mathrm{Ric}(v, w) = \mathrm{tr}_{13} R(v, w) = \sum_{i=1}^{n} R(e_i, v, e_i, w) = \sum_{i=1}^{n} R(v, e_i, w, e_i) . \qquad (3)$$

D'après les formules (3), Ric est une forme bilinéaire symétrique. On dira que la courbure de Ricci de M est minorée par k si $(\mathrm{Ric} - kg)$ est une forme bilinéaire positive. Pour toute fonction f de classe C^∞ définie sur M, on définit $\triangle f$ par :

$$\triangle f = - \mathrm{tr}_{12} Dd f = - \sum_i Dd f(e_i, e_i). \qquad (4)$$

On peut alors démontrer facilement la formule suivante, qui nous servira beaucoup dans la suite :

$$\triangle(f h) = f \triangle h + h \triangle f - 2g(\nabla f, \nabla h) , \qquad (5)$$

et dont on déduit que toute fonction harmonique est de carré sous-harmonique.

On démontre aussi, en utilisant le théorème de Stockes la formule suivante, appelée formule de Green :

$$\int_U (f \triangle h - h \triangle f) dv_g = \int_{\partial U} \Big(f \frac{\partial h}{\partial \nu} - h \frac{\partial f}{\partial \nu} \Big) \omega_{n-1}$$

où U est un ouvert tel que $\overline{U}$ est une variété à bord, dv_g est la mesure canonique de (M, g), ν est la normale intérieure et ω_{n-1} est la mesure induite sur la sous-variété ∂U.

Pour montrer que le théorème exposé par Li dans [12] se place bien dans le cadre de la conjecture de Yau nous devons montrer la croissance polynomiale du volume des boules et l'existence d'une inégalité de la moyenne pour les fonctions sous-harmoniques positives sur les variétés à courbure de Ricci positive.

1.2. Régularité de la fonction distance

Soit x un point donné de M, une variété compacte. On définit alors :

$$U_x = \Big\{ v \in T_xM \mid \exists \varepsilon > 0 \ \text{ tel que } \ t \to \exp_x(t v) \ \text{ minimise sur } \ [0, 1 + \varepsilon] \Big\} .$$

On admet connus les faits suivants (dont la démonstration peut être trouvée dans [10]) : U_x est un ouvert, $M = \exp_x(U_x) \amalg \exp_x(\partial U_x)$, $\exp_x$ est un $\mathscr{C}^\infty$ difféomorphisme sur son image et $\exp_x(\partial U_x)$ est de mesure nulle. On notera $\exp_x(\partial U_x) = \mathrm{Cut}(x))$ et on dira que $p \in M$ est conjugué à x si $d_p \exp_x$ est non injective.

1.3. Courbure de Ricci et croissance du volume des boules

Les théorèmes de comparaison sont des outils permettant, sous de bonnes hypothèses sur la courbure (en général on minore la courbure de Ricci ou on encadre la courbure sectionnelle), de comparer la géométrie d'une variété avec celle d'autres variétés de référence, de courbure sectionnelleconstante. Le premier résultat est l'inégalité de Bishop-Gromov :

THÉORÈME 3 (Bishop-Gromov). — *Soit* (M^n, g) *une variété riemannienne complète dont la courbure de Ricci vérifie* $\mathrm{Ric} \geqslant (n-1)kg$, *où* k *est un réel donné. Alors, pour tous les* ε, R *tels que* $0 < \varepsilon < R$, *on a,* $\forall x \in M$:

$$\left(\frac{V_x(R)}{V_x(\varepsilon)}\right) \leqslant \frac{V^k(R)}{V^k(\varepsilon)}, \tag{6}$$

où $V^k(r)$ *désigne le volume de la boule de rayon* r *dans l'espace complet simplement connexe de courbure sectionnelle constante égale à* k *(c'est-à-dire* $\mathbb{R}^n$ *si* $k = 0$, $S^n(1/k)$ *si* $k > 0$ *et* $(H^n, g_0/\sqrt{-1/k})$ *si* $k < 0$*), où* (H^n, g_0) *est l'espace hyperbolique canonique).*

Démonstration. — Pour démontrer cette formule, on doit étudier les variations de la mesure canonique de M en fonction de la distance à un point donné. Cette étude peut être faite en passant par celle du Laplacien de la distance sur une variété. Il est naturel de l'exprimer dans la carte normale centrée en un point x fixe. Soit Φ : $]0, \infty[\times S^{n-1} \longrightarrow M$ l'inverse de la carte normale en m, *i.e.* $\Phi(r, v) = \exp_x(rv)$. On a alors $\Phi^* v_g = \theta(v, r) dr dv$. Supposons $r.v \in U_x$, alors, pour tout voisinage U assez petit de v dans S^{n-1}, pour tout ε assez petit, tout point (t, u) de $[r, r+\varepsilon] \times U$ est tel que $t \cdot u$ appartienne à U_x (puisque U_x est ouvert). Donc la fonction θ est régulière et non nulle sur un voisinage de $[r, r+\varepsilon] \times U$ et la fonction $\rho = d(m, .)$ est régulière sur $\Phi([r, r+\varepsilon] \times U)$. On en déduit que, quand ε et le diamètre de U tendent vers 0,

$$\begin{aligned}
\Delta\rho[\Phi(r, v)] \cdot \left(\int_{[r,r+\varepsilon]\times U} \theta(t, u)\ dt du\right) & \\
&\simeq \int_{\Phi([r,r+\varepsilon]\times U)} \Delta\rho dv_g \\
&= -\int_{\partial(\Phi([r,r+\varepsilon]\times U))} \frac{\partial\rho}{\partial\nu}\omega_{n-1} \\
&= \mathrm{Vol}_{n-1}[\Phi(\{r\} \times U)] - \mathrm{Vol}_{n-1}[\Phi(\{r+\varepsilon\} \times U)] \\
&= \int_U \theta(r, u) du - \int_U \theta(r+\varepsilon, u) du \\
&= \int_{[r,r+\varepsilon]\times U} -\frac{\partial\theta}{\partial r}(t, u) dt du \\
&\simeq -\frac{1}{\theta(r, v)} \cdot \frac{\partial\theta}{\partial r}(r, u) \left(\int_{[r,r+\varepsilon]\times U} \theta(t, u) dt du\right)
\end{aligned}$$

D'où il vient que $\Delta\rho = -\frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial r}$ sur $M \setminus Cut(x)$.

En fait, on peut montrer que $\triangle\rho$ se décompose en une partie régulière, que nous venons de calculer, définie sur U_x, et une partie singulière qui est une mesure négative à support dans $\mathrm{Cut}(x)$.

