SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

EMMANUEL HEBEY

Meilleures constantes et inégalités de Sobolev optimales sur les variétés riemanniennes compactes

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 16 (1997-1998), p. 175-210

<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1997-1998__16__175_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
Volume **16** (1998) (175–210)

MEILLEURES CONSTANTES ET INÉGALITÉS DE SOBOLEV OPTIMALES SUR LES VARIÉTÉS RIEMANNIENNES COMPACTES

Emmanuel HEBEY

Résumé

Ce texte a pour origine une série de conférences données à l'Institut Fourier dans le cadre du séminaire de théorie spectrale et géométrie. Un état des lieux sur les problèmes de meilleures constantes et les inégalités de Sobolev optimales pour les variétés riemanniennes compactes est proposé.

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte. Pour alléger, nous supposerons toujours M sans bord. Nous noterons n sa dimension, et supposerons de plus que $n \geqslant 2$. Étant donné $p \geqslant 1$ un réel, $H_1^p(M)$ désignera l'espace de Sobolev standard, obtenu par complétion de $C^\infty(M)$ pour la norme

$$\|u\|_{H_1^p} = \|\nabla u\|_p + \|u\|_p .$$

Suivant les notations usuelles, $\|.\|_p$ désigne la norme de l'espace de Lebesgue $L^p(M)$. Pour $p \in [1, n[$ réel, on pose

$$p^* = \frac{np}{n-p} .$$

Par inclusion de Sobolev standard, pour tout $p \in [1, n[$ réel, $H_1^p(M) \subset L^{p^*}(M)$. On écrira encore que pour tout $p \in [1, n[$, il existe des constantes réelles A et B telles que pour tout $u \in H_1^p(M)$,

$$\|u\|_{p^*} \leqslant A\|\nabla u\|_p + B\|u\|_p. \qquad (I^1_{p,gen}) .$$

Dans la notation $(I^1_{p,gen})$ ici utilisée, "p" se réfère à l'ordre de l'inégalité, "gen" à générique, et "1" à la puissance de l'inégalité, de sorte que nous parlerons d'inégalité de Sobolev générique d'ordre p et de puissance 1 pour désigner $(I^1_{p,gen})$. On se souviendra que l'inclusion $H_1^p(M) \subset L^{p^*}(M)$ est critique au sens où pour $q > p^*$, $H_1^p(M) \not\subset L^q(M)$.

Classification math. : 46E35, 53C21, 58G30.

Clairement, de l'inclusion $H_1^p(M) \subset L^{p^*}(M)$ on tire aussi que pour tout $p \in [1, n[$, il existe des constantes réelles A et B, distinctes des précédentes, pour lesquelles pour tout $u \in H_1^p(M)$,

$$\|u\|_{p^*}^p \leqslant A\|\nabla u\|_p^p + B\|u\|_p^p \qquad (I_{p,gen}^p) .$$

On parlera ici d'inégalité de Sobolev générique d'ordre p et de puissance p.

Toujours pour $p \in [1, n[$, on note $\mathscr{A}_p(M)$ l'ensemble des réels A pour lesquels il existe un réel B tel que $(I_{p,gen}^1)$ ait lieu pour tout $u \in H_1^p(M)$ avec pour constantes réelles A et B. En abrégé,

$$\mathscr{A}_p(M) = \left\{A \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \exists B \in \mathbb{R} \text{ avec } (I_{p,gen}^1)\right\} .$$

De même, on note $\mathscr{B}_p(M)$ l'ensemble des réels B pour lesquels il existe un réel A tel que $(I_{p,gen}^1)$ ait lieu pour tout $u \in H_1^p(M)$ avec pour constantes réelles A et B. En abrégé,

$$\mathscr{B}_p(M) = \left\{B \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \exists A \in \mathbb{R} \text{ avec } (I_{p,gen}^1)\right\} .$$

Si $A \in \mathscr{A}_p(M)$, et si $A' \geqslant A$, alors $A' \in \mathscr{A}_p(M)$. De même, si $B \in \mathscr{B}_p(M)$, et si $B' \geqslant B$, alors $B' \in \mathscr{B}_p(M)$. Par suite, $\mathscr{A}_p(M)$ et $\mathscr{B}_p(M)$ sont des intervalles d'extrémités droites $+\infty$. Les meilleures constantes relatives à l'inégalité $(I_{p,gen}^1)$, la première $\alpha_p(M)$, et la seconde $\beta_p(M)$, sont définies par

$$\begin{cases} \alpha_p(M) = \inf \mathscr{A}_p(M) \\ \beta_p(M) = \inf \mathscr{B}_p(M) \end{cases}$$

Avec le même type de construction, on pourrait définir des meilleures constantes relatives à l'inégalité $(I_{p,gen}^p)$. Mais comme on s'en convaincra facilement, il s'agit ici ni plus ni moins de $\alpha_p(M)^p$ et $\beta_p(M)^p$. Pour désigner $\alpha_p(M)$ et $\beta_p(M)$, on parlera ainsi de meilleures constantes relatives à l'inclusion de $H_1^p(M)$ dans $L^{p^*}(M)$.

Introduisons maintenant la notion d'inégalité de Sobolev optimale. Nous dirons que l'inégalité de Sobolev optimale $(I_{p,opt}^1)$ d'ordre p et de puissance 1 a lieu sur (M, g) s'il existe un réel B tel que pour tout $u \in H_1^p(M)$,

$$\|u\|_{p^*} \leqslant \alpha_p(M)\|\nabla u\|_p + B\|u\|_p \qquad (I_{p,opt}^1) .$$

Nous dirons par ailleurs que l'inégalité de Sobolev optimale $(I_{p,opt}^p)$ d'ordre p et de puissance p a lieu sur (M, g) s'il existe un réel B, a priori distinct du précédent, tel que pour tout $u \in H_1^p(M)$,

$$\|u\|_{p^*}^p \leqslant \alpha_p(M)^p\|\nabla u\|_p^p + B\|u\|_p^p \qquad (I_{p,opt}^p) .$$

De la même façon, nous dirons que l'inégalité de Sobolev optimale $(J_{p,opt}^1)$ d'ordre p et de puissance 1 a lieu sur (M, g) s'il existe un réel A tel que pour tout $u \in H_1^p(M)$,

$$\|u\|_{p^*} \leqslant A\|\nabla u\|_p + \beta_p(M)\|u\|_p \qquad (J_{p,opt}^1) .$$

Nous dirons ensuite que l'inégalité de Sobolev optimale $(J^p_{p,opt})$ d'ordre p et de puissance p a lieu sur (M,g) s'il existe un réel A, a priori distinct du précédent, tel que pour tout $u \in H^p_1(M)$,

$$\|u\|^p_{p^\star} \leqslant A\|\nabla u\|^p_p + \beta_p(M)^p\|u\|^p_p \qquad (J^p_{p,opt}) \,.$$

La lettre "I" se réfère ici aux inégalités de Sobolev optimales avec priorité donnée à la première constante, tandis que la lettre "J" se réfère aux inégalités de Sobolev optimales avec priorité donnée à la seconde constante. Comme on s'en convaincra facilement,

$$(I^p_{p,opt}) \Rightarrow (I^1_{p,opt}) \text{ et } (J^p_{p,opt}) \Rightarrow (J^1_{p,opt})$$

au sens où l'existence d'un réel B pour lequel $(I^p_{p,opt})$ a lieu, respectivement l'existence d'un réel A pour lequel $(J^p_{p,opt})$ a lieu, entraîne la validité de $(I^1_{p,opt})$ avec pour seconde constante $B^{1/p}$, respectivement la validité de $(J^1_{p,opt})$ avec pour première constante $A^{1/p}$. Par ailleurs, on remarquera que dire que $(I^1_{p,opt})$ a lieu, équivaut à dire que $\mathscr{A}_p(M)$ est fermé, ou encore que $\alpha_p(M) \in \mathscr{A}_p(M)$. De même, dire que $(J^1_{p,opt})$ a lieu, équivaut à dire que $\mathscr{B}_p(M)$ est fermé, ou encore que $\beta_p(M) \in \mathscr{B}_p(M)$.

Deux programmes parallèles de recherche sont associés à ces notions de meilleure constante et d'inégalité de Sobolev optimale. Dans l'un, on s'y réfère sous le nom de programme $\mathscr{A}$, priorité est donnée à la meilleure première constante. Dans l'autre, on s'y réfère sous le nom de programme $\mathscr{B}$, priorité est donnée à la meilleure seconde constante. Nous poserons pour commencer trois questions dans chacun de ces deux programmes. Deux autres questions suivront.

Programme $\mathscr{A}$ – Partie I	Programme $\mathscr{B}$ – Partie I
Question 1$\mathscr{A}$: Que vaut la meilleure constante $\alpha_p(M)$?	Question 1$\mathscr{B}$: Que vaut la meilleure constante $\beta_p(M)$?
Question 2$\mathscr{A}$: L'inégalité optimale $(I^1_{p,opt})$ a-t-elle toujours lieu?	Question 2$\mathscr{B}$: L'inégalité optimale $(J^1_{p,opt})$ a-t-elle toujours lieu?
Question 3$\mathscr{A}$: L'inégalité optimale $(I^p_{p,opt})$ a-t-elle toujours lieu?	Question 3$\mathscr{B}$: L'inégalité optimale $(J^p_{p,opt})$ a-t-elle toujours lieu?

On le constatera au paragraphe deux, les trois questions du programme $\mathscr{B}$ reçoivent toutes des réponses complètes. Les réponses apportées aux questions du programme $\mathscr{A}$, plus précisément aux deux dernières, laissent par contre encore quelques points ouverts. Pour une analyse plus détaillée du sujet que celle qui nous est ici, pour des raisons de longueur, permis de faire, nous renvoyons à Hebey [28].

1. Le programme $\mathscr{A}$ dans sa première partie

On traite pour commencer du programme $\mathscr{A}$ dans sa première partie. L'origine de ce programme, en particulier l'étude de sa première question, remonte aux travaux d'Aubin [3], Federer-Fleming [19], Fleming-Rishel [20], Rosen [40], et Talenti [43]. Le premier pas décisif, le théorème 1.1 qui suit, fut obtenu de façon indépendante par Aubin [3] et Talenti [43].

THÉORÈME 1.1. — *1) Pour tout $p \in [1, n[$, et tout $u \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, l'espace des fonctions régulières à support compact dans l'espace euclidien de dimension n,*

$$\|u\|_{p^*} \leqslant K(n, p)\|\nabla u\|_p \tag{1.1}$$

où

$$K(n,1) = \frac{1}{n}\Big(\frac{n}{\omega_{n-1}}\Big)^{\frac{1}{n}},$$

$$K(n, p) = \frac{1}{n}\Big(\frac{n(p-1)}{n-p}\Big)^{1-\frac{1}{p}}\Big(\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\frac{n}{p})\Gamma(n+1-\frac{n}{p})\omega_{n-1}}\Big)^{\frac{1}{n}}$$

lorsque $p > 1$, et ω_{n-1} désigne le volume de la sphère unité standard de $\mathbb{R}^n$.

2) $K(n, p)$ est la meilleure constante dans (1.1), *et si $p > 1$, l'égalité dans* (1.1) *est réalisée par les fonctions*

$$u_\lambda(x) = \left(\frac{1}{\lambda + |x|^{\frac{p}{p-1}}}\right)^{\frac{n}{p}-1}$$

où λ est un réel quelconque strictement positif.

Pour ce qui est de la preuve de ce théorème, elle est basée sur les travaux de Bliss [10] et des techniques de symétrisation classiques. Grossièrement, on se ramène par symétrisation à l'étude de (1.1) sur des fonctions radiales. Le calcul de $K(n, p)$ suit des travaux de Bliss [10]. Pour $p = 1$, (1.1) n'est autre que l'inégalité isopérimétrique standard. Les fonctions extrémales sont alors les fonctions caractéristiques des boules.

De ce résultat, comme démontré par Aubin [3], on tire la réponse à la question 1$\mathscr{A}$. C'est l'objet du théorème qui suit.

THÉORÈME 1.2. — *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension n. D'une part, pour tout $p \in [1, n[$, la constante A dans $(I^1_{p,gen})$ doit être supérieure ou égale à $K(n, p)$. D'autre part, pour tout $\epsilon > 0$, et tout $p \in [1, n[$, il existe une constante réelle B avec la propriété que pour tout $u \in H_1^p(M)$,*

$$\|u\|_{p^*} \leqslant (K(n, p) + \epsilon)\|\nabla u\|_p + B\|u\|_p.$$

En particulier, $\alpha_p(M) = K(n, p)$ pour tout p et toute variété riemannienne compacte.

La preuve de la première assertion ne nécessite nullement la compacité de la variété. L'argument ici est purement local. Par l'absurde, de la validité d'une inégalité $(I^1_{p,gen})$ avec $A < K(n,p)$, on se ramène par comparaison (locale) des métriques à la validité sur l'espace euclidien d'une inégalité du type (1.1) mais avec une constante $A' < K(n,p)$ en lieu et place de $K(n,p)$. D'où la contradiction et la première assertion du théorème. Pour ce qui est de la seconde assertion, étant donné $\epsilon > 0$ réel, et $x \in M$, il existe une carte (Ω, φ) de M en x avec la propriété que les composantes g_{ij} de g dans cette carte vérifient $(1+\epsilon)^{-1}\delta_{ij} \leqslant g_{ij} \leqslant (1+\epsilon)\delta_{ij}$ en tant que formes bilinéaires. Du théorème 1.1 il suit que pour tout $\epsilon > 0$, et tout $x \in M$, il existe (Ω, φ) une carte de M en x telle que pour tout $u \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\|u\|^p_{p^*} \leqslant (K(n,p)^p + \epsilon)\|\nabla u\|^p_p . \tag{1.2}$$

Le résultat s'obtient alors en recouvrant M par un nombre fini de telles cartes, et par recollement des inégalités locales (1.2) via une partition de l'unité.

