MARC HERZLICH

Théorèmes de masse positive

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 16 (1997-1998), p. 107-126
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1997-1998__16__107_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
Volume **16** (1998) (107–126)

THÉORÈMES DE MASSE POSITIVE

Marc HERZLICH

L'objectif de ce texte est de décrire et d'expliquer un certain nombre de résultats récents (ou moins récents) sur la géométrie riemannienne des variétés non-compactes, que l'auteur (suivant là une dénomination qui lui est personnelle) aime à ranger sous le nom de *théorèmes de rigidité à l'infini* mais qui sont souvent désignés par le nom de *théorèmes de masse positive*, en référence à leur milieu d'origine : la physique. Les formes générales de ces différents résultats sont extrêmement semblables et peuvent se décrire de la manière suivante :

– l'élément de base est une variété riemannienne, non compacte et *asymptote* (en un sens que l'on précisera plus tard) à un comportement modèle à l'infini ;

– l'hypothèse principale est une *inégalité ponctuelle* sur une quantité géométrique issue de la courbure de Riemann (en général la courbure scalaire) ;

– et la conclusion tient en deux termes : d'une part une inégalité sur un invariant géométrique *calculé à l'infini*, mais contenant néanmoins de l'information géométrique globale, et surtout un *théorème de rigidité* associé au cas d'égalité.

En ce qui nous concerne, le rôle de modèle sera essentiellement tenu par les espaces symétriques non-compacts de rang 1, l'inégalité ponctuelle portera sur la *courbure scalaire* et l'invariant géométrique à l'infini est connu sous le nom de *masse*.

Pour mieux introduire cet objet et mieux expliquer l'intérêt qu'il peut susciter chez un mathématicien, un assez long détour par son milieu d'origine, la physique et plus exactement la relativité générale, nous sera nécessaire.

1. En passant par la relativité

La théorie de la relativité générale décrit l'espace-temps comme une variété N de dimension 4 munie d'une métrique lorentzienne γ (que nous prendrons ici de signature

Classification math. : 53C20, 58G30, 83C60.

$-+++$), modélisant le champ de gravitation et reliée aux autres interactions en présence par les *équations d'Einstein*:

$$\mathrm{Ric}^{\gamma} - \frac{1}{2}\,\mathrm{Scal}^{\gamma}\,\gamma \;=\; 8\pi\,\mathbf{T},$$

où Ric^{γ} désigne le tenseur de Ricci de la métrique, Scal^{γ} sa courbure scalaire (la combinaison particulière $\mathrm{Ric}^{\gamma} - \frac{1}{2}\,\mathrm{Scal}^{\gamma}$ étant elle-même souvent désignée sous le nom de *tenseur d'Einstein*) et $\mathbf{T}$ est le *tenseur d'énergie-impulsion* des autres interactions, dont l'expression varie suivant la nature des objets en présence.

La situation à laquelle nous allons particulièrement nous intéresser est celle des *systèmes isolés* dans laquelle, de manière très schématique, on impose à l'ensemble des interactions de décroître au fur et à mesure que l'on s'éloigne de leur source et même de s'annuler à l'infini. Cette exigence est difficile à formuler géométriquement dans un cadre lorentzien. L'exemple archétypique d'un tel comportement est la métrique de Schwarzschild, modélisant le champ de gravitation à l'extérieur d'une étoile fixe et statique, représenté par la variété $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 \setminus B(O, m/2))$ munie de

$$\gamma_{\text{schw.}} \;=\; -\frac{\left(1-\frac{m}{2r}\right)^2}{\left(1+\frac{m}{2r}\right)^2}\,dt^2 \;+\; \left(1+\frac{m}{2r}\right)^4 \,\mathrm{eucl}$$

où eucl désigne la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^3$, qui est « asymptote » à l'infini à la métrique plate de Minkowski

$$\varepsilon = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad \text{sur } \mathbb{R}^4.$$

Le paramètre m est la masse de l'étoile : elle peut en effet s'identifier à la masse newtonienne dans l'équation différentielle régissant la trajectoire d'une géodésique radiale (notée dans les coordonnées précédentes $s \longmapsto r(s)$) :

$$r'' \;=\; -\frac{m}{r^2} + O(r^{-3}).$$

Contrairement à ce que l'écriture précédente pourrait laisser penser, la théorie de la relativité générale ne dispose pas d'une notion universelle de masse et, même dans le cadre plus restreint des systèmes isolés, savoir estimer la quantité de matière présente dans une région de l'espace(-temps) reste à l'heure actuelle une question difficile à laquelle aucune réponse vraiment satisfaisante n'a été apportée (voir cependant [11] pour une tentative proche des thèmes développés dans ce texte).

La manière dont a été réalisée l'identification entre le paramètre m et la masse newtonienne dans la métrique de Schwarzschild amène alors naturellement à l'idée que la masse d'un système isolé doit être calculée de façon *globale*, à l'aide d'un procédé de *passage à la limite* et qu'elle dépend de manière *non-linéaire* de la métrique. Cette dernière exigence est d'ailleurs en accord avec la nature profondément non-linéaire des équations d'Einstein.

La définition la plus couramment utilisée aujourd'hui est celle donnée en 1962 par R. Arnowitt, S. Deser et C. Misner [2]. Elle permet de donner un sens à la notion de masse d'une hypersurface *asymptotiquement plate* d'un espace-temps, qui s'étend immédiatement à toutes les dimensions.

DÉFINITION 1.1. — *Une variété riemannienne* (M^n, g) *non compacte, à un seul bout est dite asymptotiquement plate d'ordre* $\tau > 0$ *s'il existe un compact* $K \subset M$ *et un difféomorphisme* (carte à l'infini) $z : M \setminus K \to (\mathbb{R}^n \setminus B(0,r))$ *(où* $r > 0$*) tels que les coefficients de la métrique vérifient dans cette carte* $\{z^1, \ldots, z^n\}$

$$g_{ij} - \delta_{ij} = O(|z|^{-\tau}),\ \partial_k g_{ij} = O(|z|^{-\tau-1}),\ \partial^2_{kl} g_{ij} = O(|z|^{-\tau-2}).$$

Les conditions vérifiées par les coefficients de la métrique peuvent être rendues précises en employant des espaces fonctionnels (de Hölder ou de Sobolev) à poids, *cf.* [10].

DÉFINITION 1.2. — *Si* (M^n, g) *est une variété asymptotiquement plate au sens précédent, sa masse, si elle converge, est définie comme*

$$m(M,g) = \frac{1}{16\pi} \lim_{r \to \infty} \int_{S_r} (\partial_i g_{ij} - \partial_j g_{ii}) \nu^j \, d\mathrm{vol}_{S_r}$$

(où S_r *est une sphère de rayon* r *dans une carte à l'infini et* ν *sa normale unitaire sortante).*

Le coefficient placé en facteur dépend des auteurs : 16π est choisi ici pour que le calcul de la masse de la métrique de Schwarzschild en dimension 3 produise exactement le paramètre m. Dans le cas où la variété asymptotiquement plate est plongée dasn une variété lorentzienne (cas de la relativité), trois quantités supplémentaires, analogues mais dépendant cette fois de la géométrie extrinsèque de l'hypersurface, peuvent également être définies. L'ensemble est habituellement vu comme un vecteur de $\mathbb{R}^4$ muni de la métrique de Minkowski et porte le nom de *vecteur de moment-énergie* [14].