Pour mener plus loin notre étude de la fonction θ, on a maintenant besoin de la formule de Bochner :

PROPOSITION 1 (formule de Bochner). —*Pour toute fonction f C^∞ sur (M,g), on a :*

$$g(d(\triangle f), df) = |Ddf|^2 + \frac{1}{2}\triangle(|df|^2) + \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f)\,. \tag{7}$$

Démonstration. — Les formules de Bochner sont les formules obtenues en traçant des formules de commutation de tenseurs. Ici on calcule la différence :

$$DDdf(X,Y,Z) - DDdf(Y,X,Z)$$

or, on a :

$$\begin{aligned} DDdf(X,Y,Z) &= X\cdot Ddf(Y,Z) - Ddf(D_XY,Z) - Ddf(Y,D_XZ) \\ &= X.(Y\cdot df(Z)) - X\cdot df(D_YZ)) - (D_XY)\cdot df(Z) + df(D_{D_XY}Z) \\ &\quad - Y\cdot df(D_XZ) + df(D_YD_XZ)\,, \end{aligned} \tag{8}$$

d'où :

$$DDdf(X,Y,Z) - DDdf(Y,X,Z) = R(X,Y,Z,\nabla f)\,. \tag{9}$$

D'autre part :

$$DDdf(X,Y,Z) = DDdf(X,Z,Y) \tag{10}$$

(Par (8) et la symétrie de Ddf).

On obtient, en traçant la relation (9) et en utilisant (10) :

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}_{12}\, DDdf(Y) &= D_Y(\mathrm{tr}_{12}\, Ddf) + \mathrm{tr}_{13}\, R(\nabla f, Y) \\ &= -d\triangle f(Y) + \mathrm{Ric}(\nabla f, Y)\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Enfin, on a : $d(|df|^2)(X) = 2g(D_X\nabla f, \nabla f)$, d'où

$$\begin{aligned} Dd(|df|^2)(X,Y) &= 2g(D_X\nabla f, D_Y\nabla f) + 2g(D_XD_Y\nabla f, \nabla f) - 2g(D_{D_XY}\nabla f, \nabla f) \\ &= 2g(D_X\nabla f, D_Y\nabla f) + 2g(DDdf(X,Y), \nabla f) \end{aligned}$$

soit, en traçant

$$-\frac{1}{2}\triangle|df|^2 = |Ddf|^2 + \mathrm{tr}_{12}\, DDdf(\nabla f)\,. \tag{12}$$

En combinant (11) et (12) on obtient la formule annoncée. □

Nous adopterons par souci de concision, la notation $f'(r,v)$ pour $\frac{\partial f}{\partial r}(r,v)$.

En posant $f(y) = r = d(x,y)$ et en notant que $|dr| = 1$ et que r est régulière sur $\Phi(U_x)$, on a :

$$g(d(\triangle r), dr) = \frac{\partial}{\partial r}\triangle r = -\frac{\partial}{\partial r}\frac{\theta'}{\theta} = -\frac{\theta''}{\theta} + (\triangle r)^2\,,$$

on obtient :

$$-\frac{\theta''}{\theta} = |Ddr|^2 - (\triangle r)^2 + \mathrm{Ric}(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r})\,. \tag{13}$$

On pose $b = \theta^{\frac{1}{n-1}}$, alors :

$$(n-1)\frac{b''}{b} + \mathrm{Ric}(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}) = -\left(|Ddr|^2 - \frac{1}{n-1}(\triangle r)^2\right) \leqslant 0\,. \tag{14}$$

La dernière inégalité étant une conséquence de l'inégalité de Schwarz (le $n-1$ provenant du fait que $Ddr(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}) = d(dr(\frac{\partial}{\partial r}))(\frac{\partial}{\partial r}) = d(1)(\frac{\partial}{\partial r}) = 0$ puisque $r \mapsto \Phi(r,v)$ est une géodésique).

En utilisant l'hypothèse sur la courbure (on remarquera qu'elle n'a pas été utilisée dans ce qui précède), on obtient :

$$b'' + kb \leqslant 0\,.$$

On pose alors :

$$f = \frac{b}{\bar{b}}\,,$$

où $\bar{b}$ est solution de l'équation

$$\bar{b}'' + k\bar{b} = 0$$

avec pour conditions initiales $\bar{b}(0) = b(u,0) = 0$ et $\bar{b}'(0) = b'(u,0) = 1$ car $\theta(r,v) \simeq r^{n-1}$ puisque l'application tangente à exp_m au point 0_m est id_{T_mM}, donc une isométrie de T_mM.. On pose aussi

$$f' = \frac{h}{\bar{b}^2}\,.$$

On a alors

$$h' = \bar{b}(b'' + kb) \leqslant 0\,,$$

donc h décroît et, comme $h(0) = 0$, on en déduit que $f' = h$ est négative.

On en déduit que f aussi décroît. On appelle b^+ le prolongement de b à $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^{n-1}$ obtenu en prolongeant par 0 en dehors de U_x – on remarquera que $\bar{b}$ est définie sur $\mathscr{R}$ tout entier (mais peut être négative en courbure positive, ce qui ne correspond plus à la géométrie !), alors que b n'est définie que sur le segment de direction u contenu dans U_x. Alors $b^+/\bar{b}$ reste décroissante car si le segment $t \mapsto t\cdot u$ atteint le bord de U_x après que $\bar{b}$ ne s'annule, alors la décroissance implique que b s'est annulé auparavant, ce qui est contradictoire. Donc $b^+(t,v)^{n-1}$ est minorée (resp. majorée) par $\frac{b^+(\varepsilon,v)}{\bar b(\varepsilon)}^{n-1}\bar b(t)$ sur $[0,\varepsilon]$ (resp. sur $[\varepsilon,R]$). En intégrant ces inégalités, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\frac{\int_0^R b^+(r,v)^{n-1}dr}{\int_0^\varepsilon \bar b^+(r,v)dr} &\leqslant 1+\frac{\int_\varepsilon^R b^+(r,v)^{n-1}dr}{\int_0^\varepsilon b^+(r,v)^{n-1}dr}\\ &\leqslant 1+\frac{\int_\varepsilon^R \bar b(r)dr}{\int_0^\varepsilon \bar b(r)dr}\leqslant\frac{V^k(R)}{V^k(\varepsilon)}.\end{aligned}$$

D'où nous tirons :

$$\begin{aligned}V_x(R) &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(\int_0^R b^+(r,v)^{n-1}dr\right)dv\\ &\leqslant \frac{V^k(R)}{V^k(\varepsilon)}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(\int_0^\varepsilon b^+(r,v)^{n-1}dr\right)dv\\ &\leqslant \frac{V^k(R)}{V^k(\varepsilon)}V_x(\varepsilon).\end{aligned}$$