En ce qui concerne le théorème 1.2, comme démontré par Hebey [24], la constante B peut être choisie de sorte qu'elle ne dépende que de n, p, ϵ, un minorant de la courbure de Ricci, et un minorant (strictement positif) du rayon d'injectivité.

La réponse à la question $1\mathscr{A}$ maintenant donnée, abordons les questions $2\mathscr{A}$ et $3\mathscr{A}$. On se souviendra que la validité de $(I^p_{p,opt})$ entraîne la validité de $(I^1_{p,opt})$, de sorte qu'une réponse positive à la question $3\mathscr{A}$, entraîne à son tour une réponse positive à la question $2\mathscr{A}$. L'implication inverse est par contre fausse, on s'en rendra compte assez vite.

Nous commencerons ici par le résultat suivant de Hebey-Vaugon [32]. Il règle entièrement la question pour $p = 2$. Les réponses aux questions $2\mathscr{A}$ et $3\mathscr{A}$ sont positives dans ce cas.

THÉORÈME 1.3. — *L'inégalité optimale $(I^2_{2,opt})$ a toujours lieu, à savoir sur toute variété riemannienne compacte de dimension $n \geqslant 3$. Il en va de même pour l'inégalité optimale $(I^1_{2,opt})$, qui a donc elle aussi toujours lieu.*

La preuve de ce résultat est assez complexe. Elle passe par des arguments non triviaux de théorie des équations aux dérivées partielles. Inutile de vouloir en donner les grandes lignes, essayons juste d'en donner l'idée générale. Pour α un réel strictement positif, et $u \in H^2_1(M)$, posons

$$I_\alpha(u) = \frac{\|\nabla u\|^2_2 + \alpha\|u\|^2_2}{\|u\|^2_{2^*}} .$$

Le résultat à démontrer est clairement équivalent à l'existence d'un $\alpha_0 > 0$ tel que

$$\inf_{u \in H^2_1(M)\setminus\{0\}} I_{\alpha_0}(u) \geqslant \frac{1}{K(n,2)^2} .$$

Cette remarque faite, la preuve procède par contradiction : on suppose que pour tout $\alpha > 0$,

$$\inf_{u \in H_1^2(M)\setminus\{0\}} I_\alpha(u) < \frac{1}{K(n,2)^2} .$$

D'une telle inégalité, par techniques variationnelles maintenant classiques, on obtient ce qui suit : pour tout $\alpha > 0$, il existe $u_\alpha \in C^\infty(M)$, $u_\alpha > 0$, et il existe $\lambda_\alpha \in]0, K(n,2)^{-2}[$, tels que

$$\begin{cases} \Delta_g u_\alpha + \alpha u_\alpha = \lambda_\alpha u_\alpha^{2^\star - 1} \\ \int_M u_\alpha^{2^\star} dv_g = 1 \end{cases}$$

où dv_g désigne l'élément de volume riemannien, et Δ_g le laplacien relatif à g. L'idée consiste maintenant à montrer que pour α grand, de tels u_α n'existent pas. Cela ressemble beaucoup à ce qui est donné gratuitement dans le contexte euclidien par l'identité de Pohozaev [39]. Pour montrer que les u_α n'existent pas si α est grand, on fait tendre α vers $+\infty$. Les u_α développent alors un point de concentration. Une étude détaillée du phénomène de concentration, et un argument de renormalisation, nous permettent de revenir au contexte euclidien via des métriques qui approchent la métrique euclidienne. Le contrôle de la différence entre ces métriques et la métrique euclidienne nous permet d'utiliser l'identité de Pohozaev [39]. Cette identité fournit la contradiction recherchée. D'où le résultat.

La question maintenant réglée pour $p = 2$, abordons les cas $p \neq 2$. Dans [3], Aubin obtenait pour tout p la validité de $(I^1_{p,opt})$ dans les deux situations suivantes : ou bien la variété considérée est de dimension 2, ou bien elle est à courbure sectionnelle constante. Le premier de ces résultats sera ensuite généralisé par Druet à l'inégalité $(I^p_{p,opt})$. Toujours dans [3], Aubin obtenait en plus la validité de $(I^p_{p,opt})$ pour tout $p \in [1,2]$, avec $p \neq 2$ si $n = 2$, dans le cas de la sphère standard (S^n, h) de $\mathbb{R}^{n+1}$. La véritable avancée dans l'étude des questions $2\mathcal{A}$ et $3\mathcal{A}$ pour $p \neq 2$, une petite révolution en fait, arrivera quelque vingt années plus tard avec les travaux de Druet [16], [17]. Le tout commence avec le résultat suivant.

THÉORÈME 1.4. — *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension n, et soit $p \in [1, n[$ un réel. Supposons $p > 2$, $p^2 < n$, et la courbure scalaire de g strictement positive en au moins un point de M. L'inégalité $(I^p_{p,opt})$ est alors fausse sur (M, g).*

Aussi étrange que cela puisse paraître, la démonstration de ce résultat inattendu est assez simple. En suivant ce qui est fait dans Druet [17], on reprend les fonctions extrémales du théorème 1.1, fonctions extrémales que l'on localise sur M autour d'un point x_0 où la courbure scalaire S_g de g est strictement positive. Plus précisément, pour $x_0 \in M$ tel que $S_g(x_0) > 0$, et pour ϵ un réel strictement positif, on considère les fonctions

$$u_\epsilon = \left(\epsilon + r^{\frac{p}{p-1}}\right)^{1-\frac{n}{p}} \varphi(r)$$

où r désigne la distance à x_0, et φ est une fonction cut-off centrée en x_0. Étant donné α un réel strictement positif, et si I_α est la fonctionnelle

$$I_\alpha(u) = \frac{\|\nabla u\|_p^p + \alpha\|u\|_p^p}{\|u\|_{p^*}^p},$$

un développement limité en ϵ donne

$$K(n,p)^p I_\alpha(u_\epsilon) \leqslant 1 + \epsilon^{\frac{n}{p}-1} \times \left(A_1 + A_2\epsilon^{\frac{p^2-n}{p}} - A_3 S_g(x_0)\epsilon^{2\frac{p-1}{p}+1-\frac{n}{p}} + o(\epsilon^{\frac{p^2-n}{p}}) + o(\epsilon^{2\frac{p-1}{p}+1-\frac{n}{p}})\right)$$

où A_1, A_2, et A_3 sont des constantes strictement positives indépendantes de ϵ. Comme $p > 2$ et $p^2 < n$,

$$1 - \frac{n}{p} + 2\frac{p-1}{p} < \frac{p^2-n}{p} < 0\,.$$

Pour tout $\alpha > 0$, on pourra ainsi trouver $\epsilon > 0$ petit de sorte que

$$K(n,p)^p I_\alpha(u_\epsilon) < 1\,.$$

Il s'ensuit qu'il n'existe pas de constante réelle B pour laquelle $(I_{p,opt}^p)$ ait lieu pour tout $u \in H_1^p(M)$. D'où le résultat.

Nous l'avons déjà dit, dans la mesure où la sphère unité standard (S^n, h) de $\mathbb{R}^{n+1}$ est à courbure sectionnelle constante, l'inégalité $(I_{p,opt}^1)$ est vraie pour tout p sur (S^n, h). Du théorème 1.4, il suit par contre que l'inégalité $(I_{p,opt}^p)$ est fausse sur (S^n, h) pour $p > 2$ et $p^2 < n$. En particulier, une réponse positive à la question $2\mathscr{A}$ n'entraîne pas une réponse positive à la question $3\mathscr{A}$.

Examinons maintenant l'optimalité des hypothèses du théorème 1.4. Dans la mesure où l'inégalité $(I_{p,opt}^p)$ est vraie pour tout $p \leqslant 2$ sur la sphère unité standard (S^n, h), ou encore en raison du théorème 1.3, l'hypothèse $p > 2$ est nécessaire. L'hypothèse $p^2 < n$ est sans doute purement technique. Reste alors l'hypothèse la plus intéressante, de nature géométrique, sur la courbure scalaire. Aussi surprenant que cela puisse paraître, on le voit sur le résultat qui suit de Druet [17], cette hypothèse est elle aussi optimale.

Proposition 1.1. — *Soit (T^n, g) un tore plat de dimension n. Pour tout $p \in [1, n[$, l'inégalité $(I_{p,opt}^p)$ a lieu sur (T^n, g).*

La preuve de cette proposition est bien plus subtile que celle du théorème 1.4. Essayons d'en donner les grandes lignes. On traitera ici du cas $p > 1$. Étant donné $p \in]1, n[$, on suppose que $(I_{p,opt}^p)$ est fausse. Par théorie variationnelle, on obtient alors que pour tout $\alpha > 0$, il existe une fonction strictement positive $u_\alpha \in C^1(M)$, et il existe un réel $\lambda_\alpha \in]0, K(n,p)^{-p}[$, tels que

$$\begin{cases} \Delta_{p,g} u_\alpha + \alpha u_\alpha^{p-1} = \lambda_\alpha u_\alpha^{p^*-1} \\ \int_{T^n} u_\alpha^{p^*} dv_g = 1 \end{cases}$$

où

$$\Delta_{p,g} u = -div_g(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$$

est le p-laplacien de u. Lorsque $\alpha \to +\infty$, les u_α développent un point de concentration, à savoir un point x tel que pour tout $\delta > 0$,

$$\limsup_{\alpha \to +\infty} \int_{B_x(\delta)} u_\alpha^{p^*} dv_g > 0$$

où $B_x(\delta)$ est la boule dans (T^n, g) de centre x et rayon δ. Ce point est de plus unique. La limite ci-dessus vaut alors 1 pour tout δ, tandis que

$$u_\alpha \to 0 \text{ dans } C^0_{loc}(T^n \backslash \{x\})$$

lorsque $\alpha \to +\infty$. Dans la mesure où (T^n, g) est plate, il existe une boule B centrée en x avec la propriété que (B, g) est isométrique à la boule euclidienne de même rayon. Du théorème 1.1 il suit que pour tout $u \in \mathcal{D}(B)$,

$$\|u\|_{p^*}^p \leqslant K(n,p)^p \|\nabla u\|_p^p .$$

Le reste de l'argument de Druet [17] consiste à montrer que cette inégalité, couplée avec les équations satisfaites par les u_α, conduit à une contradiction. Soit une boule plus petite $B' \subset B$, toujours centrée en x, et soit η régulière et positive telle que $\eta = 1$ sur B', et $\eta = 0$ sur $T^n \backslash B$. De développements non triviaux, on tire des équations satisfaites par les u_α et de l'inégalité de Sobolev locale ci-dessus, qu'il existe une constante C, indépendante de α, telle que pour tout α,

$$\begin{aligned} \alpha K(n,p)^p - C \leqslant \frac{\int_{T^n \backslash B'} u_\alpha^{p^*} dv_g}{\int_{T^n} u_\alpha^p dv_g} &+ C \frac{\int_{T^n \backslash B'} |\nabla u_\alpha|^p dv_g}{\int_{T^n} u_\alpha^p dv_g} \\ &+ C \left(\frac{\int_{T^n \backslash B'} |\nabla u_\alpha|^p dv_g}{\int_{T^n} u_\alpha^p dv_g} \right)^{\frac{p-1}{p}} . \end{aligned} \tag{1.3}$$

Clairement,

$$\frac{\int_{T^n \backslash B'} u_\alpha^{p^*} dv_g}{\int_{T^n} u_\alpha^p dv_g} \leqslant \sup_{T^n \backslash B'} u_\alpha^{p^*-p}$$

et puisque les u_α convergent C^0 vers 0 en dehors de x, le terme de gauche dans cette inégalité tend vers 0 lorsque α tend vers $+\infty$. Avec des arguments un peu plus subtils, on obtient par ailleurs l'existence d'une constante C', indépendante de α, telle que pour tout α,

$$\frac{\int_{T^n \backslash B'} |\nabla u_\alpha|^p dv_g}{\int_{T^n} u_\alpha^p dv_g} \leqslant C' .$$

Par passage à la limite en $\alpha \to +\infty$ dans (1.3) on obtient alors la contradiction recherchée. D'où le résultat.

La proposition 1.1 est en elle-même importante. Sa preuve l'est cependant encore plus. Elle contient ce que nous appellerons la "localisation de Druet" : la validité locale d'une inégalité $(I^p_{p,opt})$, entraîne sa validité globale. Pour ce qui est de la terminologie, nous dirons que $(I^p_{p,opt})$ a localement lieu sur une variété compacte (M, g) si pour tout x de M, il existe un voisinage ouvert Ω_x de x, et il existe une constante réelle B_x, tels que pour tout $u \in \mathcal{D}(\Omega_x)$,

$$\|u\|^p_{p^*} \leqslant K(n, p)^p \|\nabla u\|^p_p + B_x \|u\|^p_p .$$

Pour le contraste, ce changement de terminologie ne sera utilisé que dans le théorème 1.5, nous dirons que $(I^p_{p,opt})$ a globalement lieu sur (M, g) s'il existe une constante réelle B telle que pour tout $u \in H^p_1(M)$,

$$\|u\|^p_{p^*} \leqslant K(n, p)^p \|\nabla u\|^p_p + B \|u\|^p_p .$$

De la preuve de la proposition 1.1 si $p > 1$, et par recollement via une partition de l'unité si $p = 1$, on tire le théorème qui suit.

Théorème 1.5 (Localisation de Druet). — *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension n, et soit $p \in [1, n[$ donné. Si $(I^p_{p,opt})$ a localement lieu sur (M, g), elle a aussi globalement lieu sur (M, g).*

Nombre de résultats importants suivent de ce théorème. Il en va déjà ainsi de la proposition suivante de Druet [17].