Les définitions précédentes, reposant sur des cartes particulières et des expressions en coordonnées, peuvent paraître surprenantes. Elles définissent cependant des bons objets géométriques. Nous avons néanmoins préféré exposer en premier lieu la Définition 1.1 dans la mesure où celle-ci fournit une vision très concrète et opératoire des variétés asymptotiquement plates. Elle se trouve justifiée par le travail dû à S. Bando, A. Kasue et H. Nakajima [8] qui montre qu'être asymptotiquement plate est équivalent à vérifier :

$$|R^g| = O(r^{-2-\varepsilon}) \ \text{ avec } \varepsilon > 0,\ \lim_{r\infty} r^{-(n-1)} \mathrm{vol}_g(S_o(r)) \geqslant \omega_n,$$

où r est la distance à un point base fixé o et ω_n le volume de la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. La condition de croissance « sur-euclidienne » du volume vise ici à éviter un *effondrement* (au sens de la théorie développée par J. Cheeger et M. Gromov) de la sphère à l'infini du bout sur un espace de dimension plus petite. Elle n'est pas strictement nécessaire et on peut la remplacer, comme l'ont fait R. Greene, P. Petersen and Z. Shu [24], par une condition de nature uniquement topologique, en toutes dimensions $n \neq 4$. Ce dernier résultat est optimal, comme le montrent les contre-exemples en dimension 4 (suggérés par A. Kasue [35] et construits effectivement par S. Unnebrink [53]) fabriqués à partir de produits tordus sur des sphères de Berger.

Dans ce qui précède et par souci de ne pas alourdir le texte, nous n'avons pas été soigneux en ce qui concerne la régularité locale et le nombre de dérivées de la métrique que l'on contrôle, ce qui introduit quelques subtilités supplémentaires : ainsi le résultat de Bando, Kasue et Nakajima ne permet d'obtenir un contrôle sur la différence entre métrique et métrique euclidienne que jusqu'à l'ordre 1. Il faut en fait rajouter une information sur le comportement de la dérivée de la courbure pour obtenir des variétés asymptotiquement plates au sens de la définition donnée plus haut. Ce point n'a aucune importance pour les développements qui vont suivre et nous supposerons donc que l'on contrôle un nombre suffisant de dérivées (en général, deux). En revanche, l'ordre de décroissance (le réel τ) joue lui un rôle crucial.

Il apparaît naturel de se demander si un bout asymptotiquement plat d'une variété admet plusieurs structures de ce type (cartes à l'infini) et non équivalentes. R. Bartnik [10] a montré que ce n'est jamais le cas.

THÉORÈME 1.3. — *Soit deux cartes à l'infini $\{y^i\}$ et $\{z^i\}$ d'une variété asymptotiquement plate. Alors il existe une matrice orthogonale O et un vecteur constant v de $\mathbb{R}^n$ tels que*

$$z - Oy + v = O(|z|^{1-\tau'})$$

pour tout $\tau' < \tau$.

L'énoncé original, dont la formulation est tout à fait analogue, est en réalité un peu plus fin, puisqu'il permet de donner un sens géométrique à la notion d'ordre de décroissance et donc au réel τ.

L'ensemble de ces résultats conduit alors au théorème crucial démontré par R. Bartnik en 1985 [10] mais dont le contenu était, de manière intuitive tout du moins, connu des physiciens depuis les années 60.

THÉORÈME 1.4. — *Si la variété riemannienne (M, g) de dimension n est asymptotiquement plate d'ordre*

$$\tau > \frac{n-2}{2}$$

et si sa courbure scalaire est dans l'espace de Lebesgue L^1, alors sa masse est bien définie. C'est un invariant riemannien, *indépendant du choix de la carte.*

L'existence de la masse provient de la transformation de l'intégrale la définissant en une intégrale de volume. On reconnaît alors l'intégrale de la courbure scalaire et un deuxième terme, quadratique en les dérivées premières et non-tensoriel, qui est intégrable si l'ordre vérifie la condition citée

La démonstration de l'invariance de la masse est nettement plus subtile et l'unicité de la structure asymptotiquement plate y joue un rôle crucial. A noter que les physiciens V. Denisov et O. Solovev ont construit dans [18] un contre-exemple en dimension 3, d'ordre de décroissance à l'infini exactement égal à $1/2$ et dont deux cartes à l'infini calculent deux masses différentes.

Toute variété (suffisamment) asymptotiquement plate naît donc accompagnée d'un invariant d'un type inattendu, calculé de surcroît d'une manière apparemment non-tensorielle, à partir des *dérivées premières* de la métrique ! De nombreuses tentatives ont été faites pour en donner une expression plus intrinsèque. L'idée la plus intéressante est due à S. Hawking [26], reprise par R. Geroch [21] puis P. S. Jang et R. Wald [34] : ils ont établi que

$$m(g) = \lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{\mathrm{Aire}(S_t)}}{64\pi^{3/2}} \left(16\pi - \int_{S_t} H^2\right)$$

où les S_t convergent très vite vers des sphères euclidiennes à l'infini et H est leur courbure moyenne. Bien que plus satisfaisante pour la théorie, cette définition reste le plus souvent peu utile pour les calculs pratiques.

Outre ces particularités, la masse présente l'intérêt de contenir une information de nature globale sur la géométrie de la variété, et non seulement locale au voisinage de l'infini comme son mode de calcul pourrait le laisser supposer. Pour mieux comprendre cet aspect des choses, il est temps de reprendre notre route à travers la théorie des systèmes isolés. Si la masse est bien une mesure de la quantité de matière contenue dans l'espace-temps, il est alors naturel d'espérer qu'elle soit positive, du moins si l'ensemble des interactions en présence sont physiquement réalistes. De la même façon, il est permis de s'attendre à ce qu'elle ne puisse être nulle que pour l'espace-temps trivial de Minkowski.

Les critères utilisés habituellement pour décider du caractère raisonnable des interactions sont des inégalités sur leur tenseur d'énergie-impulsion $\mathbf{T}$, dite *condition d'énergie dominante*: on demande ainsi que *(i)* $\mathbf{T}(v,v) \geqslant 0$ et *(ii)* $\mathbf{T}(v,.)^\sharp$ soit un vecteur de type temps ou lumière pour tout v de type temps ($^\sharp$ est l'isomorphisme musical induit par γ entre cotangent et tangent). Elle s'interprète en des termes très attrayants [27] : si le tenseur d'énergie-impulsion est nul sur une hypersurface $\mathscr{S}$ de type espace de N, alors la condition d'énergie dominante impose qu'il soit nul sur tout le *développement futur de Cauchy* de $\mathscr{S}$, ensemble des points de N pour lesquels toute géodésique de type temps ou lumière qui en est issue rencontre nécessairement $\mathscr{S}$. Autrement dit, aucune information ne peut voyager plus vite que la vitesse de la lumière !