□

Remarque. — Dans la démonstration précédente, on a montré que la fonction h est négative pour $r \leqslant 0$. Ceci s'écrit aussi :

$$\frac{b'}{b}\leqslant\frac{\bar b'}{\bar b}.$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}-\triangle r &\leqslant \frac{n-1}{r}\quad\text{si } k=0\\ &\leqslant (n-1)\sqrt{-k}\coth(\sqrt{-k}r)\quad\text{si } k<0\end{aligned}$$

soit, si $k\leqslant 0$, on a toujours :

THÉORÈME 4. — *Pour toute variété riemannienne* $(M^n,\ g)$ *vérifiant* $\mathrm{Ric}(M)\geqslant k(n-1)g$ $(k\geqslant 0)$ *et pour tout point* $x\in M$, *si on note* $r(y)=d(x,y)$, *alors on a :*

$$-\triangle r\leqslant\frac{n-1}{r}(1+\sqrt{-k}r)\,.$$

Cette relation nous servira dans la suite. On peut interpréter cette comparaison du Laplacien de la distance comme un équivalent local du théorème de Bishop-Gromov. Encore une fois, cette relation est vraie sur tout M au sens des distributions.

1.4. Courbure de Ricci et analyse sur les variétés

Nous devons maintenant démontrer que sur les variétés à courbure de Ricci positive, une propriété de la valeur moyenne est vérifiée par les fonctions sous-harmoniques.

Nous allons démontrer un résultat plus général, d'abord dû à J. Moser mais pour une classe d'opérateurs beaucoup plus générale que le simple Laplacien (qui pose déjà assez de problèmes à lui seul), mais, pour la preuve duquel nous suivrons la démarche de S-T. Yau et R. Schoen, qui offre un bon échantillon des techniques classiques utilisées en analyse sur les variétés (à ce titre je conseille, pour ceux que le sujet intéresse, les livres de Yau et Schoen [17]).

THÉORÈME 5. — *Pour tout entier n et tout $p \in]0,2]$, il existe des constantes $C_1(n,p)$ et $C_2(n,p)$ telles que pour tout réel positif k, pour toute variétés riemannienne complète (M^n, g) vérifiant $\mathrm{Ric} \geqslant -(n-1)kg$, pour toute fonction u positive et sous-harmonique sur M, pour tout $\tau \in]0,1/2[$ et $r > 0$, on a :*

$$\sup_{B((1-\tau)r)} u^p \leqslant C_1 \tau^{-C_2(1+\sqrt{k}r)} \left(\frac{1}{\mathrm{Vol}(B(r))} \int_{B(r)} u^p dV \right). \tag{15}$$

On voit bien alors que dans le cas particulier d'une variété à courbure de Ricci positive ($k = 0$), on obtient l'inégalité (W). Pour prouver ce théorème, quatre lemmes sont nécessaires. Le premier, qui est important en lui-même, et qui nous resservira dans la seconde partie du rapport, est une estimation du gradient du logarithme des fonctions harmoniques positives :

LEMME 1.1. — *Pour tout entier n, il existe une constante $C(n)$ telle que pour tout réel positif k, pour toute variété riemannienne complète (M^n, g) vérifiant $\mathrm{Ric} \geqslant -(n-1)kg$, pour toute fonction u harmonique positive sur M, pour tout $r > 0$ et tout point x de M, on a :*

$$\frac{|\nabla u|}{u} \leqslant C_n \left(\frac{1 + r\sqrt{k}}{r} \right) \text{ sur } B_{r/2}(x), \tag{16}$$

où $B_r(x)$ désigne la boule géodésique de M de centre x et de rayon r.

Démonstration. — En appliquant la formule de Bochner à u, on obtient :

$$|Ddu|^2 + \frac{1}{2}\Delta(|\nabla u|^2) - (n-1)k|\nabla u|^2 \leqslant 0$$

or :

$$\Delta(|\nabla u|^2) = 2|\nabla u|\Delta(|\nabla u|) - 2|\nabla(|\nabla u|)|^2,$$

d'où :

$$(n-1)k|\nabla u|^2 - |\nabla u|\Delta(|\nabla u|) \geqslant |Ddu|^2 - |\nabla|\nabla u||^2. \tag{17}$$

On peut alors choisir, en tout point p où $\nabla u \neq 0$ (on remarquera, pour la suite, qu'alors $|\nabla u|$ est localement C^∞), une carte normale telle que $u_1(p) = |\nabla u|(p)$, $u_i(p) = 0$ pour $i \geqslant 2$. On a alors :

$$\nabla_j(|\nabla u|) = \nabla_j \left(\sqrt{\sum u_i^2} \right) = \frac{\sum u_i u_{ij}}{|\nabla u|} = u_{1j},$$

d'où :

$$|\nabla(|u|)|^2 = \sum_j u_{1j}^2 . \tag{18}$$

De plus, on a :

$$|Ddu|^2 = \sum u_{ij}^2 . \tag{19}$$

En mettant ces deux expressions dans (17), on trouve :

$$\begin{aligned}(n-1)k|\nabla u|^2 - |\nabla u|\Delta(|\nabla u|) &\geqslant \sum_{ij} u_{ij}^2 - \sum_j u_{1j}^2 \\ &\geqslant \sum_{i\neq 1} u_{i1}^2 + \sum_{i\neq 1} u_{ii}^2 \\ &\geqslant \sum_{i\neq 1} u_{i1}^2 + \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i\neq 1} u_{ii}\right)^2\end{aligned} \tag{20}$$

or $\Delta u = -\sum u_{ii} = 0$, donc $u_{11}^2 = \left(\sum_{i\neq 1} u_{ii}\right)^2$. On obtient donc finalement (utilisant la symétrie de la matrice (u_{ij}))

$$(n-1)k|\nabla u|^2 - |\nabla u|\Delta(|\nabla u|) \geqslant \frac{1}{n-1}|\nabla(|\nabla u|)|^2 . \tag{21}$$

On pose maintenant $\phi = |\nabla u|/u$. On va chercher à majorer $\Delta\phi$. On a alors, en utilisant l'inégalité précédente :

$$\begin{aligned}\Delta(|\nabla u|) &= u\Delta\phi - 2\nabla\phi.\nabla u \\ \Delta\phi &= \left(\frac{|\nabla u|\Delta(|\nabla u|)}{|\nabla u|u}\right) + \frac{2\nabla\phi.\nabla u}{u} \\ &\leqslant -\left(\frac{|\nabla(|\nabla u|)|^2}{(n-1)|\nabla u|u}\right) + (n-1)k\phi + \frac{2\nabla\phi.\nabla u}{u} .\end{aligned} \tag{22}$$