Proposition 1.2. — *Soit (H^n, h) un espace hyperbolique compact de dimension n. Pour tout $p \in [1, n[$, $(I^p_{p,opt})$ a lieu sur (H^n, h).*

La preuve de cette proposition suit très simplement du théorème 1.5. Si $(\tilde{H}^n, \tilde{h})$ désigne l'espace hyperbolique simplement connexe, alors, d'après Aubin [3], pour tout réel $p \in [1, n[$, et tout $u \in \mathcal{D}(\tilde{H}^n)$,

$$\|u\|^p_{p^*} \leqslant K(n, p)^p \|\nabla u\|^p_p .$$

Par isométrie locale entre une variété riemannienne et son revêtement riemannien universel, il suit de cette inégalité que $(I^p_{p,opt})$ a localement lieu sur (H^n, h). Le résultat est alors une conséquence simple du théorème 1.5.

Un autre exemple, peut-être encore plus frappant, des conséquences de la localisation de Druet est la réponse positive apportée à la question $3\mathcal{A}$ en dimension 2. Ce résultat est là encore dû à Druet (communication orale). On en trouvera la preuve détaillée dans Hebey [28].

Théorème 1.6. — *Pour toute variété riemannienne compacte (M, g) de dimension 2, et tout $p \in [1, 2[$, $(I^p_{p,opt})$ a lieu sur (M, g).*

Pour ce qui est de la preuve de ce théorème, sans perdre en généralité, on pourra supposer que la courbure sectionnelle de g est inférieure ou égale à 1. Il suit alors des travaux d'Aubin [3] que pour tout $x \in M$, il existe $\delta_x > 0$, tel que pour tout domaine régulier $\Omega \subset B_x(\delta_x)$, l'aire de $\partial\Omega$ majore l'aire, dans la sphère unité standard (S^2, h), du bord d'une boule ayant le même volume que Ω. Étant donné $p \in [1, 2[$, à partir de cette inégalité isopérimétrique et par symétrisation, via la formule de la co-aire, on obtient que $(I^p_{p,opt})$ a localement lieu sur (M, g). Le résultat suit maintenant du théorème 1.5.

À titre de dernière illustration des conséquences de la localisation de Druet, abordons un résultat qui fut obtenu par Aubin, Druet et Hebey [4]. Les propositions 1.1 et 1.2 de Druet suggèrent l'énoncé suivant : l'inégalité $(I^p_{p,opt})$ a lieu pour tout p en courbure sectionnelle négative ou nulle. À conjecture de Cartan-Hadamard près, c'est là ce qui est démontré dans [4], cet énoncé est effectivement exact. La conjecture de Cartan-Hadamard est la suivante : étant donnés (M, g) une variété riemannienne complète simplement connexe de dimension n à courbure sectionnelle négative ou nulle, et Ω un domaine borné régulier de M,

$$\frac{A_g(\partial\Omega)}{V_g(\Omega)^{\frac{n-1}{n}}} \geqslant \frac{1}{K(n,1)}$$

où $A_g(\partial\Omega)$ et $V_g(\Omega)$ désignent respectivement l'aire de $\partial\Omega$ et le volume de Ω. Cette conjecture fut démontrée en dimension 2 par Weil [45], en dimension 3 par Kleiner [36], et en dimension 4 par Croke [13], via la formule de Santalo. Par conjecture de Cartan-Hadamard en dimension n, nous entendrons la validité de l'inégalité isopérimétrique ci-dessus pour les variétés complètes simplement connexes de dimension n à courbure sectionnelle négative ou nulle. Le résultat d'Aubin, Druet et Hebey [4] est alors le suivant.

THÉORÈME 1.7. — *Si la conjecture de Cartan-Hadamard est vraie en dimension n, alors $(I^p_{p,opt})$ a lieu pour tout $p \in [1, n[$ sur toute variété riemannienne compacte de dimension n à courbure sectionnelle négative ou nulle. En particulier, dans la mesure où la conjecture de Cartan-Hadamard est vraie en dimension 3 et 4, pour $n = 3$ ou 4, pour tout $p \in [1, n[$, et toute variété riemannienne compacte (M, g) de dimension n à courbure sectionnelle négative ou nulle, $(I^p_{p,opt})$ a lieu sur (M, g).*

Nous l'avons déjà dit, le résultat est là encore une conséquence simple du théorème 1.5. Soit $(\tilde{M}, \tilde{g})$ le revêtement riemannien universel de (M, g). De la validité de la conjecture de Cartan-Hadamard, et par symétrisation, on tire que pour tout $u \in \mathcal{D}(\tilde{M})$, et tout $p \in [1, n[$,

$$\|u\|^p_{p^*} \leqslant K(n, p)^p \|\nabla u\|^p_p .$$

Par isométrie locale entre une variété riemannienne et son revêtement riemannien universel, on obtient que $(I^p_{p,opt})$ a localement lieu sur (M, g). Le résultat suit du théorème 1.5.

Revenons pour finir à la proposition 1.1. Le tore peut y être interprété comme un cas limite des variétés en question dans le théorème 1.4. En regardant de plus près les développements effectués dans la preuve du théorème 1.4, comme remarqué par Druet

[17], le tore apparaît aussi comme un cas limite de la classe des variétés compactes Ricci plates non plates. Cette classe est non vide. Les variétés de dimension $4n$ dont le groupe d'holonomie est contenu dans $Sp(n)$, il s'agit là d'un résultat de Berger [8], sont Ricci plates. De telles variétés sont aussi dites hyperkählériennes. Des exemples spécifiques de variétés hyperkählériennes compactes non plates ont été construits par Beauville [7]. Ces variétés sont dans la classe ci-dessus introduite. Pour plus de détails, on renvoie à Besse [9]. Le résultat qui suit est là encore dû à Druet [17].

THÉORÈME 1.8. — *Soient (M,g) une variété riemannienne compacte de dimension n, et $p \in [1,n[$. On suppose que (M,g) est Ricci plate mais non plate. Si $p > 4$ et $p^2 < n$, $(I^p_{p,opt})$ est fausse sur (M,g).*

La preuve de ce théorème procède comme celle du théorème 1.4, à ceci près que les développements sont ici poussés plus loin. En particulier, il s'agit d'un argument purement local. De ce théorème, et du théorème 1.4, on tire un résultat de rigidité particulièrement intéressant, le corollaire 1.1 ci-dessous de Druet [17]. On pourra le voir comme la version locale de la rigidité globale obtenue peu de temps auparavant par Ledoux [37] pour les inégalités optimales de type euclidiennes sur les variétés complètes non compactes : étant donnée (M,g) une variété riemannienne complète non compacte de dimension n à courbure de Ricci positive ou nulle, si pour un $p \in [1,n[$ l'inégalité (1.1) du théorème 1.1 a lieu sur (M,g), la variété est isométrique à l'espace euclidien de même dimension. Toujours en ce qui concerne ce corollaire, mais aussi le théorème 1.8, les hypothèses $p > 4$ et $p^2 < n$ devraient pouvoir être remplacées par $p \in]2,n[$. À l'inverse du cas des inégalités optimales de type euclidiennes sur les variétés complètes non compactes, supposer $p > 2$ est nécessaire dans notre contexte. On le voit, soit à partir du théorème 1.3, soit puisque $(I^p_{p,opt})$ a lieu pour tout $p \in [1,2]$ sur la sphère unité standard (S^n,h). À titre de dernière remarque, sachant que toute variété compacte plate est recouverte par l'espace euclidien, on tire facilement du théorème 1.1 et du théorème 1.5 que $(I^p_{p,opt})$ a lieu pour tout p sur toute variété compacte plate. D'où la seconde assertion du corollaire.

COROLLAIRE 1.1 (Rigidité locale). — *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte de dimension n à courbure de Ricci positive ou nulle. On suppose que pour un p réel tel que $p > 4$ et $p^2 < n$, $(I^p_{p,opt})$ a lieu sur (M,g). Alors g est plate, et M est recouverte par un tore. À l'inverse, $(I^p_{p,opt})$ a lieu pour tout $p \in [1,n[$ sur toute variété riemannienne compacte plate de dimension n.*

2. Le programme $\mathscr{B}$ dans sa première partie

On traite ici du programme $\mathscr{B}$ dans sa première partie. Contrairement au programme $\mathscr{A}$, qui semble impliquer de plus grosses difficultés, des réponses complètes aux trois questions posées sont disponibles. En particulier, voir les deux théorèmes de ce paragraphe, la géométrie n'influence plus la validité ou la non-validité des inégalités optimales.

Commençons par les réponses apportées aux questions $1\mathscr{B}$ et $2\mathscr{B}$. Celles-ci s'obtiennent très facilement à partir de l'inégalité de Sobolev-Poincaré. Elles sont données par le résultat suivant.

THÉORÈME 2.1. — *Étant donnés (M,g) une variété riemannienne compacte de dimension n, et $p \in [1,n[$, $\beta_p(M) = V_g^{-1/n}$ où V_g désigne le volume de (M,g). De plus, pour tout $p \in [1,n[$, $(J^1_{p,opt})$ a lieu sur (M,g).*

Comme déjà dit, la preuve de ce résultat est particulièrement simple. En posant $u = 1$ dans $(I^1_{p,gen})$, on voit déjà que nécessairement $B \geqslant V_g^{-1/n}$. En particulier, $\beta_p(M) \geqslant V_g^{-1/n}$. Indépendamment, et par inégalité de Sobolev-Poincaré, il existe une constante réelle A telle que pour tout $u \in H_1^p(M)$,

$$\|u - \overline{u}\|_{p^*} \leqslant A\|\nabla u\|_p$$

où $\overline{u}$ désigne la moyenne de u. De là il suit que pour tout $u \in H_1^p(M)$,

$$\|u\|_{p^*} \leqslant A\|\nabla u\|_p + V_g^{\frac{1}{p^*}-1}\|u\|_1 .$$

Or, par Hölder,

$$\|u\|_1 \leqslant V_g^{1-\frac{1}{p}}\|u\|_p .$$

En combinant ces deux dernières inégalités, et puisque $1/p^* = 1/p - 1/n$, on obtient que pour tout $u \in H_1^p(M)$,

$$\|u\|_{p^*} \leqslant A\|\nabla u\|_p + V_g^{-1/n}\|u\|_p .$$

D'où le résultat.

Abordons maintenant la question $3\mathscr{B}$. La situation dans l'étude de cette question se complique légèrement. Le cas $p = 2$ reçut une réponse affirmative par Bakry [5]. Son argumentation, particulièrement élégante, s'étend au cas $\hat{2}^* \leqslant p \leqslant 2$, où $\hat{2}^*$ est l'exposant conjugué de 2^*. Pour $1 \leqslant p \leqslant \hat{2}^*$, la réponse à la question fut obtenue par Druet (communication orale). On en trouvera la preuve complète dans Hebey [28]. Pour $p > 2$, la réponse semble apparaître là encore pour la première fois dans Hebey [28]. L'argument pour $p > 2$ est cependant beaucoup plus simple que ceux développés pour traiter du cas $p \leqslant 2$. Le tout donne lieu au résultat suivant.

THÉORÈME 2.2. — *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte de dimension n. Pour $p \in [1,2]$, avec $p \neq 2$ si $n = 2$, $(J^p_{p,opt})$ a lieu sur (M,g). Par contre, pour $p > 2$, $(J^p_{p,opt})$ est toujours fausse, à savoir quelle que soit la variété considérée.*

En ce qui concerne la preuve du théorème 2.2, supposons pour commencer que p vérifie $\hat{2}^* \leqslant p \leqslant 2$, avec $p \neq 2$ si $n = 2$. Puisque $p \geqslant \hat{2}^*$, $p^* \geqslant 2$, tandis que, comme démontré par Bakry, pour tout $q \geqslant 2$, et tout $u \in C^0(M)$,

$$\|u\|_q^2 \leqslant V_g^{-\frac{2(q-1)}{q}}\left(\int_M u\,dv_g\right)^2 + (q-1)\|u - \overline{u}\|_q^2$$

où dv_g désigne l'élément de volume riemannien, et $\overline{u}$ la moyenne de u. Puisque $p/2 \leqslant 1$, pour a et b deux réels positifs, $(a+b)^{p/2} \leqslant a^{p/2}+b^{p/2}$. En appliquant l'inégalité de Bakry avec $q = p^\star$, par inégalité de Sobolev-Poincaré, à savoir

$$\|u - \overline{u}\|_{p^\star}^p \leqslant A\|\nabla u\|_p^p,$$

et par inégalité de Hölder, on obtient que pour tout $u \in H_1^p(M)$,

$$\begin{aligned} \|u\|_{p^\star}^p &\leqslant V_g^{-\frac{p(p^\star-1)}{p^\star}} \left| \int_M u dv_g \right|^p + (p^\star - 1)^{p/2}\|u - \overline{u}\|_{p^\star}^p \\ &\leqslant V_g^{p-1-\frac{p(p^\star-1)}{p^\star}} \|u\|_p^p + (p^\star - 1)^{p/2}A\|\nabla u\|_p^p . \end{aligned}$$

Puisque

$$p - 1 - \frac{p(p^\star - 1)}{p^\star} = -\frac{p}{n}$$

il suit que $(J_{p,opt}^p)$ a lieu pour tout $p \in [\hat{2}^\star, 2]$, avec $p \neq 2$ si $n = 2$. Supposons maintenant que $p \in [1, \hat{2}^\star]$. L'argumentation de Druet procède comme ci-dessus, à ceci près que l'inégalité de départ de Bakry est remplacée par l'inégalité de Druet suivante : pour tout $u \in C^0(M)$,

$$\|u\|_{p^\star}^p \leqslant V_g^{\frac{p}{p^\star}-p} \left| \int_M u dv_g \right|^p + (1 + p^\star(p^\star - 1)^{p^\star-1})^{\frac{p}{p^\star}} \|u - \overline{u}\|_{p^\star}^p .$$

À partir de cette inégalité, dont la preuve est un peu plus délicate que celle de Bakry, on obtient de nouveau le résultat par inégalité de Sobolev-Poincaré et inégalité de Hölder. Pour terminer, supposons que $p > 2$. Soit $u \in C^\infty(M)$, $u \not\equiv 0$, telle que $\overline{u} = 0$. Pour $\epsilon > 0$, et $\alpha > 2$,

$$\|1 + \epsilon u\|_\alpha^\alpha = V_g + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2}\|u\|_2^2\epsilon^2 + o(\epsilon^2) .$$

Comme on s'en convaincra facilement, en écrivant que $(J_{p,opt}^p)$ a lieu lorsque testée sur les fonctions $1 + \epsilon u$, et par développement limité à l'ordre deux en ϵ, on aboutit à une contradiction. Le point ici est que le terme en gradient dans $(J_{p,opt}^p)$ disparaît dans le $o(\epsilon^2)$ puisque $p > 2$. D'où le résultat.