Sous ces hypothèses peut alors s'énoncer la

Conjecture de la masse positive (forme physique). — *Si* (M^3, g) *est une hypersurface asymptotiquement plate d'un espace-temps* (N^4, γ) *satisfaisant la* condition d'énergie dominante, *alors sa masse, si elle existe, est positive (son vecteur de moment-énergie* *est de type temps). De plus, si la masse est nulle, alors* (N, γ) *est isométrique (le long de M) à l'espace de Minkowski.*

Si l'on remplace ce cadre très général par celui où la variété N est un produit de M par un intervalle et la métrique est par exemple *statique*, c'est-à-dire que

$$\gamma = -\varphi(x)\, dt^2 + g(x),$$

la condition d'énergie dominante se traduit dans la géométrie intrinsèque de l'hypersurface par une très belle condition géométrique, qui donne naissance à la

CONJECTURE DE LA MASSE POSITIVE (FORME MATHÉMATIQUE). — *Si* (M^n, g) *est une variété asymptotiquement plate de dimension* $n \geqslant 3$ *(à masse bien définie) à* courbure scalaire positive, *alors sa masse est positive, et elle est nulle si et seulement si* (M, g) *est isométrique à l'espace euclidien* $(\mathbb{R}^n, \mathrm{eucl})$.

Cette conjecture, qui comprend une inégalité et une rigidité associée au cas d'égalité, constitue donc un remarquable énoncé de géométrie riemannienne globale. Supposer qu'elle est vérifiée amène à admettre plusieurs conséquences frappantes. Parmi celles-ci, on peut citer une des formes particulières, qui sont aujourd'hui des théorèmes, choisies par R. Geroch dans un exposé de 1974 au cours d'un symposium de l'A.M.S. pour tenter d'attirer l'attention des mathématiciens sur les problèmes issus de la relativité [22] :

THÉORÈME 1.5. — *Il n'existe pas de métrique à courbure scalaire positive et qui est plate en-dehors d'un compact sur* $\mathbb{R}^3$, *à l'exception de la métrique euclidienne.*

Comme il est aisé de le calculer, la masse d'une variété asymptotiquement plate d'ordre $\tau > n - 2$ est nulle. Une autre conséquence de la conjecture est donc de prédire le résultat suivant (qui sera une source d'inspiration majeure des chapitres suivants de ce texte) :

CONJECTURE 1.6. — *Toute variété asymptotiquement plate de dimension* $n \geqslant 3$ *d'ordre* $\tau > n - 2$ *et à courbure scalaire positive est isométrique à l'espace euclidien.*

2. Enfin des théorèmes.

La conjecture de la masse positive, du moins sous la seconde forme présentée plus haut et bien qu'elle soit considérée comme très vraisemblable, n'est pas encore démontrée en toute généralité. Le théorème suivant, qui résume les contributions majeures de

R. Schoen et S.-T. Yau d'une part en 1978 [46, 47] et de E. Witten d'autre part en 1981 [54], contient l'essentiel de nos connaissances sur le sujet à la date d'aujourd'hui (mi-1998). [1]

THÉORÈME 2.1. — *La forme mathématique de la conjecture de la masse positive est vraie*

– *si la dimension de M est comprise entre* 3 *et* 7,

– *ou si la variété M est spinorielle.*

Outre ces deux résultats significatifs, la véracité de la conjecture est connue dans de multiples cas particuliers. Citons par exemple celui de certaines variétés obtenues comme éclatement conforme en un point d'une variété compacte et conformément plate [49], qui peut être facilement étendu pour s'appliquer à l'ensemble des variétés conformément plaẗes [29].

La démonstration de E. Witten utilise l'opérateur de Dirac et la géométrie spinorielle ; elle sera évoquée dans la section suivante de ce texte. Celle de R. Schoen et S.-T. Yau se fonde sur l'étude des surfaces minimales plongées dans une variété à courbure scalaire positive, une technique qui a été développée par ces deux auteurs au cours des années 70 et qui a permis de démontrer des résultats spectaculaires de non-existence de métriques à courbure scalaire positive ou strictement positive sur des variétés satisfaisant certaines conditions topologiques [48].

L'argument essentiel de leur démonstration est un raisonnement par récurrence et par l'absurde. Le point de départ consiste donc à supposer l'existence d'une variété asymptotiquement plate (d'ordre suffisamment grand), à courbure scalaire positive et à masse négative. Sous ces hypothèses, R. Schoen et S.T. Yau démontrent la convergence d'une suite de solutions minimisantes du problème de Plateau, dont les bords sont des sphères $(n-2)$-dimensionnelles dans une carte à l'infini, vers une hypersurface minimale complète, stable et elle-même asymptotiquement plate et à masse négative. L'ingrédient essentiel est bien sûr la négativité de la masse qui permet de contenir les éléments de la suite d'hypersurfaces entre deux plans parallèles, qui jouent ainsi le rôle de *barrières* inférieures et supérieures. La stabilité de la limite entraîne la positivité de la courbure scalaire de sa métrique induite et permet donc d'abaisser la dimension, faisant ainsi tourner la récurrence. Le même argument fournit également l'amorce de la récurrence puisque la positivité en tout point de la courbure scalaire en dimension 2 entre en contradiction avec le théorème de Cohn-Vossen.

L'hypothèse de dimension $3 \leqslant n \leqslant 7$ intervient de façon cruciale dans cet argument puisqu'elle assure la régularité des hypersurfaces minimales obtenues ; ainsi elle est nécessaire, par exemple, dans l'application de la version non-compacte de Gauss-Bonnet qu'est le théorème de Cohn-Vossen (pour plus de détails, le lecteur aura avantage à consulter le rapport [36]).

1. R. Schoen et S.-T. Yau ont à plusieurs reprises affirmé posséder une preuve valable en toutes dimensions, généralisant leur travail en dimensions $n \leqslant 7$. A la connaissance de l'auteur, cette démonstration semble ne jamais avoir été publiée.