On pose $\varepsilon = 2/(n-1)$. On a :

$$\begin{aligned}\nabla\phi &= \frac{\nabla|\nabla u|}{u} - \frac{|\nabla u|\nabla u}{u^2} \\ \frac{2\nabla\phi.\nabla u}{u} &= (2-\varepsilon)\frac{\nabla\phi.\nabla u}{u} + \frac{\varepsilon\nabla\phi.\nabla u}{u} \\ &= (2-\varepsilon)\frac{\nabla\phi.\nabla u}{u} + \varepsilon\frac{\nabla(|\nabla u|).\nabla u}{u^2} - \varepsilon\frac{|\nabla u|^3}{u^3} \\ &\leqslant (2-\varepsilon)\frac{\nabla\phi.\nabla u}{u} + \varepsilon\frac{|\nabla(|\nabla u|)||\nabla u|}{u^2} - \varepsilon\frac{|\nabla u|^3}{u^3} .\end{aligned} \tag{23}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\varepsilon\frac{|\nabla(|\nabla u|)||\nabla u|}{u^2} &= \varepsilon\left(\frac{|\nabla|\nabla u||}{(|\nabla u|u)^{1/2}}\right).\frac{|\nabla u|^{3/2}}{u^{3/2}}\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{|\nabla|\nabla u||^2}{|\nabla u|u}+\frac{|\nabla u|^3}{u^3}\right)\\ &= \frac{1}{n-1}\left(\frac{|\nabla|\nabla u||^2}{|\nabla u|u}+\phi^3\right).\end{aligned} \tag{24}$$

En faisant la synthèse des inégalités (12), (13) et (14) on obtient la majoration souhaitée :

$$\triangle\phi \leqslant (n-1)k\phi + \left(2-\frac{2}{n-1}\right)\frac{\nabla\phi.\nabla u}{u} - \frac{1}{n-1}\phi^3 . \tag{25}$$

Pour obtenir l'approximation annoncée, on pose :

$$F(y) = \left(r^2-\rho(y)^2\right)\phi(y) \quad \text{ou} \quad \rho(y) = d(x,y).$$

Puisque $F_{|\partial B_x(r)} = 0$, si u n'est pas constante, F atteint son maximum en un point x_0 intérieur à $B_x(r)$. Supposons, dans un premier cas, que x_0 n'est pas conjugué à x (c'est-à-dire que x_0 n'est pas dans le cut-locus de x). Alors F est C^∞ au voisinage de x_0 (car ρ l'est et $F(x_0) \neq 0 \Rightarrow \Phi(x_0) \neq 0 \Rightarrow \nabla u \neq 0$). On a donc :

$$\nabla F(x_0) = 0 ,$$

$$\triangle F(x_0) \geqslant 0 .$$

Soit, en x_0 :

$$\frac{\nabla\rho^2}{r^2-\rho^2} = \frac{\nabla\phi}{\phi}, \tag{26}$$

$$\frac{\triangle\phi}{\phi} - \frac{\triangle\rho^2}{r^2-\rho^2} + \frac{2\nabla\rho^2\cdot\nabla\phi}{(r^2-\rho^2)\phi} \geqslant 0 .$$

D'où :

$$\frac{\triangle\phi}{\phi} - \frac{\triangle\rho^2}{r^2-\rho^2} + \frac{2|\nabla\rho^2|^2}{(r^2-\rho^2)^2} \geqslant 0 . \tag{27}$$

Or, d'après la remarque 1, on a :

$$\begin{aligned}-\triangle\rho^2 &= -2\rho\triangle\rho + 2|\nabla\rho|^2\\ &= 2-2\rho\triangle\rho\\ &\leqslant 2+2(n-1)(1+\sqrt{k}\rho)\\ &\leqslant C(1+\sqrt{k}\rho) ,\end{aligned} \tag{28}$$

où C est une constante ne dépendant que de n. On a de plus :

$$|\nabla \rho^2| = 2\rho|\nabla\rho| = 2\rho$$

et (d'après (4) et l'inégalité de Schwarz) :

$$\frac{\nabla\phi.\nabla u}{\phi u} = \frac{2\rho\nabla\rho.\nabla u}{(r^2-\rho^2)u} \leqslant \frac{2\rho}{r^2-\rho^2}\phi\,.$$

En utilisant les résultats précédents, on a :

$$0 \geqslant \frac{1}{n-1}F^2 - 2C_1 rF - C_2(1+\sqrt{k}r)^2 r^2,$$

où C_1 et C_2 ne dépendent que de n. D'où :

$$\begin{aligned} F(x_0) &= \sup_{B(r)} F \\ &\leqslant (n-1)\left[C_1 r + \sqrt{C_1^2 r^2 + \frac{C_2}{n-1} r^2 (1+\sqrt{k}r)^2}\right] \\ &\leqslant C_n' r(1+\sqrt{k}r)\,. \end{aligned}$$

D'où :

$$\sup_{B_x(r/2)} \frac{|\nabla u|}{u} \leqslant C_n\left(\frac{1+\sqrt{k}r}{r}\right),$$

où C_n ne dépend que de n. Enfin, dans le cas où x_0 et x sont conjugués, on appelle σ une géodésique minimisante joignant x et x_0. Soit $\bar{x}$ un point de σ proche de x. Alors aucun point de σ n'est conjugué à $\bar{x}$, donc $\rho_{\bar{x}}(y) = d(\bar{x}, y)$ est régulière sur un voisinage de σ. De plus, on a :

$$\rho_{\bar{x}}(y) + d(x,\bar{x}) \geqslant \rho(y)\,,$$

$$\rho_{\bar{x}}(x_0) + d(x,\bar{x}) \geqslant \rho(x_0)\,.$$

On pose alors :

$$\overline{F}(y) = \left[r^2 - (\rho_{\bar{x}} + d(x,\bar{x}))^2\right]\frac{|\nabla u|}{u}\,.$$

On a alors :

$$\overline{F}(y) \leqslant F(y),\ \ \overline{F}(x_0) = F(x_0)\,.$$

On peut alors appliquer ce qui précède à $\overline{F}$, et passer à la limite quand $d(x,\bar{x}) \to 0$. On obtient bien l'estimation annoncée. □

LEMME 1.2. — *Sous les hypothèses du théorème, si* $\Delta h = 0$ *et* $h \geqslant 0$ *sur* $B(r)$, *alors*

$$\sup_{B((1-\tau)r)} h \leqslant \tau^{-C(1+\sqrt{k}r)} \inf_{B((1-\tau)r)} h\,. \tag{29}$$