3. Quelques conjectures

Commençons par le tableau suivant. Il résume les principaux résultats obtenus aux deux paragraphes précédents.

Principaux résultats		
Questions	Programme $\mathscr{A}$	Programme $\mathscr{B}$
Valeur de la meilleure constante	$K(n, p)$	$V_g^{-1/n}$
Validité de l'inégalité optimale en puissance 1	1) Pour tout p sur toute variété à courbure sectionnelle constante. 2) À chaque fois que l'inégalité optimale en puissance p a lieu.	Pour tout p sur toute variété.
Validité de l'inégalité optimale en puissance p	1) Sur toute variété si $p = 2$. 2) Pour tout p sur toute variété de dimension 2. 3) Jamais si $p > 2$ et $p^2 < n$, dès que la courbure scalaire est strictement positive en un point. 4) Pour tout p sur toute variété à courbure sectionnelle constante négative ou nulle. 5) En dimensions 3 et 4, et pour tout p, sur toute variété dont la courbure sectionnelle est négative ou nulle.	1) Sur toute variété dès lors que $p \leqslant 2$. 2) Jamais, à savoir sur aucune variété, dès lors que $p > 2$.

À partir de ces résultats quelques conjectures raisonnables peuvent être faites. Nous en citerons quatre. Les deux premières figurent dans Aubin [3].

Conjecture 1 : L'inégalité optimale $(I^1_{p,opt})$ a lieu pour tout p sur toute variété riemannienne compacte.

Conjecture 2 : L'inégalité optimale $(I^p_{p,opt})$ a lieu pour tout $p \leqslant 2$ sur toute variété riemannienne compacte.

Conjecture 3 : L'inégalité optimale $(I^p_{p,opt})$ n'a jamais lieu si $p > 2$ et la courbure scalaire de la variété est strictement positive en un point.

Conjecture 4 : L'inégalité optimale $(I^p_{p,opt})$ a lieu pour tout p sur toute variété riemannienne compacte à courbure sectionnelle négative ou nulle.

À cette liste de quatre conjectures, nous en rajouterons une autre. Déjà discutée, sa résolution partielle est donnée par le corollaire 1.1.

Conjecture 5 : Étant donnée (M, g) une variété riemannienne compacte à courbure de Ricci positive ou nulle, si pour un $p > 2$ l'inégalité optimale $(I^p_{p,opt})$ a lieu sur (M, g), alors g est plate et M est recouverte par un tore.

4. Sur une échelle d'inégalités optimales

Nous avons jusqu'à présent considéré comme inégalité générique de départ soit $(I^1_{p,gen})$, soit $(I^p_{p,gen})$. Étant donnés (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension n, $p \in [1, n)$, et $\theta \in [1, p]$, nous considérons ici l'inégalité générique $(I^\theta_{p,gen})$: pour tout $u \in H_1^p(M)$,

$$\|u\|^\theta_{p^*} \leqslant A\|\nabla u\|^\theta_p + B\|u\|^\theta_p \qquad (I^\theta_{p,gen})\,.$$

Clairement, la meilleure constante A dans cette inégalité est $\alpha_p(M)^\theta$, à savoir $K(n, p)^\theta$, tandis que la meilleure constante B est $\beta_p(M)^\theta$, à savoir $V_g^{-\theta/n}$. Nous dirons maintenant que l'inégalité optimale $(I^\theta_{p,opt})$ a lieu sur (M, g) s'il existe une constante réelle B telle que pour tout $u \in H_1^p(M)$,

$$\|u\|^\theta_{p^*} \leqslant K(n, p)^\theta\|\nabla u\|^\theta_p + B\|u\|^\theta_p \qquad (I^\theta_{p,opt})\,.$$

Nous dirons de même que l'inégalité optimale $(J^\theta_{p,opt})$ a lieu sur (M, g) s'il existe une constante réelle A telle que pour tout $u \in H_1^p(M)$,

$$\|u\|^\theta_{p^*} \leqslant A\|\nabla u\|^\theta_p + V_g^{-\theta/n}\|u\|^\theta_p \qquad (J^\theta_{p,opt})\,.$$

On s'en rendra compte facilement, étant donnés $\theta_1 \leqslant \theta_2$ dans $[1, p]$,

$$(I^{\theta_2}_{p,opt}) \Rightarrow (I^{\theta_1}_{p,opt}) \quad \text{et} \quad (J^{\theta_2}_{p,opt}) \Rightarrow (J^{\theta_1}_{p,opt})$$

au sens où l'existence d'une constante B pour laquelle $(I^{\theta_2}_{p,opt})$ a lieu, respectivement l'existence d'une constante A pour laquelle $(J^{\theta_2}_{p,opt})$ a lieu, entraîne la validité de $(I^{\theta_1}_{p,opt})$ avec pour seconde constante B^{θ_1/θ_2}, respectivement la validité de $(J^{\theta_1}_{p,opt})$ avec pour première constante A^{θ_1/θ_2}.

À la suite de ce qui a été fait jusqu'ici, nous nous intéressons dans ce court paragraphe à la validité des inégalités optimales $(I^\theta_{p,opt})$ et $(J^\theta_{p,opt})$.

Nous commencerons avec l'échelle des inégalités $(I^\theta_{p,opt})$. Une conjecture d'Aubin [3] sur le sujet est que ces inégalités ont lieu sur toute variété riemannienne compacte de dimension n avec $\theta = p$ si $p \leqslant 2$, et, de façon plus intéressante, $\theta = p/(p-1)$ si $p > 2$. Cette conjecture, voir Aubin [3], est vérifiée sur la sphère unité standard (S^n, h). Indépendamment, chacun des résultats du paragraphe 1 où la validité de $(I^p_{p,opt})$ est établie, entraîne la validité de $(I^\theta_{p,opt})$ pour tout θ dans le cas correspondant. Il en va par exemple ainsi pour $n = 2$ et tout p, pour $p = 2$ et tout n, pour tout n et tout p sur les variétés à courbure sectionnelle constante négative ou nulle, et pour tout n et tout p sur les variétés à courbure sectionnelle négative ou nulle dès que la conjecture de Cartan-Hadamard en dimension n est vraie, donc en particulier si $n = 3$ ou $n = 4$. À l'inverse, et c'est le seul résultat que nous écrirons entièrement sur les inégalités $(I^\theta_{p,opt})$, le théorème suivant de Druet [17] a lieu. Pour sa preuve, on procède comme dans celle du théorème 1.4.

THÉORÈME 4.1. — *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension n, et soit $p \in [1, n[$ un réel. Supposons $p > 2$, $p^2 < n$, et la courbure scalaire de g strictement positive en un point de M. L'inégalité $(I^\theta_{p,opt})$ est alors fausse sur (M, g) dès que $\theta > 2$.*

Abordons maintenant l'étude de l'échelle des inégalités $(J^\theta_{p,opt})$. On s'en rendra compte assez facilement, les mêmes arguments que ceux utilisés au paragraphe 2 conduisent au résultat suivant. La remarque est de Druet (communication orale, voir [28]). Elle apporte une réponse complète à la question posée.

THÉORÈME 4.2. — *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension n, et soit $p \in [1, n[$ un réel. Si $p \leqslant 2$, alors pour tout $\theta \in [1, p]$, $(J^\theta_{p,opt})$ a lieu sur (M, g). À l'inverse, si $p > 2$, $(J^\theta_{p,opt})$ a lieu sur (M, g) si et seulement si $\theta \leqslant 2$.*

5. La suite des programmes $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$

On aborde ici la suite des programmes $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$. Pour simplifier, mais aussi en raison de ce qui a été dit dans les deux premiers paragraphes, nous nous limiterons à l'étude du cas $p = 2$. À titre de remarque, on tire des propriétés de la fonction Γ que

$$K(n,2) = \sqrt{\frac{4}{n(n-2)\omega_n^{2/n}}}$$

où ω_n désigne le volume de la sphère unité standard de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Considérons dans ce qui suit une variété riemannienne compacte (M, g) de dimension n, $n \geqslant 3$. En vertu du théorème 1.3, il existe une constante réelle B telle que pour tout $u \in H_1^2(M)$,

$$\|u\|_{2^\star}^2 \leqslant K(n,2)^2 \|\nabla u\|_2^2 + B\|u\|_2^2 \qquad (I^2_{2,opt})\,.$$

On définit alors $B_0(g)$ comme étant le plus petit des B pour lesquels l'inégalité ci-dessus a lieu. En abrégé,

$$B_0(g) = \inf\left\{B \in \mathbb{R} \text{ t.q. } (I^2_{2,opt}) \text{ a lieu}\right\}.$$

On s'en rendra compte facilement, $(I^2_{2,opt})$ est encore vraie avec $B_0(g)$ en lieu et place de B : pour tout $u \in H_1^2(M)$,

$$\|u\|^2_{2^*} \leqslant K(n,2)^2\|\nabla u\|^2_2 + B_0(g)\|u\|^2_2 \qquad (I^2_{2,OPT})$$

On parlera ici d'inégalité totalement optimale : ni $K(n,2)^2$, ni $B_0(g)$ par construction même, ne peuvent être remplacées par des constantes plus petites. De façon similaire, d'après le théorème 2.2, il existe une constante réelle A telle que pour tout $u \in H_1^2(M)$,

$$\|u\|^2_{2^*} \leqslant A\|\nabla u\|^2_2 + V_g^{-2/n}\|u\|^2_2 \qquad (J^2_{2,opt})\,.$$

On définit alors $A_0(g)$ comme étant le plus petit des A pour lesquels l'inégalité ci-dessus a lieu. En abrégé,

$$A_0(g) = \inf\left\{A \in \mathbb{R} \text{ t.q. } (J^2_{2,opt}) \text{ a lieu}\right\}.$$

Clairement, $(J^2_{2,opt})$ a lieu avec $A_0(g)$ en lieu et place de A. À savoir : pour tout $u \in H_1^2(M)$,

$$\|u\|^2_{2^*} \leqslant A_0(g)\|\nabla u\|^2_2 + V_g^{-2/n}\|u\|^2_2 \qquad (J^2_{2,OPT})\,.$$

On parlera là encore d'inégalité totalement optimale : ni $V_g^{-2/n}$, ni $A_0(g)$ par construction même, ne peuvent être remplacées par des constantes plus petites.

Dans ce qui suit, nous dirons que $u \in H_1^2(M)$, $u \not\equiv 0$, est une fonction extrémale pour $(I^2_{2,OPT})$ si

$$\|u\|^2_{2^*} = K(n,2)^2\|\nabla u\|^2_2 + B_0(g)\|u\|^2_2$$

donc si elle réalise l'égalité dans $(I^2_{2,OPT})$. Nous dirons de même que $u \in H_1^2(M)$, u non constante, est une fonction extrémale pour $(J^2_{2,OPT})$ si

$$\|u\|^2_{2^*} = A_0(g)\|\nabla u\|^2_2 + V_g^{-2/n}\|u\|^2_2$$

donc si elle réalise l'égalité dans $(J^2_{2,OPT})$.

Deux questions supplémentaires dans chacun des programmes $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ peuvent être posées. On les énonce comme suit.

<u>Programme $\mathscr{A}$ – Partie II</u>

Question 4$\mathscr{A}$: Peut-on calculer, ou estimer $B_0(g)$?

Question 5$\mathscr{A}$: Sous quelles conditions l'inégalité totalement optimale $(I^2_{2,OPT})$ possède-t-elle des fonctions extrémales?

<u>Programme $\mathscr{B}$ – Partie II</u>

Question 4$\mathscr{B}$: Peut-on calculer, ou estimer $A_0(g)$?

Question 5$\mathscr{B}$: Sous quelles conditions l'inégalité totalement optimale $(J^2_{2,OPT})$ possède-t-elle des fonctions extrémales?

En vertu de ce qui a été dit dans les paragraphes précédents, $A_0(g) \geqslant K(n,2)^2$, tandis que $B_0(g) \geqslant V_g^{-2/n}$.

6. Le cas de la sphère

Dans l'étude des programmes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ dans leur seconde partie, le cas de la sphère unité standard (S^n, h) de $\mathbb{R}^{n+1}$ est particulier. Ici

$$A_0(h) = K(n,2)^2 \text{ et } B_0(h) = V_h^{-2/n}$$

de sorte que les deux inégalités totalement optimales introduites au paragraphe précédent coïncident. Ces inégalités possèdent de plus des fonctions extrémales, qui sont explicitement connues. Mis à part dans sa toute dernière assertion, plus récente, le théorème qui suit fut pour la première fois présenté par Aubin [2].