Une caractéristique remarquable de la masse est son apparition dans des situations classiques de géométrie conforme et l'importance des théorèmes que la connaissance de sa positivité permet de démontrer. Ainsi elle est la dernière pierre de la résolution du célèbre

Problème de Yamabe.[55] *Pour toute variété riemannienne (M,g) compacte de dimension $n \geqslant 3$, peut-on trouver une métrique de courbure scalaire constante conforme à g?*

Sa démonstration est aujourd'hui complète grâce aux efforts de N. Trudinger [52], T. Aubin [3] et R. Schoen [45] : si l'on note $\tilde{g} = \phi^{p-2}g$ (avec $p = 2n/(n-2)$) toute métrique conforme à g, trouver une métrique de courbure scalaire constante dans la classe conforme de g revient à rechercher un point critique de la fonctionnelle $\mathcal{Q}_g$ sur les fonctions C^∞ définie par

$$\mathcal{Q}_g(\phi) = \frac{\int_M \mathrm{Scal}^{\phi^{p-2}g}\, dv_{\phi^{p-2}g}}{(\mathrm{vol}_{\phi^{p-2}g}(M))^{\frac{2}{p}}} = \frac{\int_M \left(4\frac{n-1}{n-2}\,|d\phi|^2 + \mathrm{Scal}^g\,\phi^2\right) dv_g}{\|\phi\|_p^2}.$$

Le minimum de $\mathcal{Q}_g$ est noté $\Lambda(M)$ et est un invariant conforme de M appelé *invariant de Yamabe.*

Les techniques classiques de résolution du problème par le calcul des variations se heurtent ici au fait que l'injection de Sobolev de $W^{1,2}$ dans L^p n'est pas compacte (c'est le cas critique où elle n'est que continue). Néanmoins, elles permettent de montrer qu'il existe des solutions non-nulles ϕ_s aux équations sous-critiques obtenues en remplaçant le paramètre p par un $s < p$ dans l'expression de $\mathcal{Q}_g$.

Dès que $\Lambda(M,g) < \Lambda(S^n, can)$, il est possible d'obtenir un contrôle uniforme des solutions sous-critiques dans une norme de Sobolev bien choisie et donc de montrer leur convergence, lorsque s tend vers p, vers une solution non triviale au problème de Yamabe, *via* le théorème d'Ascoli (une technique différente, dite de renormalisation, a par ailleurs raison du cas de la sphère standard). Il apparaît de plus facilement que, pour toute variété riemannienne compacte (M,g), l'invariant de Yamabe $\Lambda(M,g)$ est inférieur ou égal à $\Lambda(S^n, can)$ (en prenant des fonctions-test concentrées sur des boules de plus en plus petites). Il était donc naturel de conjecturer que la valeur $\Lambda(S^n, can)$ était caractéristique de la sphère ronde. T. Aubin [3] a alors démontré que pour toute variété à $\Lambda(M,g)$ strictement positif,

$$\Lambda(S^n, can) - \Lambda(M,g) \geqslant c \sup |W^g|^2$$

si la dimension est supérieure ou égale à 6, (c est une constante strictement positive et W^g est le tenseur de Weyl). Le cas général provient de l'inégalité étonnante (valable si la dimension est comprise entre 3 et 6 ou si (M,g) est conformément plate) mise en évidence par R. Schoen [38, 45] :

$$\Lambda(S^n, can) - \Lambda(M,g) \geqslant c\, m_0,$$

où m_0 est la masse de la variété asymptotiquement plate $(M \setminus \{q\}, g_0)$ obtenue par éclatement conforme par la fonction de Green G_q de la partie linéaire de l'équation de Yamabe en un point q. Autrement dit

$$g_0 = G_q^{\frac{4}{n-2}} g \text{ sur } M \setminus \{q\}.$$

Il suffit donc pour conclure d'appliquer le théorème de la masse positive qui est parfaitement démontré dans cette situation !

Il existe aujourd'hui d'autres démonstration du problème de Yamabe, ne faisant pas appel aux considérations précédentes, dues à A. Bahri et H. Brézis [6]. Néanmoins, l'utilité de l'invariant « masse » dans les problèmes de géométrie conforme ne s'est toujours pas démentie. Inspirés par la manière dont celui-ci intervenait dans la résolution du problème de Yamabe, R. Schoen et S.-T. Yau ont ainsi remarqué le rôle très important joué par le premier terme non-trivial de la fonction de Green du laplacien conforme en un point donné (qui est directement relié à la masse de la variété asymptotiquement plate associée) d'une variété compacte et conformément plate. Cette idée, couplée aux théorèmes de masse positive, permet par exemple, à l'aide d'une formidable machinerie technique, de démontrer les résultats suivants [49] :

THÉORÈME 2.2. — *Soit (M, g) une variété compacte conformément plate à courbure scalaire (ou invariant de Yamabe) strictement positive. Alors M est conformément équivalente à un quotient d'un domaine Ω de la sphère S^n par un groupe kleinien. De plus, la dimension de Hausdorff de $\partial\Omega$ est au plus $(n-2)/2$.*

Il est probable que l'usage de la masse en géométrie conforme recèle d'autres richesses. Pour en donner un exemple supplémentaire, nous nous contenterons de citer la construction récente, due à J. Jost et L. Habermann, d'une métrique canonique dans la classe conforme de toute métrique à courbure scalaire positive de dimension 3 [25].

3. Courbure scalaire et théorèmes de rigidité à l'infini : la masse disparue

En dehors de leur influence en géométrie conforme, un autre intérêt des théorèmes et conjectures évoqués précédemment tient dans les résultats de rigidité qui les accompagnent. Dits en des termes imprécis, ils interdisent à toute variété asymptotiquement plate « trop proche » à l'infini (ce que nous désignerons plus loin par « fortement asymptote ») du modèle et à courbure scalaire positive ou nulle de ne pas lui être isométrique.

Toujours en suivant l'inspiration de la relativité, il est facile de conjecturer un énoncé analogue dans le cas où le modèle plat est remplacé par l'espace hyperbolique réel : les plans de type espace de l'espace de Minkowski peuvent très bien être remplacés par des hyperboloïdes !

De façon plus surprenante, il semble aujourd'hui que ce phénomène, loin de se cantonner aux exemples issus de la relativité, soit beaucoup plus général et se produise en fait dès que le modèle est un espace symétrique de rang 1. De manière plus précise, nous pouvons énoncer le

THÉORÈME 3.1. — *Soit* (M_0, g_0) *une variété riemannienne prise dans la liste suivante :* $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}H^n$ *ou* $\mathbb{C}H^m$ *(de dimension complexe m impaire). Alors si* (M, g) *est une variété riemannienne complète non compacte, spin (et kählerienne dans le cas complexe)* fortement asymptote *à l'infini au modèle* (M_0, g_0), *de courbure scalaire*

$$\mathrm{Scal}^g \geqslant \mathrm{Scal}^{g_0},$$

(M, g) *est isométrique à son modèle.*

Des quotients ont également été étudiés en dimension 4. On peut alors énoncer :

THÉORÈME 3.2. — *Si le modèle est* $\mathbb{R}^4/\Gamma$ *ou* $\mathbb{R}H^4/\Gamma$ *où* Γ *est un sous groupe fini de* $SU(2)$, *alors les mêmes hypothèses entraînent que la variété est hyperkählerienne et Ricci-plate (cas euclidien) ou est l'espace hyperbolique (cas hyperbolique) et dans ce dernier cas* $\Gamma = \{1\}$.