Démonstration. — Par l'estimation précédente, on a :

$$|\nabla \log h| \leqslant C_1(1+\sqrt{k}r)\frac{1}{r-\rho},$$

où $\rho(x) = d(x, O)$ et O est le centre de $B(r)$. Soit x_1 un point de $B(r)$ tel que

$$h(x_1) = \sup_{B((1-\tau)r)} h,$$

alors, on a :

$$\begin{aligned}\log\frac{h(x_1)}{h(O)} &\leqslant C_1(1+\sqrt{k}r)\int_0^{(1-\tau)r}\frac{ds}{r-s}\\ &= \log \tau^{-C_1(1+\sqrt{k}r)}.\end{aligned}$$

D'où :

$$\sup_{B((1-\tau)r)} h(x) \leqslant h(O)\tau^{-C_1(1+\sqrt{k}r)}.$$

De même, on montre que :

$$h(O) \leqslant \left(\inf_{B((1-\tau)r)} h\right)\tau^{-C_1(1+\sqrt{k}r)}.$$

En combinant ces deux inégalités, on obtient le résultat annoncé. □

LEMME 1.3. — *Supposons que $\Delta u \leqslant 0$ et $u \geqslant 0$ sur $B(r)$. Alors*

$$\int_{B(r)} |\nabla u|^2 \leqslant \frac{C}{\tau^2 r^2}\int_{B((1-\tau)r)} u^2. \tag{30}$$

Démonstration. — Soit $\phi \in C_0^\infty(B(r))$ une fonction telle que $\phi = 1$ sur $B((1-\tau)r)$, $\phi = 0$ sur $\partial B(r)$, $0 \leqslant \phi \leqslant 1$, et $|\nabla\phi| \leqslant C/(\tau r)$. Alors, on a (en utilisant encore une fois la formule de Green et le fait que ϕ soit à support compact dans la boule ouverte $B(r)$:

$$\begin{aligned}0 &\geqslant \int_{B(r)} \phi^2 u\Delta u\\ &= \int_{B(r)} \phi^2|\nabla u|^2 + 2\int_{B(r)} \phi u\nabla\phi\cdot\nabla u.\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\int_{B(r)} \phi^2|\nabla u|^2 &\leqslant -2\int_{B(r)} \phi u\nabla\phi\cdot\nabla u\\ &\leqslant \left(\int_{B(r)} \phi^2|\nabla u|^2\right)^{1/2}\left(\int_{B(r)} u^2|\nabla\phi|^2\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned}\int_{B((1-\tau)r)} |\nabla u|^2 &\leqslant \int_{B(r)} \phi^2 |\nabla u|^2 \\ &\leqslant 4\int_{(B(r)} u^2|\nabla\phi|^2 \\ &\leqslant \frac{C}{a^2r^2}\int_{B(r)} u^2 .\end{aligned}$$

Ce qui prouve le lemme. □

Le dernier lemme dont nous aurons besoin est l'inégalité de Sobolev suivante :

LEMME 1.4. — *Soit M^n une variété complète telle que* $\mathrm{Ric}(M) \geqslant -(n-1)k$. *Alors il existe des constantes positives C_1 et C_2, ne dépendant que de $p \geqslant 1$ et de n telles que :*

$$\int_{B(r)} |\phi|^p \leqslant C_1 r^p e^{C_2\sqrt{k}r}\int_{B(r)} |\nabla\phi|^p dV , \tag{31}$$

$\forall \phi$ lipschitzienne et nulle sur $\partial B(r)$.

Démonstration. — Soit $x_1 \in \partial B(3r)$, et $\rho_1(x) = d(x_1, x)$. Si $x \in B(r)$, alors on a :

$$-\triangle\rho_1 \leqslant \frac{n-1}{2r} + (n-1)\sqrt{k} = \alpha .$$

Or :

$$\triangle e^{-2\alpha\rho_1} = -e^{-2\alpha\rho_1}\left(2\alpha\triangle\rho_1 + 4\alpha^2\right) \leqslant -2\alpha^2 e^{-2\alpha\rho_1} .$$

On remarquera que cette inégalité est vraie au sens des distributions. On a alors $\forall\phi \in C_0^\infty(B(r))$:

$$\begin{aligned}2\alpha^2\int_{B(r)} \phi e^{-2\alpha\rho_1} dV &\leqslant 2\alpha\int_{B(r)} e^{-2\alpha\rho_1}\nabla\phi.\nabla\rho_1 dV \\ &\leqslant 2\alpha\int_{B(r)} e^{-2\alpha\rho_1}|\nabla\phi| dV .\end{aligned}$$

Puisque $2r \leqslant \rho_1 \leqslant 4r$ sur $B(r)$, on a :

$$\begin{aligned}\int_{B(r)} \phi dV &\leqslant \alpha^{-1}e^{4\alpha r}\int_{B(r)} |\nabla\phi| dV \\ &\leqslant C_1 r e^{C_2\sqrt{k}r}\int_{B(r)} |\nabla\phi| dV .\end{aligned}$$

Par un argument de densité, on voit alors que l'inégalité précédente est vraie pour ϕ positive et lipschitzienne à support dans $B(r)$. En l'appliquant alors à $|\phi|^p$ et en appliquant Hölder, on obtient l'inégalité annoncée. □

On va maintenant pouvoir montrer le théorème énoncé plus haut, d'abord dans le cas $p = 2$, puis dans le cas général. Soit $\beta = 1 - \tau/2$ et h la solution du problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} \triangle h = 0, & \text{dans } B(\beta r), \\ h = u, & \text{sur } \partial B(\beta r). \end{cases}$$

Alors on a $\triangle(u - h) \geqslant 0$ sur $B(\beta r)$. D'après le principe du maximum, on a :

$$0 \leqslant u \leqslant h \text{ sur } B(\beta r).$$

D'où :

$$\sup_{B((1-\tau)r)} u^2 \leqslant \sup_{B((1-\tau)r)} h^2 \leqslant C_1 \tau^{-C_2(1+\sqrt{k}r)} \left(\frac{\int_{B((1-\tau)r)} h^2}{\mathrm{Vol}(B((1-\tau)r))} \right).$$

D'autre part, on a :

$$\int_{B((1-\tau)r)} h^2 \leqslant 2 \int_{B((1-\tau)r)} u^2 + 2 \int_{B((1-\tau)r)} (h-u)^2.$$