THÉORÈME 6.1. — *Soit (S^n, h) la sphère unité standard de $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geqslant 3$. Pour toute fonction $u \in H_1^2(S^n)$,*

$$\|u\|_{2^*}^2 \leqslant K(n,2)^2 \|\nabla u\|_2^2 + \omega_n^{-2/n} \|u\|_2^2 \tag{I}$$

où ω_n désigne le volume de (S^n, h). En particulier, $(I_{2,OPT}^2) = (J_{2,OPT}^2) = (I)$. De plus, pour $x_0 \in S^n$, et $\beta > 1$ réel, les fonctions

$$u_{x_0,\beta}(x) = \left(\beta - \cos r\right)^{1-\frac{n}{2}}$$

où r désigne la distance de x_0 à x, sont des fonctions extrémales pour (I), avec la propriété supplémentaire suivante : si u est une fonction extrémale non constante pour (I), alors, à un facteur multiplicatif réel près, u est une des $u_{x_0,\beta}$.

En ce qui concerne la preuve de ce théorème, la validité de (I) s'obtient par un argument assez détourné. On s'en rendra compte facilement, dire que (I) n'a pas lieu revient à dire que

$$\inf_{u \in H_1^2(S^n)\setminus\{0\}} \frac{\int_{S^n} \left(|\nabla u|^2 + \frac{n(n-2)}{4} u^2\right) dv_h}{\left(\int_{S^n} |u|^{2^*} dv_h\right)^{2/2^*}} < \frac{1}{K(n,2)^2}.$$

De là, il suit que pour $f \in C^\infty(S^n)$ proche de 1,

$$\inf_{u \in H_1^2(S^n)\setminus\{0\}} \frac{\int_{S^n} \left(|\nabla u|^2 + \frac{n(n-2)}{4} u^2\right) dv_h}{\left(\int_{S^n} f|u|^{2^*} dv_h\right)^{2/2^*}} < \frac{1}{(\max f)^{2/2^*} K(n,2)^2}.$$

Par techniques variationnelles maintenant classiques, on tire d'une telle inégalité l'existence de $u \in C^\infty(S^n)$, $u > 0$, solution de

$$\Delta_h u + \frac{n(n-2)}{4} u = f u^{2^*-1}$$

où Δ_h est le laplacien relatif à h. En particulier, f est courbure scalaire d'une métrique conforme à h. Or, comme démontré par Kazdan-Warner [35], pour tout $\epsilon > 0$, et toute harmonique sphérique ξ, la fonction $1 + \epsilon\xi$ n'est pas courbure scalaire d'une métrique conforme à h. La première partie du théorème suit par contradiction. En ce qui concerne la seconde partie du théorème, à savoir que les $u_{x_0,\beta}$ sont des fonctions extrémales pour (I), elle se démontre simplement par calcul direct. Pour ce qui est de la dernière partie du théorème, soit u une fonction extrémale pour (I). Quitte à remplacer u par $|u|$, on pourra supposer que u est positive ou nulle. Dans la mesure où u réalise par définition même le minimum de la fonctionnelle

$$J(u) = \frac{\int_{S^n}\left(|\nabla u|^2 + \frac{n(n-2)}{4}u^2\right)dv_h}{\left(\int_{S^n}|u|^{2^*}dv_h\right)},$$

et à normalisation près, u est solution de l'équation

$$\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta_h u + n(n-1)u = n(n-1)u^{2^*-1}.$$

Par principe du maximum et régularité, u est ainsi strictement positive et de classe C^∞. De l'équation, on tire de plus que $g = u^{4/(n-2)}h$ est à courbure scalaire constante. D'après Obata [38], g et h sont alors isométriques. La dernière partie du théorème se ramène ainsi à la preuve de ce qui suit : si $u_\varphi > 0$ est donnée par $\varphi^* h = u_\varphi^{4/(n-2)}h$, où $\varphi \in Conf(S^n)$ est un difféomorphisme conforme de (S^n, h), il existe $\lambda > 0$, $x_0 \in S^n$, et $\beta > 1$ tels que $u_\varphi = \lambda u_{x_0,\beta}$. Comme $O(n+1)$ agit transitivement sur S^n, on peut en fait restreindre notre attention aux $\varphi \in Conf(S^n)$ qui laissent fixe un point donné de S^n. Par projection stéréographique, le problème passe sur l'espace euclidien. Ses difféomorphismes conformes sont simples et explicitement connus. Le résultat suit par calcul direct.

7. Le programme $\mathscr{A}$ dans sa seconde partie

Avec l'étude du programme $\mathscr{A}$ dans sa seconde partie, on rentre là dans une sorte de "no man's land". Autant la situation est assez bien comprise pour ce qui est du programme dans sa première partie; autant, en étant un peu critique, elle est ici largement incomprise.

En ce qui concerne la question 4$\mathscr{A}$, tout commence relativement bien avec des bornes inférieures explicites pour $B_0(g)$. L'une est donnée par l'inégalité $B_0(g) \geqslant V_g^{-2/n}$. L'autre, pour $n \geqslant 4$, est donnée par le résultat suivant.

Proposition 7.1. — *Étant donnée (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geqslant 4$,*

$$B_0(g) \geqslant \frac{n-2}{4(n-1)}K(n,2)^2 \max_{x\in M} S_g(x)$$

où S_g désigne la courbure scalaire de g.

La preuve de cette proposition est simple. Pour $x_0 \in M$ donné, $\delta > 0$ petit donné, et $\epsilon > 0$, on considère les fonctions

$$\begin{cases} u_\epsilon(x) = (\epsilon + r^2)^{1-\frac{n}{2}} - (\epsilon + \delta^2)^{1-\frac{n}{2}} \text{ si } r \leqslant \delta \\ u_\epsilon(x) = 0 \text{ si } r > \delta \end{cases}$$

où r désigne la distance de x_0 à x. Pour $B \in \mathbb{R}$, on trouve

$$\begin{aligned} &\frac{\int_M \left(|\nabla u_\epsilon|^2 + B u_\epsilon^2\right) dv_g}{\left(\int_M u_\epsilon^{2^*} dv_g\right)^{2/2^*}} \\ &\leqslant \frac{1}{K(n,2)^2}\left(1 + \frac{\epsilon}{n(n-4)}\left(\frac{4(n-1)}{n-2}B - S_g(x_0)\right) + o(\epsilon)\right) \text{ si } n > 4 \\ &\leqslant \frac{1}{K(4,2)^2}\left(1 + \frac{1}{8}\left(S_g(x_0) - 6B\right)\epsilon Log\epsilon + o(\epsilon Log\epsilon)\right) \text{ si } n = 4\,. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

En résumé, et du moins si $n \geqslant 4$,

$$B_0(g) \geqslant \min\left(V_g^{-2/n}, \frac{n-2}{4(n-1)}K(n,2)^2 \max_{x\in M} S_g(x)\right)$$

avec la propriété supplémentaire qu'il s'agit là d'une borne fine : l'égalité

$$B_0(h) = V_h^{-2/n} = \frac{n-2}{4(n-1)}K(n,2)^2 \max_{x\in S^n} S_h(x)$$

est réalisée par la sphère unité standard (S^n, h). À l'inverse, dans le cas général, seule une borne supérieure implicite est disponible. Elle est donnée par le théorème suivant dû à Hebey-Vaugon [31], un raffinement du théorème 1.2. Dans son énoncé, Rm_g réfère au tenseur de courbure de Riemann de g, et i_g au rayon d'injectivité.

THÉORÈME 7.1. — *Étant donnés $n \geqslant 3$ un entier, et $\Lambda_1 \geqslant 0, \Lambda_2 \geqslant 0$, $i > 0$ trois réels, il existe $B = B(n, \Lambda_1, \Lambda_2, i)$ une constante réelle strictement positive ne dépendant que de n, Λ_1, Λ_2, et i, telle que pour toute variété riemannienne compacte (M, g) de dimension n, si*

$$|Rm_g| \leqslant \Lambda_1\,,\ |\nabla Rm_g| \leqslant \Lambda_2\,,\ i_g \geqslant i\,,$$

alors $B_0(g) \leqslant B$.

À titre de remarque, la courbure de Riemann dans cet énoncé devrait pouvoir être remplacée par la courbure de Ricci. Le meilleur résultat ici serait de pouvoir contrôler $B_0(g)$ par une borne $|Rc_g| \leqslant \Lambda$ sur la courbure de Ricci, une borne inférieure $i_g \geqslant i$ sur le rayon d'injectivité, et la dimension n de la variété.

Abordons maintenant, toujours en ce qui concerne la question $4.\mathcal{A}$, l'étude de cas particuliers. Nous commencerons par regarder des quotients de la sphère unité standard

(S^n, h). À savoir des variétés du type S^n/G, munies de la métrique quotient de h par G, où $G \subset O(n+1)$ est un sous groupe du groupe des isométries de h, opérant librement sur S^n. Si n est pair, et G est non trivial, G est en fait le groupe "antipodal" à deux éléments $\pm Id$. Si n est impair, il existe par contre des $G \subset O(n+1)$ opérant librement d'ordre quelconque. Nous supposerons pour notre part que G est cyclique. Il en va ainsi dès lors que G est d'ordre un produit de deux entiers premiers (Zassenhaus [48]). Le résultat qui suit est dû à Hebey-Vaugon [30].

Proposition 7.2. — *Soient $G \subset O(n+1)$ un groupe cyclique opérant librement sur S^n, $M = S^n/G$, et g la métrique quotient de h par G. Alors*

$$B_0(g) \leqslant K(n,2)^2\Big[\Big(1+\frac{k^2}{4}\Big)\Big(\frac{n+1}{2}\Big) - 1 + \frac{n(n-2)}{4}\Big]$$

où k est l'ordre de G.

Dans le cas particulier de l'espace projectif réel $(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}), g)$, dont le volume est $\omega_n/2$, on trouve

$$\Big(\frac{2}{\omega_n}\Big)^{\frac{2}{n}} \leqslant B_0(g) \leqslant \frac{n+2}{(n-2)\omega_n^{\frac{2}{n}}}\,.$$

Un tel encadrement est asymptotiquement optimal en n, dans la mesure où le quotient de la borne supérieure par la borne inférieure tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Cela étant dit, une question en apparence aussi simple que de savoir quelle est la valeur précise de $B_0(g)$ pour $(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}), g)$, reste ouverte.

Un autre cas particulier où il est relativement aisé d'obtenir une borne supérieure explicite pour $B_0(g)$ est donné par le produit $S^1(T) \times S^{n-1}$ du cercle de rayon T et de S^{n-1}, avec pour métrique g_T, la métrique standard produit. Une borne supérieure explicite pour $B_0(g_T)$ est donnée par le résultat suivant. Ce résultat est là encore dû à Hebey-Vaugon [30].

Proposition 7.3. — *Soit $S^1(T) \times S^{n-1}$ le produit du cercle de rayon T centré en* 0 *dans $\mathbb{R}^2$ et de la sphère unité S^{n-1} de $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$. Alors*

$$B_0(g_T) \leqslant \frac{1+(n-2)^2T^2}{4T^2}K(n,2)^2$$

où g_T est la métrique produit standard de $S^1(T) \times S^{n-1}$.

Pour d'autres études de cas particuliers, et la preuve des propositions 7.2 et 7.3, on renvoie à Hebey [28], ou à Hebey-Vaugon [30].

Abordons maintenant la question 5$\mathscr{A}$. Du théorème 6.1, on tire que la seconde constante $B_0(h)$ vaut $\omega_n^{-2/n}$ sur la sphère unité standard (S^n, h), avec la propriété supplémentaire que l'inégalité totalement optimale $(I^2_{2,OPT})$ sur (S^n, h) possède des fonctions extrémales qui sont de plus explicitement connues. Dans la mesure où la courbure scalaire de h vaut $S_h = n(n-1)$, on a aussi

$$B_0(h) = \frac{n-2}{4(n-1)} K(n,2)^2 \max_{x\in S^n} S_h(x) .$$

Nous traiterons ici d'une question très simple : qu'en est-il de ce résultat si h est remplacée par une métrique qui lui est conforme ? Aussi étrange que cela puisse paraître, une telle question réserve des surprises.

Soit $[h]$ la classe conforme de h, à savoir l'ensemble des métriques g de S^n qui s'écrivent sous la forme $g = uh$, u une fonction C^∞ strictement positive sur S^n. Nous noterons $[[h]]$ la classe conforme normalisée de h, à savoir

$$[[h]] = \left\{ g \in [h] \text{ t.q. } V_g = \omega_n \right\} .$$

Dans l'étude de la question précédemment posée, nous nous restreindrons aux métriques de $[[h]]$. Cela ne nuit nullement à la généralité de la question, dans la mesure où pour λ un réel strictement positif, et g une métrique sur une variété M, $B_0(\lambda g) = \lambda^{-1} B_0(g)$, avec la propriété que si u est une fonction extrémale pour $(I^2_{2,OPT})$ par rapport à g, alors $\lambda^{-(n-2)/4} u$ est une fonction extrémale pour $(I^2_{2,OPT})$ par rapport à λg. Répondre à la question posée dans $[[h]]$, revient ainsi à y répondre dans $[h]$. Le premier résultat que l'on énonce, dû à Hebey [27], est le suivant. Une réponse complète dès lors que $n \geqslant 4$.

THÉORÈME 7.2. — *Soit (S^n, h) la sphère unité standard de $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geqslant 4$. Pour $g \in [[h]]$,*

$$B_0(g) = \frac{n-2}{4(n-1)} K(n,2)^2 \max_{x\in S^n} S_g(x)$$

avec la propriété supplémentaire que $(I^2_{2,OPT})$ possède des fonctions extrémales si et seulement si la courbure scalaire S_g de g est constante. Dans ce cas, g et h sont isométriques, et si φ est une isométrie de (S^n, h) sur (S^n, g), u est une fonction extrémale pour $(I^2_{2,OPT})$ par rapport à g si et seulement si $u \circ \varphi$ est une fonction extrémale pour $(I^2_{2,OPT})$ par rapport à h. En particulier, les fonctions extrémales de $(I^2_{2,OPT})$ par rapport à g sont toutes connues.