Les variétés hyperkähleriennes Ricci plates et asymptotiquement localement euclidiennes (connues en général sous le noms d'instantons gravitationnels) ont été classifiées par P. Kronheimer dans [37].

Passée l'exigence topologique qui assure un homéomorphisme entre un voisinage de l'infini dans M et dans le modèle, le sens de *fortement asymptotique* varie assez sensiblement avec le modèle choisi, bien que la philosophie reste la même. Dans le cas euclidien, on demande à la différence entre les deux métriques de tendre vers zéro à l'infini plus vite que r^{-n+2} (ainsi que pour les deux premières dérivées), hypothèse que l'on peut écrire de manière précise en employant les espaces à poids déjà évoqués ; dans les cas hyperboliques, l'échelle des fonctions de référence est donnée par les $e^{-\beta r}$ ($\beta \in \mathbb{R}$) et la décroissance critique est $\beta = n + 1$ pour le cas réel, $\beta = 2m + 2$ dans le cas complexe. Dans cette dernière situation, on demande également aux structures complexes de vérifier une condition analogue de proximité à l'infini.

Cet énoncé rassemble des contributions venues d'horizons très divers : le lecteur aura reconnu la version de Witten du théorème de la masse positive [54] ; l'analogue hyperbolique réel est dû dans un cadre relativiste à O. Reula et K.P. Tod [44] et dans un cadre riemannien à M. Min-Oo [42], dont une version parfaitement correcte est donnée par [39] (le poids critique est faux dans l'article original de Min-Oo, voir [17]) ; le cas des quotients est dû à L. Andersson et M. Dahl [1, 16]. Enfin le cas complexe peut être trouvé dans [31].

La démonstration de l'ensemble de ces résultats repose sur la méthode de Witten. Il est donc temps d'en dire quelques mots.

L'argument spinoriel se fonde sur la formule de Lichnerowicz [40] qui relie l'opérateur de Dirac $\mathscr{D}$ sur les spineurs au laplacien brut $D^* D$ de la connexion de Levi-Civita :

$$\mathscr{D}^* \mathscr{D} = D^* D + \frac{1}{4}\,\mathrm{Scal}\,.$$

Witten a alors remarqué que, lorsque cette formule, évaluée contre un spineur *asymptotiquement constant*, est intégrée sur des domaines de plus en plus grands, le terme de bord tend vers un multiple de la masse à l'infini. Plus précisément, on obtient

$$4\pi\left(\lim_{\infty}|\psi|^2\right)m=\int_M|D\psi|^2+\int_M\mathrm{Scal}\,|\psi|^2-\int_M|\mathscr{D}\psi|^2.$$

La positivité de la masse est alors immédiate si l'on sait démontrer l'existence d'un spineur harmonique (c'est-à-dire annulé par $\mathscr{D}$) et tendant vers une constante à l'infini. Le cas d'égalité s'obtient aussi aisément en remarquant que la nullité de la masse entraîne que le spineur est parallèle, ce qui implique que la courbure de Ricci est nulle. Le cas limite de l'estimation classique du volume due à Bishop, conjuguée au caractère asymptotiquement plat, fait le reste : si $v(r)$ est le volume de la boule euclidienne de rayon r, la condition de courbure implique que la fonction

$$\frac{\mathrm{vol}\,B_o(r)}{v(r)}$$

est décroissante et tend vers 1 quand r tend vers 0, alors que le caractère asymptotiquement plat assure que la limite est également 1 si r tend vers l'infini. Elle est donc constante, et la variété ne peut être que l'espace euclidien.

La démonstration des résultats de rigidité évoqués ci-dessus repose alors sur trois éléments : la recherche, sur le modèle, de champs de spineurs privilégiés, c'est-à-dire parallèles pour une connexion modifiée $\hat{\nabla}$ et caractéristiques du modèle ; la mise en évidence d'une formule de Weitzenböck adaptée reliant sur toute variété riemannienne la connexion modifiée $\hat{\nabla}$ à un opérateur de type Dirac $\hat{\mathscr{D}}$ et à un terme $\mathscr{R}$ faisant intervenir la différence entre la courbure scalaire et celle du modèle ; la preuve de l'existence de spineurs harmoniques pour cet opérateur de Dirac et asymptotes aux spineurs modèles. Une fois ces points acquis, la démonstration générale se déroule sans heurts : si ψ est un spineur obtenu par la dernière procédure, la formule de Weitzenböck, une fois intégrée, produit

$$\begin{aligned}\int_M|\hat{\nabla}\psi|^2+\int_M<\mathscr{R}\psi,\psi>-\int_M|\hat{\mathscr{D}}\psi|^2&=\int_M|\hat{\nabla}\psi|^2+\int_M<\mathscr{R}\psi,\psi>\\&=\text{une contribution de bord à l'infini.}\end{aligned}$$

Sous l'hypothèse de forte asymptoticité, le terme de bord est nul (la « masse » est nulle) et le spineur est donc parallèle pour $\hat{\nabla}$, ce qui est caractéristique du modèle.

Des trois étapes évoquées plus haut, les deux premières sont celles qui demandent le plus de travail. La troisième n'est en général qu'une application directe du lemme de Lax-Milgram, la coercivité de l'opérateur de Dirac modifié étant fournie précisément par la formule de Weitzenböck et la condition sur la courbure scalaire, puisque, pour tout champs de spineurs φ à support compact, elle entraîne

$$\int_M|\hat{\mathscr{D}}\varphi|^2=\int_M|\hat{\nabla}\varphi|^2+\int_M<\mathscr{R}\varphi,\varphi>\geqslant\int_M|\hat{\nabla}\varphi|^2.$$

Les spineurs modèles utilisés sont les spineurs *parallèles* dans le cas euclidien, les spineurs *de Killing imaginaires* dans les cas hyperbolique réel, *i.e.* solutions de l'équation différentielle

$$D_X\psi + iX\cdot\psi = 0,\ \ \forall X \in TM,$$

et enfin les spineurs *de Killing kähleriens imaginaires* dans le cas hyperbolique complexe, c'est-à-dire solutions de

$$D_X\psi + iX\cdot\psi - (-1)^n JX\cdot\bar{\psi} = 0$$

(dans les deux dernières équations, D est la connexion de Levi-Civita sur le fibré des spineurs, $\cdot$ est le produit de Clifford et dans la dernière J est la structure complexe et $\bar{\psi}$ désigne le conjugué du spineur ψ, une opération qui existe sur toute variété de dimension réelle paire). Les spineurs de Killing kähleriens imaginaires n'existent qu'en dimension complexe impaire, ce qui explique la restriction de dimension dans le théorème 3.1. Alors que les variétés admettant des spineurs des deux premières catégories sont classifiées, celles admettant des spineurs de Killing kähleriens imaginaires ne sont toujours pas connues de manière complète et [31] caractérise l'espace hyperbolique complexe comme seule variété qui porte un espace de dimension maximale de tels champs spinoriels. Les formules de Weitzenböck sont d'origine diverse : classique dans le cas riemannien de la preuve de Witten (mais pas dans son extension à la situation relativiste, c'est-à-dire à la forme physique de la masse positive), franchement originale dans tous les cas hyperboliques.