Or $(h - u) \in C_0^2(B(\beta r))$. D'où :

$$\begin{aligned} \int_{B(\beta r)} (h-u)^2 &\leqslant r^2 e^{C_3\sqrt{k}r} \int_{B(\beta r)} |\nabla(u-h)|^2 \\ &\leqslant 2r^2 e^{C_3\sqrt{k}r} \int_{B(\beta r)} \left[|\nabla h|^2 + |\nabla u|^2 \right] \\ &\leqslant 4r^2 e^{C_3\sqrt{k}r} \int_{B(\beta r)} |\nabla u|^2, \end{aligned}$$

où on a utilisé le principe de Dirichlet, selon lequel $\int |\nabla f|^2$ est minimale pour les fonctions harmoniques à valeurs au bord fixées. On peut alors appliquer le lemme 1.3 pour obtenir :

$$\int_{B(\beta r)} (h-u)^2 \leqslant C\tau^{-2} e^{C_3\sqrt{k}r} \int_{B(r)} u^2.$$

D'où :

$$\int_{B(\beta r)} h^2 \leqslant \left(C\tau^{-2} e^{C_3\sqrt{k}r} + 2 \right) \int_{B(r)} u^2.$$

Soit :

$$\begin{aligned} \sup_{B((1-\tau)r)} u^2 &\leqslant \left(\frac{C_1 \tau^{-C_4(1+\sqrt{k}r)}}{\mathrm{Vol}[B((1-\tau)r)]} \right) \int_{B(r)} u^2 \\ &\leqslant C_1 \tau^{-C_4(1+\sqrt{k}r)} \left(\frac{\mathrm{Vol}[B(r)]}{\mathrm{Vol}[B((1-\tau)r)]} \right) \left(\frac{\int_{B(r)} u^2}{\mathrm{Vol}[B(r)]} \right). \end{aligned}$$

Or, en calculant sa dérivée logarithmique, on obtient facilement que la fonction $r^{-n} e^{-(n-1)\sqrt{k}r} \mathrm{Vol}[B(r)]$ est décroissante, soit

$$\frac{\mathrm{Vol}[B(r)]}{\mathrm{Vol}[B((1-\tau)r)]} \leqslant (1-\tau)^{-n} e^{-\tau(n-1)\sqrt{k}r}.$$

D'où le résultat annoncé dans le cas $p = 2$. La démonstration du cas général se fait en itérant le cas $p = 2$. On sait d'après ce qui précède que $\forall \delta \in]0, 1/2]$, $\forall \theta \in [1/2, 1-\delta]$:

$$\sup_{B(\theta r)} u^2 \leqslant \delta^{-C(1+\sqrt{k}r)} \left(\frac{\int_{B((\theta+\delta)r)} u^2 dV}{\mathrm{Vol}[B((\theta+\delta)r)]} \right).$$

Or, $\delta + \theta \geqslant 1/2$, d'où :

$$\sup_{B(\theta r)} u^2 \leqslant \delta^{-C(1+\sqrt{k}r)} \left(\frac{\int_{B((\theta+\delta)r)} u^2 dV}{\mathrm{Vol}[B(r/2)]} \right).$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}\int_{B((\delta+\theta)r)} u^2 dV &\leqslant \sup_{B(\delta+\theta)r)} u^{2-p} \int_{B((\delta+\theta)r)} u^p dV \\ &\leqslant \left(\sup_{B(\delta+\theta)r)} u^2 \right)^{1-p/2} \int_{B(r)} u^p dV .\end{aligned}$$

Si on pose :

$$M(\theta) = \sup_{B(\theta r)} u^2, \qquad K = \frac{\int_{B(r)} u^p dV}{\mathrm{Vol}[B(r/2)]},$$

on a alors montré que $\forall \delta \in]0, 1/2]$, $\forall \theta \in [1/2, 1-\delta]$:

$$M(\theta) \leqslant K \delta^{-C(1+\sqrt{k}r)} M(\theta+\delta)^{1-p/2}.$$

En choisissant $\theta_0 = 1 - \tau$ et $\theta_i = \theta_{i-1} + 2^{-i}\tau$, pour $i = 1, 2, 3, \ldots$

$$M(\theta_{i-1}) \leqslant K_1 2^{iC(1+\sqrt{k}r)} M(\theta_i)^{\lambda}$$

où $\lambda = 1 - p/2$ et $K_1 = K\tau^{-C(1+\sqrt{k}r)}$. En itérant, on a :

$$M(\theta_0) \leqslant K_1^{\sum_{i=1}^{j} \lambda^{i-1}} 2^{C(1+\sqrt{k}r) \sum_{i=1}^{j} i\lambda^{i-1}} M(\theta_j)^{\lambda^j} \quad \text{pour tout } j \geqslant 1 .$$

En faisant tendre j vers l'infini, on obtient :

$$M(\theta_0) \leqslant \tau^{-C'(1+\sqrt{k}r)} \left[\frac{\int_{B(r)} u^p dV}{\mathrm{Vol}(B(r/2)} \right]^{2/p}$$

où C' ne dépend que de n et p. D'où :

$$\sup_{B((1-\tau)r)} u^p \leqslant \tau^{-pC'(1+\sqrt{k}r)/2} \left[\frac{\int_{B(r)} u^p dV}{\mathrm{Vol}[B(r/2)]} \right].$$

On conclut alors en utilisant le même théorème de comparaison des volumes que dans le cas $p = 2$.

2. Les fonctions harmoniques à croissance polynomiale

Une fois démontrés les lemmes techniques de la première partie, nous passons à une partie beaucoup moins fastidieuse. Nous commençons par démontrer le résultat de Cheng sur les fonctions harmoniques à croissance strictement sous-linéaires :

THÉORÈME 6. — *Toute fonction harmonique de croissance strictement sous-linéaire (i.e. il existe $x_0 \in M$ tel que $f(x) = o(d(x_0, x))$) sur une variété à courbure de Ricci positive est constante.*

Démonstration. — La démonstration est simple une fois démontrée l'estimation du gradient du log des fonctions harmoniques positives donnée dans la partie précédente (1.1) :

Soit $A = \sup_{B(r)} |f|$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, $h = f + A + \varepsilon$ est une fonction strictement positive sur $B(r)$. On a alors :

$$\begin{aligned}\sup_{B(r/2)} |\nabla f| &= \sup_{B(r/2)} |\nabla h| \\ &\leqslant \frac{C_n}{r} \sup_{B(r/2)} (f + A + \varepsilon) \\ &\leqslant \frac{2C_n}{r} (\sup_{B(r)} f + \varepsilon/2) .\end{aligned}$$

On obtient donc le résultat recherché en faisant tendre ε vers 0, puis r vers l'infini. □

On va maintenant prouver le théorème principal énoncé en introduction.