La preuve de ce théorème est basée sur des arguments simples de géométrie conforme. Étant donnée $g \in [[h]]$, on note I_g la fonctionnelle définie sur $H_1^2(S^n)\backslash\{0\}$ par

$$I_g(u) = \frac{\int_{S^n} \left(|\nabla u|^2 + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g u^2 \right) dv_g}{\left(\int_{S^n} |u|^{2^*} dv_g \right)^{2/2^*}} .$$

L'infimum de I_g sur $H_1^2(S^n)\backslash\{0\}$ est un invariant conforme. Du théorème 6.1 il suit que

$$\inf_{u\in H_1^2(S^n)\backslash\{0\}} I_g(u) = \inf_{u\in H_1^2(S^n)\backslash\{0\}} I_h(u) = \frac{1}{K(n,2)^2} .$$

En particulier,

$$B_0(g) \leqslant \frac{n-2}{4(n-1)} K(n,2)^2 \max_{x \in S^n} S_g(x) .$$

La première partie du théorème suit de la proposition 7.1. Pour ce qui est de la seconde partie, portant sur les fonctions extrémales, on remarque que si u_0 est une fonction extrémale, alors u_0 réalise le minimum de la fonctionnelle

$$J(u) = \frac{\int_{S^n} \left(|\nabla u|^2 + \frac{n-2}{4(n-1)} (\max S_g) u^2 \right) dv_g}{\left(\int_{S^n} |u|^{2^\star} dv_g \right)^{2/2^\star}} .$$

Sans perdre en généralité, quitte à remplacer u_0 par $|u_0|$, on peut supposer que u_0 est positive ou nulle. Par homogénéité, on peut aussi supposer que

$$\int_{S^n} u_0^{2^\star} dv_g = 1 .$$

Dans la mesure où le minimum de J vaut $K(n,2)^{-2}$, il suit que u_0 est solution de l'équation

$$\Delta_g u_0 + \frac{n-2}{4(n-1)} (\max S_g) u_0 = \frac{1}{K(n,2)^2} u_0^{2^\star - 1}$$

où Δ_g est le laplacien relatif à g. Par principe du maximum, et régularité, u_0 est strictement positive et de classe C^∞. En particulier,

$$\int_{S^n} S_g u_0^2 dv_g < (\max S_g) \int_{S^n} u_0^2 dv_g$$

dès lors que S_g n'est pas constante. Dans un tel cas, on obtient que

$$\frac{1}{K(n,2)^2} = \inf_{u \in H_1^2(S^n) \setminus \{0\}} I_g(u) \leqslant I_g(u_0) < J(u_0) = \frac{1}{K(n,2)^2}$$

ce qui est absurde. Par conséquent, l'inégalité totalement optimale ne possède pas de fonction extrémale si S_g n'est pas constante. À l'inverse, si S_g est constante, g et h sont isométriques d'après Obata [38]. Le théorème suit facilement.

Le cas $n \geqslant 4$ maintenant réglé, il est naturel de se demander ce qu'il advient du résultat lorsque $n = 3$. Il semble là peu probable de pouvoir récupérer une réponse complète du type de celle obtenue dans le théorème 7.2. Il est par exemple maintenant faux que pour tout $g \in [[h]]$,

$$B_0(g) = \frac{1}{8} K(3,2)^2 \max_{x \in S^3} S_g$$

(pour $n = 3$, $(n-2)/4(n-1) = 1/8$). C'est entre autre l'objet du résultat suivant. Ce résultat est dû à Hebey [27].

THÉORÈME 7.3. — *Soit (S^3, h) la sphère unité standard de $\mathbb{R}^4$. Pour tout $g \in [[h]]$, on a encore*

$$B_0(g) \leqslant \frac{1}{8} K(3,2)^2 \max_{x \in S^3} S_g(x)$$

mais il existe maintenant des $g \in [[h]]$ pour lesquelles

$$B_0(g) < \frac{1}{8} K(3,2)^2 \max_{x \in S^3} S_g(x) .$$

Indépendamment, dans le cas d'égalité, l'inégalité totalement optimale $(I^2_{2,OPT})$ possède des fonctions extrémales si et seulement si la courbure scalaire S_g de g est constante. Les métriques g et h sont alors isométriques, et si φ est une isométrie de (S^n, h) sur (S^n, g), u est une fonction extrémale pour $(I^2_{2,OPT})$ par rapport à g si et seulement si $u \circ \varphi$ est une fonction extrémale pour $(I^2_{2,OPT})$ par rapport à h. En particulier, dans le cas d'égalité, les fonctions extrémales de $(I^2_{2,OPT})$ par rapport à g sont toutes connues.

La première et la troisième assertion de ce résultat se démontrent avec les mêmes arguments que ceux employés dans la preuve du théorème 7.2. La preuve de la seconde assertion, à savoir l'existence de $g \in [[h]]$ telle que

$$B_0(g) < \frac{1}{8} K(3,2)^2 \max_{x \in S^3} S_g(x) ,$$

est par contre plus subtile. Elle a pour point de départ le résultat suivant de Brézis et Nirenberg [11] : pour tout domaine borné Ω de $\mathbb{R}^3$, et tout $u \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\|u\|_6^2 \leqslant K(3,2)^2 \|\nabla u\|_2^2 - \lambda(\Omega) \|u\|_2^2$$

où

$$\lambda(\Omega) = \frac{\pi^2}{4} K(3,2)^2 \left(\frac{3|\Omega|}{4\pi}\right)^{-2/3}$$

et $|\Omega|$ désigne le volume euclidien de Ω. L'argument consiste alors à passer un tel résultat sur la sphère. Étant donné $x_0 \in S^3$, on obtient dans un premier temps l'existence d'une fonction $\theta \in C^\infty(S^3)$, strictement négative en x_0, telle que pour tout $u \in H_1^2(S^3)$,

$$\left(\int_{S^3} |u|^6 dv_h\right)^{1/3} \leqslant K(3,2)^2 \int_{S^3} |\nabla u|^2 dv_h + B_0(h) \int_{S^3} u^2 dv_h + \int_{S^3} \theta u^2 dv_h .$$

Pour B une boule centrée en x_0 de rayon petit, on considère ensuite $u \in C^\infty(S^3)$ strictement positive, solution sur $S^3 \backslash B$ de l'équation

$$\Delta_h u + \left(\frac{3}{4} + \frac{\theta}{K(3,2)^2}\right) u = -u^5 .$$

À multiplication par un réel strictement positif près, la métrique recherchée est $g = u^4 h$.

Pour finir, on pourra remarquer que pour tout $g \in [[h]]$, h la métrique standard de S^3,

$$B_0(g) \geqslant \frac{1}{8} K(3,2)^2 \min_{x \in S^3} S_g(x)$$

avec égalité si et seulement si S_g est constante, donc, d'après Obata [38], si et seulement si g et h sont isométriques.

8. Du rôle joué par les meilleures constantes

L'objet ici, dans l'étude d'équations aux dérivées partielles du type courbure scalaire, est d'illustrer la dualité

$$\begin{array}{ccl} \alpha_2(M) & \longrightarrow & \text{existence} \\ B_0(g) & \longrightarrow & \text{multiplicité}. \end{array}$$

Pour simplifier, nous nous limiterons au problème de Yamabe et commenterons les rôles joués par $\alpha_2(M)$ et $B_0(g)$ dans ce problème. Les phénomènes décrits dans ce paragraphe sont néanmoins beaucoup plus généraux. En ce qui concerne les questions d'existence, on pourra par exemple se référer aux travaux de Djadli [14] pour ce qui est du rôle joué par $\alpha_2(M)$ dans l'étude d'équations de courbure scalaire perturbées, à ceux de Jourdain [34] pour ce qui est du rôle joué par $\alpha_2(M)$ dans la recherche de solutions nodales, ou encore aux travaux de Druet [15],[18] pour ce qui est du rôle joué par $\alpha_p(M)$ dans l'étude d'équations de courbure scalaire généralisées. En ce qui concerne la multiplicité, et donc le rôle joué par $B_0(g)$, on renvoie aux travaux de Hebey-Vaugon [30] (voir aussi [23]). On y trouvera une étude plus générale que celle présentée ici, incluant entre autre une discussion sur la multiplicité attachée au problème de Nirenberg.

Étant donnée (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geqslant 3$, soit $[g]$ la classe conforme de g. On écrit

$$[g] = \left\{ g' = u^{4/(n-2)} g,\ u \in C^\infty(M),\ u > 0 \right\}.$$

Une métrique $g' \in [g]$ est dite conforme à g. Étant donnée $g' = u^{4/(n-2)} g$ une métrique conforme à g, on obtient sans trop de difficulté que les courbures scalaires S_g et $S_{g'}$ de g et g' sont liées par la relation

$$\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta_g u + S_g u = S_{g'} u^{2^*-1} \tag{8.1}$$

où $\Delta_g u = -div_g(\nabla u)$ est le laplacien de u. Par problème de Yamabe, on en trouvera une discussion détaillée dans Hebey [26], nous entendons ce qui suit : montrer que pour toute variété riemannienne compacte (M, g) de dimension $n \geqslant 3$, il existe $g' \in [g]$ qui est à courbure scalaire constante. Un tel résultat fut annoncé par Yamabe dans [46]. Quelque huit années plus tard, Trudinger [44] découvrait une erreur dans sa preuve, donnant ainsi naissance à un des grands problèmes de l'analyse non linéaire sur les variétés. Clairement, en vertu de (8.1), résoudre le problème de Yamabe revient à montrer que pour toute variété riemannienne compacte de dimension $n \geqslant 3$, il existe un réel λ, et il existe une fonction strictement positive $u \in C^\infty(M)$, tels que

$$\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g u = \lambda u^{2^*-1}. \tag{8.2}$$

Dans l'étude d'une telle équation, toute la difficulté vient de la non compacité de l'inclusion $H_1^2(M) \subset L^{2^*}(M)$. Pour contourner cette difficulté, l'idée était déjà présente dans le travail de Yamabe, on approche (8.2) par des équations sous critiques pour lesquelles on récupère de la compacité, et donc aussi des solutions. Le problème se ramène alors à faire converger ces solutions vers une solution de l'équation critique (8.2). Avec une telle approche, on s'aperçoit très vite qu'il va falloir éviter la solution triviale nulle, une sérieuse difficulté. C'est précisément là qu'intervient $\alpha_2(M)$, et l'illustration de la première des correspondances du début du paragraphe. Le rôle joué par $\alpha_2(M)$ pour les questions d'existence est explicite dans le théorème qui suit, dû à Aubin [2].

THÉORÈME 8.1. — *Soit* (M,g) *une variété riemannienne compacte de dimension* $n \geqslant 3$. *Si*

$$\inf_{u\in H_1^2(M),u\not\equiv 0} \frac{\int_M\left(|\nabla u|^2 + \frac{n-2}{4(n-1)}S_g u^2\right)dv_g}{\left(\int_M |u|^{2^*}\,dv_g\right)^{2/2^*}} < \frac{1}{\alpha_2(M)^2} \tag{8.3}$$

l'infimum dans (8.3) *est atteint, et* $[g]$ *possède une métrique à courbure scalaire constante.*

Comme déjà dit, on commence dans la preuve d'un tel théorème par considérer des équations sous critiques. De façon plus précise, étant donné $q < 2^*$, on considère des équations du type

$$\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)}S_g u = \lambda_q u^{q-1}\,.$$

Ces équations, dans la mesure où l'inclusion de $H_1^2(M)$ dans $L^q(M)$ est compacte, possèdent des solutions u_q. Celles-ci sont obtenues par minimisation. Lorsque $q \to 2^*$, à sous suite près, les u_q convergent vers une solution u de l'équation critique (8.2). Toute la difficulté consiste à montrer que $u \not\equiv 0$. C'est là qu'intervient (8.3).

Dans l'énoncé du théorème 8.1, la valeur exacte de $\alpha_2(M)$, à savoir $K(n,2)$, n'a aucune importance. Elle en a par contre dans ses applications. Puisque $\alpha_2(M) = K(n,2)$, on tire du théorème 1.2 que l'inégalité large dans (8.3) est toujours vérifiée : pour toute variété riemannienne compacte (M,g) de dimension $n \geqslant 3$,

$$\inf_{u\in H_1^2(M),u\not\equiv 0} \frac{\int_M\left(|\nabla u|^2 + \frac{n-2}{4(n-1)}S_g u^2\right)dv_g}{\left(\int_M |u|^{2^*}\,dv_g\right)^{2/2^*}} \leqslant \frac{1}{K(n,2)^2}\,.$$

Par ailleurs, et dans la mesure où le membre de gauche de (8.3) est un invariant conforme, on tire du théorème 6.1 que (8.3) est en fait une égalité dans la classe conforme de la sphère unité standard :

$$\inf_{u\in H_1^2(S^n),u\not\equiv 0} \frac{\int_{S^n}\left(|\nabla u|^2 + \frac{n-2}{4(n-1)}S_h u^2\right)dv_h}{\left(\int_{S^n} |u|^{2^*}\,dv_h\right)^{2/2^*}} = \frac{1}{K(n,2)^2}\,.$$

À la suite du théorème 8.1, et de ces quelques remarques, le problème de Yamabe s'est historiquement ramené à la preuve de (8.3) pour toute variété non conformément difféomorphe à la sphère unité standard de même dimension. Donc en fait à l'existence, sur toute variété compacte (M, g) non conformément difféomorphe à la sphère standard de même dimension, de fonctions test u pour lesquelles

$$\frac{\int_M\left(|\nabla u|^2 + \frac{n-2}{4(n-1)}S_g u^2\right)dv_g}{\left(\int_M |u|^{2^\star}dv_g\right)^{2/2^\star}} < \frac{1}{K(n,2)^2}.$$

De telles fonctions furent d'abord trouvées par Aubin [2]. Leur caractère local ne permettait néanmoins pas de résoudre le problème dans son intégralité : on obtenait (8.3) pour les variétés non conformément plates de dimension $n \geqslant 6$. Pour ce qui est des cas restants, il apparaissait de plus en plus clair que la résolution du problème devrait passer par l'utilisation de fonctions véhiculant une information sur la géométrie globale (et non plus uniquement locale) de la variété. Ces fonctions furent trouvées par Schoen [41] dans un travail remarquable. Elles mirent en évidence le rôle inattendu et fondamental que devait jouer le théorème de la masse positive. Le problème de Yamabe était du coup résolu.