À l'exception de la restriction dimensionnelle déjà commentée dans le cas complexe, les autres hypothèses sont optimales et l'on dispose notamment d'exemples de variétés qui sont d'Einstein et (faiblement) asymptotes aux modèles.

Les résultats de rigidité apportent ainsi un éclairage intéressant à un problème maintenant classique portant sur les variétés d'Einstein. À l'instar de l'espace hyperbolique réel, les variétés à courbure négative possèdent toutes un *bord à l'infini* muni d'une structure conforme. Il est alors naturel de se demander quelles structures conformes sur une variété compacte sont bords à l'infini d'une métrique d'Einstein complète et à courbure scalaire négative. C. R. Graham et J. Lee ont démontré qu'il existait une correspondance univoque entre un voisinage de la sphère ronde (conforme) et un voisinage de la métrique hyperbolique [23] dans l'espace des métriques d'Einstein. O. Biquard a considérablement étendu cette analyse en incluant dans les bords à l'infini possibles les métriques de Carnot-Carathéodory modelées sur les structures CR à l'infini des espaces hyperboliques complexe, quaternionien et octonionien, démontrant ainsi l'existence de nombreuses métriques d'Einstein asymptotiques à ces modèles sur la boule [12, 13]. Il obtient à son tour une correspondance univoque entre un voisinage de la structure CR standard à l'infini et un voisinage de la métrique standard des espaces symétriques non-compacts de rang 1. Les rigidités citées plus haut fournissent quant à elles un résultat d'unicité *globale* des métriques hyperboliques : aucune autre métrique d'Einstein, même fort éloignée de la structure standard à l'intérieur, ne peut lui être fortement asymptote (et donc avoir même infini conforme).

Signalons aussi que l'étude du problème de Yamabe non compact permet une interprétation similaire de nos résultats de rigidité (voir par exemple [4, 5, 17]).

En ce qui concerne directement les théorèmes de rigidité, de nombreuses questions restent ouvertes : le cas des quotients est encore largement inexploré, mais la méthode spinorielle y atteint ses limites : en-dehors des cas traités par L. Andersson et M. Dahl (et précisément choisis pour cette raison), les modèles ne semblent pas porter de champs de spineurs privilégiés. Dans le cas complexe, la restriction sur la dimension due à l'emploi de cette même méthode apparaît très artificielle, comme l'est peut-être aussi l'exigence de kählerianité. Enfin l'espace hyperbolique quaternionien reste à considérer. Si l'on se restreint à la catégorie des métriques quaternion-kähleriennes (comme on s'est restreint, pour le moment, aux kähleriennes dans le cas complexe), un premier obstacle réside dans la difficulté à mettre en évidence des déformations non triviales, à même holonomie et asymptotes (au moins faiblement) au modèle, afin de s'assurer que l'on ne se trouve pas en quête d'un énoncé vide. Dans le cas octonionien, enfin, il est connu que toute métrique à holonomie Spin_9 est localement symétrique.

4. La masse retrouvée.

Revenons maintenant au cadre asymptotiquement plat. Si le théorème de la masse positive est désormais une donnée familière, bien peu de choses supplémentaires sont comprises sur la façon dont la géométrie contrôle son comportement. Rappelons ainsi qu'on ne connaît toujours pas de manière complète les conditions de validité du théorème pour les variétés dont la topologie est non-triviale à l'infini. Dans un autre ordre d'idées, il apparaît naturel de rechercher des inégalités plus fortes que la simple positivité.

La plus intéressante est sans doute celle proposée par R. Penrose en 1973 [43] : selon celle-ci, la masse d'une variété asymptotiquement plate de dimension 3 qui contient une 2-sphère minimale compacte (et qui satisfait aux hypothèses du théorème de la masse positive) doit être supérieure ou égale au quart de la racine carrée de l'aire de cette surface divisée par π, l'égalité n'étant possible que pour une tranche d'espace standard dans l'espace de Schwarzschild. La conjecture de Penrose est un énoncé de type « *gap-theorem* » qui impose à toute variété à courbure scalaire positive suffisamment différente de l'espace euclidien (qui ne contient pas de surface minimale compacte) d'avoir une masse non seulement strictement positive mais aussi notablement éloignée de zéro. L'intérêt physique de la conjecture est également évident : elle équivaut à dire que l'espace-temps qui contient un trou noir et qui a la plus petite masse possible ne peut-être que statique et doit donc être celui de Schwarzschild.

Il est connu depuis longtemps que l'inégalité de Penrose ne peut être vraie qu'à condition de ne considérer que l'aire de la surface la plus extérieure (*outermost* en anglais) des surfaces minimales contenues dans la variété, celle qui correspond précisément à l'*horizon apparent* du trou noir (l'aire de celle-ci est alors directement reliée à l'entropie), et G. Huisken et T. Ilmanen ont récemment prouvé la véracité de la conjecture avec cette hypothèse supplémentaire [33] :

THÉORÈME 4.1. — *Soit (M, g) est une variété asymptotiquement plate de dimension 3 à courbure scalaire positive, ayant pour bord une sphère minimale S et ne contenant pas d'autres surfaces minimales. Alors sa masse m, si elle est définie, vérifie*

$$m \geqslant \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\mathrm{Aire}(S)}{\pi}}.$$

De plus le cas d'égalité n'est vérifié que si M est isométrique à une tranche d'espace de la métrique de Schwarzschild, c'est-à-dire à

$$\left(\mathbb{R}^3 \setminus B_0(\frac{m}{2}), (1 + \frac{m}{2r})^4 \,\mathrm{eucl}\right).$$

Il est néanmoins en général difficile d'obtenir des informations sur la sphère minimale la plus extérieure. La localiser peut déjà s'avérer une tâche très ardue. Si l'on dispose déjà d'une sphère minimale, il est alors naturel de chercher une borne inférieure à la masse ne faisant intervenir que des informations portant sur cette surface minimale. Se placer dans cette optique conduit au résultat suivant, démontré en fait dans [30] à une période où une preuve de la conjecture de Penrose n'était pas encore disponible.