L'idée de la démonstration est de considérer les formes bilinéaires symétriques positives suivantes sur $H_d(M)$:

$$\langle f, g \rangle_r = \int_{B_p(r)} f g d\nu .$$

Si K est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $H_d(M)$, alors, ce sont des produits scalaires pour r assez grand. L'idée est alors de comparer les boules unités de $H_d(M)$ pour ces différentes métriques. Plus particulièrement, on étudie $\det A_r^{r'}$ où $A_r^{r'}$ est définie par $\langle \cdot, \cdot \rangle_r = \langle A_r^{r'} \cdot, \cdot \rangle_{r'}$.

La démonstration se décompose alors en deux lemmes. Le premier démontre que si M est une variété complète à croissance polynomiale des volumes (hypothèse (W)), et K est un espace vectoriel de dimension k dont les éléments vérifient une inégalité de la moyenne (M), alors on a :

$$k \leqslant \frac{m\lambda C(2d)^{\nu-1}}{\left(\det A_r^{(1+1/2d)r}\right)} .$$

Enfin, le deuxième lemme montre que si les éléments de K sont à croissance polynomiale d'ordre au plus d, et M vérifie (W), alors on a :

$$\det A_r^{(1+1/2d)r} \geqslant \left(1+\frac{1}{2d}\right)^{-k(2d+\nu+\delta)}.$$

En combinant les deux inégalités on a que la dimension k du sous-espace de $H_d(M)$ est majoré par une constante ne dépendant que de d et des caractéristiques de M. On en déduit que $H_d(M)$ est de dimension finie, et que sa dimension est majorée par la constante précédente, d'où le théorème annoncé.

LEMME 2.1. — *Pour toutes constantes C_0 et ν, il existe une constante $C(C_0,\nu)$ telle que pour toute variété riemannienne complète (M,g) vérifiant les hypothèses $(W_{C_0,\nu})$ et (M), pour tout K, espace vectoriel de dimension k de sections d'un fibré E de rang m sur M^n, vérifiant $\forall u \in K$, $\triangle|u|^2 \geqslant 0$, pour toute base (u_i) de K, pour tout point $p \in M$, pour tout $r > 0$ et $\varepsilon \in\,]0,1/2[$, on a :*

$$\sum_{i=1}^{k}\int_{B_p(r)}|u_i|^2 \leqslant mC\lambda\varepsilon^{-(\nu-1)} \sup_{u\in\{\langle A,U\rangle\}}\int_{B_p((1+\varepsilon)r)}|u|^2 \qquad pour\, \nu > 1$$

où $A=(a_i)$ est un vecteur unitaire de $\mathscr{R}^k$ et $U=(u_i)$.

Démonstration. — Pour tout $x \in B_p(r)$ on définit le sous espace $K_x = \{u \in K / u(x) = 0\}$ de K. On peut voir K_x comme le noyau d'une application linéaire de K dans l'espace vectoriel E_x de dimension m. On en déduit donc que K_x est de codimension au plus m. On peut alors construire par changement de base orthonormée une base (v_i) de K telle que $v_i \in K_x$, $\forall i \in [m+1,k]$. Alors $\sum_{i=1}^{k}|u_i|^2(x) = \sum_{i=1}^{m}|v_i|^2(x)$. On a donc :

$$\begin{aligned}|v_i|^2 &\leqslant \frac{\lambda}{V_x(r(1+\varepsilon)-\rho(x))}\int_{B_p((1+\varepsilon)r)}|v_i|^2\\ &\leqslant \frac{\lambda C_0[2(1+\varepsilon)]^{-\nu}}{V_p(r)}\left[\sup_{u\in\langle A,U\rangle}\int_{B_p((1+\varepsilon)r)}|u|^2\right]\left((1+\varepsilon)-\frac{\rho(x)}{r}\right)^{-\nu}\end{aligned}$$

d'où :

$$\sum_{i=1}^{k}\int_{B_p(r)}|u_i|^2 \leqslant \frac{\lambda mC}{V_p(r)}\left(\sup_{\langle A,U\rangle}\int_{B_p((1+\varepsilon)r)}|u|^2\right)\int_{B_p(r)}\left((1+\varepsilon)-\frac{\rho(x)}{r}\right)^{-\nu}.$$

On pose alors $f(\rho) = ((1+\varepsilon)-\frac{\rho}{r})^{-\nu}$. Il ne reste plus qu'à étudier $\int_0^r A_p(\rho)f(\rho)d\rho$, où $A_p(\rho) = \mathrm{Vol}(S_p(\rho))$. Soit $\alpha = 2^{1/q}$ avec q assez grand pour que $\alpha \leqslant 1+\varepsilon/2$. Alors, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^r A_p(\rho) f(\rho) d\rho &= \int_0^{r/2} A_p(\rho) f(\rho) d\rho + \sum_{i=0}^{q-1} \int_{\frac{\alpha^i r}{2}}^{\frac{\alpha^{i+1} r}{2}} A_p(\rho) f(\rho) d\rho \\
&\leqslant 2^{\nu} V_p(r) + \sum_{i=0}^{q-1} f\left(\frac{\alpha^{i+1} r}{2}\right)\left[V_p\left(\frac{\alpha^{i+1} r}{2}\right) - V_p\left(\frac{\alpha^i r}{2}\right)\right] \\
&\leqslant C V_p(r) + \sum_{i=0}^{q-1} \left((1+\varepsilon) - \frac{\alpha^{i+1}}{2}\right)^{-\nu} V_p\left(\frac{\alpha^i r}{2}\right)[C_0 \alpha^{\nu} - 1] \\
&\leqslant C V_p(r) \left(1 + \sum_{i=0}^{q-1} \left((1+\varepsilon) - \frac{\alpha^{i+1}}{2}\right)^{-\nu}\right) \\
&\leqslant C V_p(r) \left(1 + \sum_{i=0}^{q-1} \left((1+\varepsilon) - \frac{(1+\varepsilon/2)\alpha^{i}}{2}\right)^{-\nu}\right) \\
&\leqslant C V_p(r) \left(1 + \int_{-\infty}^{q} \left((1+\varepsilon) - (1+\varepsilon/2)\frac{\alpha^{\rho}}{2}\right)^{-\nu} d\rho\right) \\
&= C V_p(r) \left(1 + \frac{1}{\ln \alpha} \int_0^2 \left[(1+\varepsilon) - (1+\varepsilon/2)\frac{\rho}{2}\right]^{-\nu} d\rho\right) \\
&= V_p(r) O(\varepsilon^{-\nu+1})
\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

LEMME 2.2. — *Pour tout $\nu > 0$ et C_0, pour toute variété riemannienne complète (M, g) vérifiant l'hypothèse $(W_{C_0,\nu})$, pour tout espace vectoriel K de dimension k de sections d'un fibré E sur M vérifiant tout u dans K est de croissance polynomiale d'ordre au plus d, alors $\forall\, p \in M$, $\forall \beta > 1$, $\forall \delta > 0$, $\forall r_0 > 0$, $\exists r > r_0$ tel que pour toute base $\{u_i\}$ de K orthonormée pour le produit scalaire $A_{\beta r} = \int_{B_p(\beta r)} \langle u, v\rangle$, on a :*