THÉORÈME 8.2. — *Étant donnée* (M, g) *une variété riemannienne compacte de dimension* $n \geqslant 3$, *il existe toujours une métrique dans* $[g]$ *qui est à courbure scalaire constante. L'inégalité stricte* (8.3) *a de plus toujours lieu, à savoir dès lors que* (M, g) *n'est pas conformément difféomorphe à la sphère unité standard de même dimension.*

Abordons maintenant l'illustration de la seconde des correspondances du début du paragraphe, et donc, dans le contexte choisi ici, les questions de multiplicité pour le problème de Yamabe. Le problème est de déterminer des conditions sur (M, g) pour que $[g]$ possède plusieurs métriques distinctes ayant la même courbure scalaire constante. Cela revient encore à trouver des conditions sur (M, g) pour que l'équation (8.2), à savoir

$$\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)}S_g u = \lambda u^{2^\star-1},$$

possède plusieurs solutions distinctes. Dans un tel problème, encore largement ouvert, la plupart des résultats disponibles sont des résultats d'unicité. Ainsi, $[g]$ possède, à multiplication par un réel strictement positif près, une unique métrique à courbure scalaire constante dans chacun des cas suivants :

(1) (Aubin [2]) s'il existe $g' \in [g]$ telle que $\int_M S_{g'}dv_{g'} \leqslant 0$;

(2) (Obata [38]) si $(M, [g]) \neq (S^n, [h])$, et s'il existe $g' \in [g]$ qui est d'Einstein ;

où par $(M, [g]) \neq (S^n, [h])$, on entend que (M, g) n'est pas conformément difféomorphe à la sphère unité standard de même dimension.

Étant donnée (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geqslant 3$, on définit $C_0(g)$ comme étant la plus petite des constantes réelles C telles que pour tout $u \in H_1^2(M)$,

$$\frac{1}{K(n,2)^2}\left(\int_M |u|^{2^\star}dv_g\right)^{2/2^\star} \leqslant \int_M |\nabla u|^2 dv_g + \frac{n-2}{4(n-1)}\int_M S_g u^2 dv_g + C\int_M u^2 dv_g.$$

On s'en rendra compte facilement,

$$K(n,2)^2 C_0(g) \leqslant B_0(g) - \frac{n-2}{4(n-1)} K(n,2)^2 \min_{x \in M} S_g(x)$$

avec égalité si S_g est constante. Le rôle joué par $B_0(g)$ pour les questions de multiplicité est explicite dans le théorème suivant, dû à Hebey-Vaugon [30].

THÉORÈME 8.3. — *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geqslant 3$, non conformément difféomorphe à (S^n, h), la sphère unité standard de même dimension. On suppose qu'il existe m revêtements riemanniens non triviaux $\Pi_i : (M, g) \to (M_i, g_i)$, $i = 1, \dots, m$, on note b_i le nombre de feuillets de ces revêtements, $1 < b_1 < \cdots < b_m$, et on pose $b_0 = 1$. Si pour tout $i = 1, \dots, m$,*

$$C_0(g_i) V_g^{2/n} \leqslant \frac{1}{K(n,2)^2} \left(b_i^{2/n} - b_{i-1}^{2/n} \right)$$

alors $[g]$ possède $m + 1$ métriques, distinctes par leur volume, ayant une même courbure scalaire constante.

Pour simplifier, on commentera la preuve de ce théorème en supposant que $m = 1$. Notons J la fonctionnelle définie sur $H_1^2(M) \setminus \{0\}$ par

$$J(u) = \frac{\int_M \left(|\nabla u|^2 + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g u^2 \right) dv_g}{\left(\int_M |u|^{2^*} dv_g \right)^{2/2^*}}$$

et par J_1 son analogue sur $H_1^2(M_1) \setminus \{0\}$. Des théorèmes 8.1 et 8.2, on tire l'existence d'une fonction strictement positive $u \in C^\infty(M)$, et d'une fonction strictement positive $u_1 \in C^\infty(M_1)$ telles que

$$\begin{cases} J(u) = \inf J \\ J_1(u_1) = \inf J_1 \end{cases} .$$

Sans perdre en généralité, on pourra supposer que u et u_1 sont de norme 1 dans $L^{2^*}(M)$ et $L^{2^*}(M_1)$. Il s'ensuit que u et u_1 sont solutions, respectivement sur M et M_1, des équations

$$\begin{cases} \Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g u = \lambda u^{2^*-1} \\ \Delta_{g_1} u_1 + \frac{n-2}{4(n-1)} S_{g_1} u_1 = \lambda_1 u_1^{2^*-1} \end{cases}$$

où $\lambda = J(u)$ et $\lambda_1 = J_1(u_1)$. Si $\tilde{u} = u_1 \circ \Pi_1$, alors

$$\Delta_g \tilde{u} + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g \tilde{u} = \lambda_1 \tilde{u}^{2^*-1} .$$

D'une part, d'après le théorème 8.2,

$$J(u) < \frac{1}{K(n,2)^2}$$

D'autre part, il suit de la définition de $C_0(g_1)$ que

$$\begin{aligned} J(\tilde{u}) &= b_1^{2/n} J_1(u_1) \\ &\geqslant b_1^{2/n}\Big(\frac{1}{K(n,2)^2} - C_0(g_1)\int_{M_1} u_1^2 dv_{g_1}\Big) . \end{aligned}$$

Par Hölder, et puisque u_1 est de norme 1 dans $L^{2^*}(M_1)$,

$$\begin{aligned} \int_{M_1} u_1^2 dv_{g_1} &\leqslant V_{g_1}^{2/n} \\ &= b_1^{-2/n} V_g^{2/n} . \end{aligned}$$

On va ainsi récupérer $J(u) < J(\tilde{u})$ si

$$b_1^{2/n}\Big(\frac{1}{K(n,2)^2} - C_0(g_1) b_1^{-2/n} V_g^{2/n}\Big) \geqslant \frac{1}{K(n,2)^2}$$

à savoir si l'inégalité du théorème est vérifiée. À multiplication par un réel strictement positif près, $u^{4/(n-2)}g$ et $\tilde{u}^{4/(n-2)}g$ ont une même courbure scalaire constante. Elles sont distinctes, en particulier distinguées par leur volume, dès lors que $J(u) < J(\tilde{u})$. D'où le résultat.

Le théorème 8.3 constitue en fait la seule approche générale disponible dans l'étude de la multiplicité relative au problème de Yamabe. Auparavant, essentiellement deux cas de multiplicité étaient connus : le cas de la sphère unité standard (S^n, h), et le cas du produit $(S^1(T) \times S^{n-1}, g_T)$ du cercle de rayon T et de S^{n-1} avec pour métrique g_T, la métrique produit standard. Pour ce qui est de (S^n, h), l'ensemble des métriques de $[h]$ ayant une même courbure scalaire constante est explicitement connu. En particulier, deux métriques de $[h]$ ayant une même courbure scalaire constante, ont un même volume. Pour ce qui est de $(S^1(T) \times S^{n-1}, g_T)$, l'étude est de Schoen [42]. Le point clef de son analyse est que l'équation de courbure scalaire sur $S^1(T) \times S^{n-1}$ se ramène à une équation sur $\mathbb{R}$ qu'il est possible d'étudier. Une description relativement explicite, dépendant du paramètre T, de l'ensemble des métriques conformes à g_T ayant une même courbure scalaire constante est du coup disponible. À titre d'illustration, nous montrons pour finir comment retrouver simplement cette multiplicité à partir du théorème 8.3. C'est l'objet de ce qui suit.

Corollaire 8.1. — *Soit $S^1(T) \times S^{n-1}$, $n \geqslant 3$, munie de sa métrique produit standard g_T. Pour tout entier k, il existe un réel $T(k) > 0$ tel que pour tout $T \geqslant T(k)$, $[g_T]$ possède k métriques, distinctes par leur volume, ayant une même courbure scalaire constante.*

Soient G_i, $i = 1, \ldots, k$, des sous groupes finis de rotations sur S^1, d'ordres $b_i = i$. On obtient k revêtements riemanniens

$$\Pi_i : \big(S^1(T) \times S^{n-1}, g_T\big) \longrightarrow \big(S^1(T/i) \times S^{n-1}, g_{T/i}\big) .$$

De la proposition 7.3, on tire que

$$C_0(g_{T/i}) \leqslant \frac{i^2}{4T^2}$$

Le corollaire suit facilement du théorème 8.3, en remarquant que pour tout $i = 2, \dots, k$,

$$\frac{i^2}{4T^2}\left(2\pi T \omega_{n-1}\right)^{2/n} \leqslant \frac{1}{K(n,2)^2}\left(i^{2/n} - (i-1)^{2/n}\right)$$

dès lors que T est suffisamment grand.

9. Le programme $\mathscr{B}$ dans sa seconde partie

Bien que là encore loin d'être satisfaisante, la situation dans l'étude du programme $\mathscr{B}$ l'est cependant plus que dans celle du programme $\mathscr{A}$. En particulier, en ce qui concerne la question $4\mathscr{B}$, on possède une borne supérieure explicite de $A_0(g)$ pour une classe assez large de variétés. Un type d'énoncé qui manque dans l'étude du programme $\mathscr{A}$.

Trois principaux résultats sont en fait disponibles sur le sujet. Nous commencerons par le suivant, une borne supérieure implicite pour $A_0(g)$. Dans son énoncé, Rc_g réfère à la courbure de Ricci, V_g comme dans tout le texte au volume, et d_g au diamètre.

THÉORÈME 9.1. — *Étant donnés $n \geqslant 3$ un entier, et k, $v > 0$, $d > 0$ trois réels, il existe $A = A(n, k, v, d)$ une constante réelle strictement positive ne dépendant que de n, k, v, et d, telle que pour toute variété riemannienne compacte (M, g) de dimension n, si*

$$Rc_g \geqslant kg\,,\ V_g \geqslant v\,,\ d_g \leqslant d\,,$$

alors $A_0(g) \leqslant A$.

Sans rentrer dans les détails, on peut voir ce résultat comme une conséquence simple d'une estimée obtenue par Yau [47] sur la première valeur propre non nulle $\lambda_1(g)$ du laplacien relatif à g. À savoir : il existe une constante réelle strictement positive $\lambda = \lambda(n, k, v, d)$, ne dépendant que de n, k, v, et d, telle que pour toute variété (M, g) vérifiant les bornes du théorème, $\lambda_1(g) \geqslant \lambda$. À partir de là, et avec un peu de travail, on obtient une constante ne dépendant que de n, k, v, et d, pour l'inégalité de Sobolev-Poincaré associée à l'inclusion de $H_1^2(M)$ dans $L^{2^*}(M)$. Le résultat suit alors de l'inégalité de Bakry [5] utilisée dans la preuve du théorème 2.2.

Dans le cas spécial des variétés à courbure de Ricci strictement positive, une borne supérieure explicite est disponible pour $A_0(g)$. Ce résultat, dont l'énoncé suit, est dû à Ilias [33]. On en trouvera une preuve plus générale dans Bakry-Ledoux [6] et Fontenas [21].

THÉORÈME 9.2. — *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geqslant 3$. On suppose que sa courbure de Ricci vérifie $Rc_g \geqslant (n-1)kg$ pour un réel $k > 0$.*

Alors

$$A_0(g) \leqslant \frac{4}{n(n-2)kV_g^{2/n}}$$

et l'égalité est réalisée dans le cas de la sphère unité standard (S^n, h).

En suivant Ilias [33], la preuve de ce résultat est basée sur une isopérimétrie de Gromov [22] : pour Ω un domaine régulier dans M, et B une boule dans la sphère unité standard (S^n, h), si $V_g(\Omega) = \beta V_h(B)$, où $\beta = V_g/\omega_n$, alors $A_g(\partial\Omega) \geqslant \beta A_h(\partial B)$. À partir de là, et par symétrisation sur la sphère, on récupère le théorème 9.2 (via l'inégalité du théorème 6.1).

Nous énoncerons pour finir le résultat suivant, dû à Bakry-Ledoux [6]. Il concerne la question $5\mathscr{B}$.

THÉORÈME 9.3. — *Soit* (M, g) *une variété riemannienne compacte de dimension* $n \geqslant 3$. *On suppose que*

$$A_0(g) \geqslant \frac{4}{n(n-2)V_g^{2/n}} \tag{9.1}$$

et qu'il existe une fonction lipschitzienne f *sur* M *telle que*

$$\max_{x \in M} |\nabla f(x)| \leqslant 1 \quad et \quad \max_{x,y \in M} |f(y) - f(x)| = \pi\,. \tag{9.2}$$

Alors

$$A_0(g) = \frac{4}{n(n-2)V_g^{2/n}}$$

et l'inégalité totalement optimale $(J^2_{2,OPT})$ *possède des fonctions extrémales non constantes. Plus précisément, si on translate* f *de sorte que* $\sin f$ *soit d'intégrale nulle sur* M, *alors pour tout réel* $\lambda \in]-1, +1[$, $f_\lambda = (1 + \lambda \sin f)^{1-n/2}$ *est une fonction extrémale pour* $(J^2_{2,OPT})$.