On pose pour toute surface compacte plongée dans une variété asymptotiquement plate de dimension 3 découpant M en deux composantes connexes, l'une bornée et l'autre non bornée (cette dernière notée M_0) :

$$\sigma(S) = \sqrt{\frac{\mathrm{Aire}(S)}{\pi}}\left(\inf_{f\in C_c^\infty} \frac{\int_{M_0} |df|^2}{\int_S f^2}\right).$$

A normalisation près, il s'agit de l'inverse de la norme de l'application trace qui envoie l'espace C_c^∞ des fonctions continues à support compact, muni de la norme de Sobolev $\|df\|_{L^2(M_0)}$, dans $L^2(S)$. Elle est donc strictement positive par nature. Elle s'interprète de manière particulièrement agréable comme la première valeur propre non triviale (à normalisation près) du problème dit *de Stekloff*:

$$\Delta u = 0 \text{ sur } M_0, \ \frac{\partial u}{\partial n} + \lambda u = 0 \text{ sur } S.$$

Il est à remarquer que ce problème pourtant classique dans $\mathbb{R}^n$ [7] n'a pour l'instant que très peu attiré l'attention des géomètres riemanniens. A l'exception notable (et récente !) de [19], aucun contrôle de σ en fonction d'autres invariants géométriques n'est connu à l'heure actuelle.

Le résultat obtenu dans [30] peut alors s'énoncer :

THÉORÈME 4.2. — *Si (M, g) est une variété asymptotiquement plate de dimension* 3 *à courbure scalaire positive, ayant pour bord une sphère minimale S, alors sa masse m, si elle est définie, vérifie*

$$m \geqslant \frac{\sigma(S)}{2 + 2\sigma(S)}\sqrt{\frac{\mathrm{Aire}(S)}{\pi}}.$$

De plus le cas d'égalité n'est vérifié que si M est isométrique à une tranche d'espace de la métrique de Schwarzschild.

Il faut noter que les constantes σ précédemment définies sont invariantes par changement d'échelle, de sorte que la valeur précise de l'aire de S ne joue un rôle que dans le terme semblable à l'inégalité de Penrose.

Comme il existe une généralisation de la conjecture de Penrose en dimension supérieure ou égale à 4 (non démontrée à l'heure actuelle), il existe une généralisation de ce résultat en dimensions supérieures, mais qui diverge de la conjecture. Il apparaît en effet dans l'inégalité un élément supplémentaire, l'invariant de Yamabe de la structure conforme induite par la métrique sur l'hypersurface S [28].

THÉORÈME 4.3. — *Si (M, g) est une variété asymptotiquement plate de dimension n à courbure scalaire positive, ayant pour bord une hypersurface minimale S à invariant de Yamabe $Y(S)$ strictement positif, alors il existe une constante C strictement positive, explicite, dépendant de σ et $Y(S)$, telle que la masse m, si elle est définie, vérifie*

$$m \geqslant C \operatorname{vol}(S)^{\frac{n-2}{n-1}}.$$

De plus, le cas d'égalité entraîne que (M, g) est isométrique à

$$\left(\mathbb{R}^n \setminus B_0(R), (1 + R^{n-2}r^{-n+2})^{4/(n-2)} \operatorname{eucl}\right),$$

avec $(n-1)\omega_n R^{n-2} = 4\pi m$.

Nous décrivons maintenant la démonstration du résultat en dimension 3, renvoyant le lecteur à [28] pour le cas général (proche). Elle repose avant tout sur une étude précise du cas d'égalité : celui-ci fait ressortir le rôle joué par la métrique euclidienne, dont la masse est nulle, et qui est la seule métrique à courbure scalaire nulle dans laquelle la sphère S est à courbure moyenne constante égale à

$$4\sqrt{\frac{\pi}{\operatorname{Aire}(S)}}.$$

La preuve suit alors le cours suivant : on déforme notre métrique d'origine en une métrique conforme $\bar{g}$ qui est à courbure scalaire nulle et dont la courbure moyenne de S vérifie exactement (dans la métrique $\bar{g}$) l'égalité précédente. Un calcul direct livre alors que la différence entre la masse de g et celle de $\bar{g}$ est minorée par la constante annoncée. Il reste à exhiber pour $\bar{g}$ un théorème de masse positive, obtenu par la méthode de Witten, pour la partie non bornée M_0. La subtilité provient de l'apparition, lors de l'intégration de la formule de Weitzenböck, de termes de bord sur S contenant l'opérateur de Dirac de celle-ci. Il est alors possible de contrôler son signe en faisant appel aux travaux de C. Bär et O. Hijazi sur la première valeur propre λ_1 de l'opérateur de Dirac sur les sphères [9, 32] qui démontrent que

$$|\lambda_1| \geqslant 2\sqrt{\frac{\pi}{\operatorname{Aire}(S)}}.$$

La conclusion suit immédiatement du bon choix de $\bar{g}$, pour laquelle la courbure moyenne de S est exactement égale à

$$4\sqrt{\frac{\pi}{\mathrm{Aire}(S)}}.$$

Il ne semble malheureusement pas possible de passer directement de ce résultat à une preuve spinorielle de l'inégalité de Penrose, *via* une minoration de la constante σ. P. Tod a mis en évidence une série d'exemples, issus des métriques de Reissner-Nordström (une famille particulière de solutions des équations de la relativité générale), dont la masse est uniformément minorée alors que leurs constantes σ tendent vers zéro [51] (voir aussi [41]). Par ailleurs, aucun moyen de modifier la preuve précédente pour la spécialiser à la surface minimale la plus extérieure n'a pour l'instant été trouvé.

La preuve de G. Huisken et T. Ilmanen utilise une toute autre méthode, qui se fonde sur la définition de la masse due à S. Hawking, R. Geroch, P. S. Jang et R. Wald et décrite au début de ce texte. Ils étudient le comportement de la quantité

$$Q_t = \frac{\sqrt{\mathrm{Aire}(S_t)}}{64\pi^{3/2}}\left(16\pi - \int_{S_t} H^2\right)$$

calculée sur une famille de plongements $F_t : S^2 \longrightarrow M$, d'images S_t, obtenues par le flot de la courbure moyenne inverse

$$\frac{d}{dt}F_t(q) = -\frac{1}{H_t(F_t(q))}\nu_t(F_t(q))$$

où H_t est la courbure moyenne et ν_t la normale extérieure unitaire au point $F_t(q)$. Il est aisé de prouver (c'est la remarque originale de Geroch) qu'en dimension 3, tant que le flot est lisse, la quantité définie plus haut est croissante en t. Le travail de G. Huisken et T. Ilmanen consiste à démontrer que les surfaces produites par l'évolution sont asymptotes, pour t grand, à des sphères rondes (ce qui indique que la limite de Q_t est bien la masse), et surtout à étudier les discontinuités éventuelles (et inévitables) de l'évolution, ce qui la stoppe irrémédiablement. En étant très schématique, il faut alors faire « sauter » la surface S_t à une nouvelle position, pour laquelle l'évolution peut reprendre, sans pour autant perdre la monotonie de Q_t. Ces résultats sont obtenus au prix d'un très gros investissement technique, en particulier en théorie de la mesure géométrique. Notons enfin que leurs techniques fournissent également, dans le cas où le bord est vide, une nouvelle preuve du théorème de la masse positive en dimension 3.