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{B_p(r)} |u_i|^2 \geqslant k \beta^{-(2d+\nu+\delta)} .$$

Démonstration. — Soit $(v_i)_{i=1}^k$ une base de K $A_{\beta r}$-orthonormée. D'après les hypothèses sur la croissance des volumes dans M et celle des u_i, on a :

$$\int_{B_p(r)} |v_i|^2 \leqslant C(1 + (\beta r)^{2d+\nu})$$

or :

$$(\det_r A_{\beta^j r})^{1/k} \leqslant \frac{1}{k} \operatorname{tr}_r A_{\beta^j r}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\det_r A_{\beta^j r} &\leqslant C^k(1 + r^{2d+\nu}\beta^{j(2d+\nu)})^k \\ &\leqslant C'2^k r^{k(2d+\nu)}\beta^{jk(2d+\nu)} .\end{aligned}$$

Or, si le lemme est faux, on a :

$$\forall r > r_0, \quad \mathrm{tr}_{\beta r} A_r < k\beta^{-(2d+\nu+\delta)}$$

d'où :

$$\det_{\beta r} A_r < \beta^{-k(2d+\nu+\delta)}$$

et

$$\forall j \in N^*, \quad \det_{\beta^j r} A_r = \prod_{k=0}^{j-1} \det_{\beta^{k+1} r} A_{\beta^k r} < \beta^{-jk(2d+\nu+\delta)}$$

soit :

$$\det_r A_{\beta^j r} = (\det_{\beta^j r} A_r)^{-1} > \beta^{jk(2d+\nu+\delta)} ,$$

dont on tire une contradiction quand j est grand. □

Ce théorème démontre la finitude de la dimension des $H_d(M)$, mais n'approche la conjecture de Yau qu'à un O près (contrairement aux cas $n = 2$ et $d = 1$). Toutefois il s'applique à des variétés beaucoup plus générales que celles à courbure de Ricci positive (et que celles traitées dans les articles de Colding et Minicozzi) puisqu'il s'applique à des variétés admettant des fonctions harmoniques bornées non constantes (par exemple $\mathbb{R}^n \# \mathbb{R}^n$ pour $n \geqslant 3$). De même, il s'applique à des opérateurs plus généraux que le Laplacien ; tout opérateur dont le noyau est composé de fonctions vérifiant une inégalité de la moyenne de type (M). Grâce aux travaux de Saloff-Coste on sait qu'ils sont nombreux. On peut citer les opérateurs elliptiques $L = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$ et $L = a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}$ où (a_{ij}) est uniformément bornée.

On peut alors citer deux corollaires intéressants :

1. Si M^n est une surface minimale de $\mathbb{R}^n$, il existe $p \in M$ tel que $V(B_p(r) \cap M) \leqslant C_0 \mathbb{R}^n$ et L est un opérateur uniformément elliptique sur M, alors l'espace des fonctions L-harmonique à croissance polynomiale d'ordre au plus d est de dimension finie majorée par Cd^{n-1}, où C ne dépend que de M et des constantes d'ellipticité de L.

2. Si M est quasi isométrique à une variété à courbure de Ricci positive, alors, $\dim H_d(M) \leqslant Cd^{n-1}$.

Ce résultat de finitude des dimensions des $H_d(M)$ ouvre le champ d'une nouvelle recherche : les suites $\dim H_d(M)$ sont-elles des invariants caractéristiques de la géométrie d'une variété par isométrie ou quasi-isométrie ? On peut citer un premier résultat dans ce domaine dû à Colding, Minicozzi et Cheeger : si $\dim H_1(M^n) = n+1$ alors M est isométrique à $\mathbb{R}^n$; si $\dim H_1(M) = k+1$, alors le cône à l'infini de M est isométrique à $N \times R^k$ (où N est un cône, éventuellement singulier).

Bibliographie

[1] J. CHEEGER, T. COLDING, W. MINICOZZI, *Linear growth harmonic functions on complete manifolds of non-negative Ricci curvature*, Geom. Func. Anal. 5 (1995), 948–954.

[2] J. CHEEGER, D. GROMOLL, *The splitting theorem for manifolds of non-negative Ricci curvature*, J. Diff. Geom. 6 (1971), 119–128.

[3] J. CHEEGER, D. GROMOLL, *On the structure of complete manifolds of non-negative curvature*, Ann. Math. 92 (1972), 413–443.

[4] S.Y. CHENG, *Liouville theorem for harmonic maps, Geometry of the Laplace operator*, Proc. Symp. Pure Math., vol. 36, AMS (1980), 147–151.

[5] S.Y. CHENG, S.T. YAU, *Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications*, Comm. Pure Appl. Math. 28 (1975), 333-354.

[6] T. COLDING, W. MINICOZZI, *Harmonic functions with polynomial growth*, J. Diff. Geom. 46, n. 1 (1997).

[7] T. COLDING, W. MINICOZZI, *Harmonic functions on manifolds*, preprint.

[8] T. COLDING, W. MINICOZZI, *Weyl type bounds for harmonic functions*, Invent. Math. 131 (1998), 257-298.

[9] T.COLDING, W.MINICOZZI *Liouville theorems for harmonic sections and applications on manifolds*, preprint.

[10] S. GALLOT, D. HULIN, J. LAFONTAINE, *Riemannian Geometry*, Universitext, Springer-Verlag, 1993.

[11] E. HEBEY *Introduction à l'analyse non linéaire sur les variétés*, Fondation, Diderot éditeur, 1997.

[12] P. LI, *polynomial growth harmonic sections*, Math. Research Letters 4 (1997), 35–41.

[13] P. LI, *Curvature and function theory on riemannian manifolds*, preprint.

[14] P. LI, L. F. TAM, *Positive harmonic functions on complete manifolds with non-negative Ricci curvature outside a compact set*, Ann. Math. 125 (1987), 171–207.

[15] P. LI, L. F. TAM, *Linear growth harmonic functions on a complete manifold*, J. Diff. Geom. 29 (1989), 421–425.

[16] P. LI, L. F. TAM, *Complete surface with finite total curvature*, J. Diff. Geom. 33 (1991), 139–168.

[17] M. SCHOEN, S-T. YAU, *Conference Proc. and Lectures Notes in Geometry and topology Vol.I et II*, International Press.

Erwann AUBRY
ENS de LYON
UMPA
46, allée d'Italie
69364 LYON Cedex 07 (France)