Ce résultat a en fait été démontré par Bakry et Ledoux [6] dans un contexte beaucoup plus général, celui des générateurs de Markov abstraits. Tel qu'énoncé ici, on prendra garde que combiné avec le théorème 9.2, il redonne en fait le théorème 6.1. Sous l'hypothèse $Rc_g \geqslant (n-1)g$, à partir de laquelle on récupère (9.1) via le théorème 9.2, l'existence de f satisfaisant les conditions (9.2) entraîne en effet que (M, g) et (S^n, h) sont isométriques. Pour le voir, on remarquera que l'existence de f entraîne que le diamètre d_g de (M, g) doit être supérieur ou égal à π, tandis que du théorème de Myers, et de l'hypothèse $Rc_g \geqslant (n-1)g$, on tire que $d_g \leqslant \pi$. Ainsi $d_g = \pi$, et l'assertion suit du théorème du diamètre maximal de Topogonov-Cheng.

10. Une dernière question

Pour finir, abordons une dernière question : pour quelles variétés riemanniennes compactes (M,g) de dimension $n \geqslant 3$, a-t-on que pour tout $u \in H_1^2(M)$,

$$\|u\|_{2^*}^2 \leqslant K(n,2)^2\|\nabla u\|_2^2 + V_g^{-2/n}\|u\|_2^2 \tag{I}$$

en d'autres termes, que tout à la fois $A_0(g) = K(n,2)^2$ et $B_0(g) = V_g^{-2/n}$?

Une réponse plausible à cette question, dont la première apparition semble remonter à Hebey [23], est qu'à multiplication par un réel strictement positif près, seule la sphère standard (S^n, h) réalise (I). Le résultat serait que si (I) a lieu sur une variété riemannienne compacte (M,g) de dimension $n \geqslant 3$, alors il existe un réel $\lambda > 0$ pour lequel $(M, \lambda g)$ et (S^n, h) sont isométriques. Nous citerons ici trois réponses partielles, et renvoyons à Hebey [28] pour plus de détails sur le sujet. Le premier des résultats que nous citerons en regroupe en fait plusieurs obtenus à la fois par Hebey [25] et Hebey-Vaugon [30]. Étant donnée (M,g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geqslant 3$, on note $\lambda_1(g)$ la première valeur propre non nulle du laplacien relatif à g, d_g le diamètre de M pour g, et $Yam_g(M)$ l'énergie de Yamabe de g, à savoir

$$Yam_g(M) = V_g^{-(n-2)/n} \int_M S_g dv_g .$$

Comme dans tout le texte, S_g désigne la courbure scalaire de g et V_g le volume de M pour g.

Proposition 10.1. — *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geqslant 3$. On suppose que (I) a lieu sur (M,g). Alors :*

(1) Sans aucune autre condition, $d_g V_g^{-1/n} \leqslant d_h V_h^{-1/n}$;

(2) Sous la condition que S_g est constante, $\lambda_1(g) V_g^{2/n} \geqslant \lambda_1(h) V_h^{2/n}$;

(3) Sous la condition que $n \geqslant 4$, $Yam_g(M) \leqslant Yam_h(S^n)$

où (S^n, h) désigne la sphère unité standard de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Le point (1) dans cette proposition est une conséquence des travaux de Bakry et Ledoux [6]. Le point (2) possède par ailleurs une réciproque partielle (voir à ce sujet Hebey-Vaugon [30]). Indépendamment, dans la mesure où pour g une métrique sur S^n conforme à h, $Yam_g(S^n) \geqslant Yam_h(S^n)$ avec égalité si et seulement si g est à courbure sectionnelle constante (voir par exemple [26]), on tire facilement du point (3) la validité de la conjecture dans la classe conforme de la sphère standard.

Proposition 10.2. — *Soit g une métrique sur S^n, $n \geqslant 4$, conforme à h. Si (I) a lieu sur (S^n, g), alors, à multiplication par un réel strictement positif près, g et h sont isométriques.*

Pour finir, on énonce un résultat de finitude "à la Cheeger" pour (I). Ce résultat découle très simplement d'une minoration du volume des boules obtenue par Carron [12], et du théorème de convergence $C^{1,\alpha}$ d'Anderson [1] (voir Hebey-Herzlich [29] pour un survey sur ces questions de convergence de variétés). Étant donnée (M, g) une variété riemannienne compacte, on note K_g sa courbure sectionnelle.

PROPOSITION 10.3. — *Pour tout entier $n \geqslant 3$, et tout réel $\Lambda > 0$, il existe, à difféomorphismes près, un nombre fini de variétés riemanniennes compactes (M, g) de dimension n pour lesquelles à la fois $|K_g| V_g^{2/n} \leqslant \Lambda$ et (I) a lieu.*

Note complémentaire : Peu de temps après que ce texte ait été rédigé, Olivier Druet obtenait la résolution complète de la conjecture d'Aubin dont il est question au paragraphe 4. De façon plus précise, Druet montre que pour toute variété riemannienne compacte (M, g) de dimension n, $n \geqslant 2$, pour tout $p \in]1, n[$, et pour tout $\theta \in [1, p]$, les inégalités optimales $(I_{p,opt}^{\theta})$ ont lieu sur (M, g) avec $\theta = p$ si $p \leqslant 2$, et $\theta = 2$ si $p > 2$. Cela entraîne en particulier que pour tout $p \in]1, n[$, les inégalités optimales $(I_{p,opt}^{1})$ ont lieu sur toute variété riemannienne compacte de dimension n. Les conjectures 1 et 2 du paragraphe 3 sont vraies dès lors que $p > 1$. En couplant ce résultat avec son théorème 4.1, on voit par ailleurs que la puissance critique lors du passage de $p \leqslant 2$ à $p \geqslant 2$ dans l'échelle des inégalités optimales $(I_{p,opt}^{\theta})$ est bien $\theta = 2$, et non pas $\theta = p/(p-1)$ comme suggéré par la conjecture d'Aubin. Tout ceci est bien sûr à mettre en parallèle avec le théorème 4.2. Pour $p \leqslant 2$, et θ quelconque, les inégalités optimales $(I_{p,opt}^{\theta})$ et $(J_{p,opt}^{\theta})$ se comportent de la même façon, à savoir sont toutes deux vraies. Il en va de même lorsque $p > 2$ si $\theta = 2$. Par contre, pour $p > 2$ et $\theta > 2$, la géométrie influence l'inégalité $(I_{p,opt}^{\theta})$, mais pas l'inégalité optimale $(J_{p,opt}^{\theta})$. Nous renvoyons à la référence Druet [The best constants problem in Sobolev inequalities, Prépublications de l'université de Cergy-Pontoise, Octobre 98] pour la preuve du théorème ci-dessus énoncé.

Bibliographie

[1] ANDERSON M.T., Convergence and rigidity of manifolds under Ricci curvature bounds, Inventiones Mathematicae, **102** (1990), 429–445.

[2] AUBIN T., Équations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, **55** (1976), 269–296.

[3] AUBIN T., Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev, Journal of Differential Geometry, **11** (1976), 573–598.

[4] AUBIN T., DRUET O. et HEBEY E., Best constants in Sobolev inequalities for compact manifolds of nonpositive curvature, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, **326** (1998), 1117–1121.

[5] BAKRY D., L'hypercontractivité et son utilisation en théorie des semi-groupes, in Lectures on Probability theory, Lecture Notes in Mathematics, vol. **1581**, 1994.

[6] BAKRY D. et LEDOUX M., Sobolev inequalities and Myer's diameter theorem for an abstract Markov generator, Duke Mathematical Journal, **85** (1996), 253–270.

[7] BEAUVILLE A., Variétés Kähleriennes dont la 1ère classe de Chern est nulle, Journal of Differential Geometry, **18** (1983), 755–782.

[8] BERGER M., Sur les groupes d'holonomie des variétés à connexion affine et des variétés riemanniennes, Bulletin de la Société Mathématique de France, **83** (1955), 279–330.

[9] BESSE A.L., *Einstein manifolds*, Ergebnisse, Springer-Verlag, **10**, 1987.

[10] BLISS, G.A., An integral inequality, J. London Math. Soc. **5** (1930), 40–46.

[11] BRÉZIS H. et NIRENBERG L., Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents, Communications on Pure and Applied Mathematics, **36** (1983), 437–477.

[12] CARRON G., Inégalités isopérimétriques sur les variétés Riemanniennes, Thèse de Doctorat de l'Université Joseph Fourier, 1994.

[13] CROKE C.B., A sharp four dimensional isoperimetric inequality, Comment. Math. Helvetici, **59** (1984), 187–192.

[14] DJADLI Z., Nonlinear elliptic equations with critical Sobolev exponent on compact riemannian manifolds, Calculus of Variations and Partial Differential Equations, à paraître.

[15] DRUET O., Generalized scalar curvature type equations on compact riemannian manifolds, Preprint et Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, à paraître.

[16] DRUET O., Best constants in Sobolev inequalities, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, **326** (1998), 965–969.

[17] DRUET O., Optimal Sobolev inequalities of arbitrary order on compact riemannian manifolds, Journal of Functional Analysis, à paraître.

[18] DRUET O., Équations de type courbure scalaire généralisée avec termes de perturbation sur des variétés riemanniennes compactes, Preprint.

[19] FEDERER H. et FLEMING W.H., Normal integral currents, Annals of Mathematics, **72** (1960), 458–520.

[20] FLEMING W.H. et RISHEL R., An integral formula for total gradient variation, Arch. Math., **11** (1960), 218–222.

[21] FONTENAS E., Sur les constantes de Sobolev des variétés Riemanniennes compactes et les fonctions extrémales des sphères, Bull. des Sciences Mathématiques, **121** (1997), 71–96.

[22] GROMOV M., Paul Levy's isoperimetric inequality, IHES, 1980.

[23] HEBEY E., Courbure scalaire et géométrie conforme, Journal of Geometry and Physics, **10** (1993), 345–380.

[24] HEBEY E., Optimal Sobolev inequalities on complete Riemannian manifolds with Ricci curvature bounded below and positive injectivity radius, American Journal of Mathematics, **118** (1996), 291–300.

[25] HEBEY E., *Sobolev spaces on Riemannian manifolds*, Lecture Notes in Mathematics, Research Monograph, Springer-Verlag, **1635**, 1996.

[26] HEBEY E., *Introduction à l'analyse non linéaire sur les variétés*, Diderot Éditeur, Fondations, 1997.

[27] HEBEY E., Fonctions extrémales pour une inégalité de Sobolev optimale dans la classe conforme de la sphère, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, **77** (1998), 721–733.

[28] HEBEY E., *Nonlinear analysis on manifolds: Sobolev spaces and inequalities*, CIMS Lecture Notes, Courant Institute of Mathematical Sciences, à paraître.

[29] HEBEY E. et HERZLICH M., Harmonic coordinates, harmonic radius and convergence of Riemannian manifolds, Rendiconti di Matematica, Serie VII, **17** (1997), 569–605.

[30] HEBEY E. et VAUGON M., Meilleures constantes dans le théorème d'inclusion de Sobolev et multiplicité pour les problèmes de Nirenberg et Yamabe, Indiana University Mathematics Journal, **41** (1992), 377–407.

[31] HEBEY, E. et VAUGON M., The best constant problem in the Sobolev embedding theorem for complete Riemannian manifolds, Duke Math. Journal, **79** (1995), 235–279.

[32] HEBEY E. et VAUGON M., Meilleures constantes dans le théorème d'inclusion de Sobolev, Annales Inst. Henri Poincaré, Analyse non-linéaire, vol. **13** (1996), 57–93.

[33] ILIAS S., Constantes explicites pour les inégalités de Sobolev sur les variétés Riemanniennes compactes, Annales de l'Institut Fourier, **33** (1983), 151–165.

[34] JOURDAIN A., Solutions nodales pour des équations de type courbure scalaire sur la sphère, Bulletin des Sciences Mathématiques, à paraître.

[35] KAZDAN J.L. etWARNER F.W., Scalar curvature and conformal deformation of Riemannian structure, Journal of Differential Geometry, **10** (1975), 113-134.

[36] KLEINER B., An isoperimetric comparison theorem, Inventiones Mathematicae, **108** (1992), 37–47.

[37] LEDOUX M., On manifolds with nonnegative Ricci curvature and Sobolev inequalities, Preprint.

[38] OBATA M., The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds, Journal of Differential Geometry, **6** (1971), 247–258.

[39] POHOZAEV S., Eigenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$, Soviet Math. Dokl. **6** (1965), 1408–1411.

[40] ROSEN G., Minimum value for c in the Sobolev inequality, SIAM J. Appl. Math., **21** (1971), 30–32.

[41] SCHOEN R., Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature, Journal of Differential Geometry, **20** (1984), 479–495.

[42] Schoen R., Variational theory for the total scalar curvature functional for Riemannian metrics and related topics, in Topics in Calculus of Variations, Lecture Notes in Mathematics, **1365**, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[43] Talenti G., Best constants in Sobolev inequality, Ann. di Matem. Pura ed Appl., **110** (1976), 353–372.

[44] Trudinger N., Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **22** (1968), 265–274.

[45] Weil A., Sur les surfaces à courbure négative, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, **182**(1926), 1069–1071.

[46] Yamabe H., On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds, Osaka Math. J., **12** (1960), 21–37.

[47] Yau S.T., Isoperimetric constants and the first eigenvalue of a compact manifold, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, **8** (1975), 487–507.

[48] Zassenhaus H., Uber endliche Fastkörper, Abh. Math. Sem. Hamburg **11** (1936), 187–220.

Emmanuel HEBEY
Université de Cergy-Pontoise
Département de Mathématiques
Site de Saint-Martin
2 avenue Adolphe Chauvin
95302 CERGY-PONTOISE cedex (France)

e-mail : hebey@u-cergy.fr