Les deux approches précédentes ne s'étendent malheureusement pas de façon satisfaisante au cas où le bord possède plusieurs composantes connexes (chacune étant une sphère minimale). Elles conduisent en effet à borner inférieurement la masse par la plus grande des aires de toutes les sphères, alors que l'on s'attend à trouver un minorant fabriqué par combinaison linéaire des contributions de chaque composante. Nous ne possédons pas à l'heure actuelle une idée claire de ce que devrait être la généralisation de l'inégalité de Penrose dans cette situation. En utilisant des techniques de minimisation proches de celles de Huisken et Ilmanen, H. Bray [15] a néanmoins récemment démontré que, dans le cas où le bord est composé d'un nombre fini k de sphères minimales d'aires respectives $A_1, \ldots, A_k$,

$$m \geqslant \left(\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{A_i}{16\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} .$$

5. Quelques mots de conclusion

L'histoire de la masse est probablement loin d'être entièrement écrite. Une démonstration de la masse positive valable sans hypothèse topologique ou dimensionnelle manque toujours. On souhaiterait une vision plus claire des théorèmes de rigidité associés aux espaces symétriques ainsi que du cas des quotients. Et si l'inégalité de Penrose a aujourd'hui trouvé une preuve, nous en attendons toujours une par la méthode de Witten ainsi qu'une généralisation aux dimensions supérieures. Remplacer la sphère minimale par une surface de genre quelconque fait également aussitôt entrer dans l'inconnu. Si la surface est stable, elle ne peut être qu'une sphère ou un tore [48]. Dans ce dernier cas, la seule information tangible dont nous disposons consiste en des exemples dus à G. Galloway et M. Cai qui semblent montrer que la masse ne peut être très petite dans cette situation [20].

On ne sait également absolument pas prédire quelle est la plus petite masse possible d'une métrique sur une variété à bout infini difféomorphe à l'espace euclidien mais dont la topologie non-triviale ou dont la structure est fixée sur un sous-ensemble intérieur. Des résultats dans cette direction auraient des répercussions non seulement mathématiques (précisant le contenu géométrique ou topologique de la masse) mais aussi physiques (donnant du poids à la définition proposée par R. Bartnik d'une masse quasilocale en relativité [11]). Nous ne possédons que l'observation suivante, faite dans l'article de G. Huisken et T. Ilmanen : si Ω est un domaine, muni d'une métrique riemannienne, alors il existe une borne inférieure (dépendant de Ω) strictement positive à la masse de toute extension asymptotiquement plate à courbure scalaire positive de Ω.

Enfin, pour aller au delà et pour conclure, d'autres conjectures issues de la physique, attendent toujours de voir leur véracité infirmée ou confirmée, ou même leur énoncé mathématiquement précisé (conjecture du « lacet » –« hoop conjecture » en anglais– de Thorne [50] par exemple) De nombreux territoires restent donc largement inexplorés.

Remerciements. L'auteur tient à remercier les collègues grenoblois pour leur invitation au séminaire qui a donné à ce texte l'occasion de naître. Un grand merci aussi à Olivier Biquard, Piotr Chruściel et Jacques Lafontaine qui en ont fait une lecture attentive et m'ont suggéré de nombreuses et utiles améliorations.

Bibliographie

[1] L. ANDERSSON and M. DAHL, *Scalar curvature rigidity for asymptotically locally hyperbolic manifolds*, Ann. Glob. Anal. Geom. **16** (1998), 1–27.

[2] R. ARNOWITT, S. DESER and C. W. MISNER, *Coordinate invariance and energy expressions in General Relativity*, Phys. Rev. **122** (1961), 997–1006.

[3] T. AUBIN, *Équations différentielles non-linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire*, J. Math. Pures Appl. **55** (1976), 269–296.

[4] P. AVILES and R. MCOWEN, *Conformal deformation of complete manifolds with negative curvature*, J. Diff. Geom. **21** (1985), 269–281.

[5] ______, *Conformal deformation to constant negative scalar curvature on noncompact riemannian manifolds*, J. Diff. Geom. **27** (1988), 225–239.

[6] A. BAHRI and H. BREZIS, *Équations elliptiques non-linéaires sur des variétés avec exposant de Sobolev critique*, C. R. Acad. Sci. Paris **307** (1988), 573–576.

[7] C. BANDLE, *Isoperimetric inequalities*, Pitman, London, 1980.

[8] S. BANDO, A. KASUE, and H. NAKAJIMA, *On a construction of coordinates at infinity on manifolds with fast curvature decay and maximal volume growth*, Invent. math. **97** (1989), 313–349.

[9] C. BÄR, *Lower eigenvalues estimates for Dirac operators*, Math. Ann. **293** (1992), 39–46.

[10] R. BARTNIK, *The mass of an asymptotically flat manifold*, Commun. Pure. Appl. Math. **39** (1986), 661–693.

[11] ______, *New definition of quasi-local mass*, Phys. Rev. Lett. **62** (1989), 2346–2348.

[12] O. BIQUARD, *Métriques d'Einstein asymptotiquement symétriques*, École Polytechnique (1997), preprint.

[13] ______, *Einstein deformations of hyperbolic metrics*, École Polytechnique (1998), preprint.

[14] J.-P. BOURGUIGNON, *Stabilité par déformation non-linéaire de la métrique de Minkowski*, Sém. Bourbaki n° 740, Astérisque, vol. 201-203, Soc. math. France, 1991.

[15] H. BRAY, *Ph. D thesis*, Stanford University, 1997.

[16] M. DAHL, *The positive mass argument for ALE and ALH manifolds*, Mathematics of Gravitation, Banach Center Publ., vol. 41, 1997, pp. 133–142.

[17] E. DELAY, *Analyse précisée d'équations semi-linéaires elliptiques sur l'espace hyperbolique et application à la courbure scalaire conforme*, Bull. Soc. Math. Fr. **125** (1997), 345–381.

[18] V. DENISOV and O. SOLOVEV, *The energy determined in General Relativity on the basis of the traditional Hamiltonian approach does not have physical meaning*, Theor. Math. Phys. **56** (1983), 832–838, english translation.

[19] J. ESCOBAR, *The geometry of the first non-zero Stekloff eigenvalue*, J. Funct. Anal. **150** (1997), 544–556.

[20] G. GALLOWAY, private communication.

[21] R. GEROCH, *Energy extraction*, Ann. N. Y. Acad. Sci. **224** (1973), 108–117.

[22] ______, *General relativity*, in Differential geometry, Proc. Symp. Pure Math., vol. 27, Amer. Math. Soc., 1975.

[23] C. R. Graham and J. Lee, *Einstein metrics with prescribed conformal infinity on the ball*, Adv. Math. **87** (1991), 186–225.

[24] R. Greene, P. Petersen and S. Zhu, *Riemannian manifolds of faster-than-quadratic curvature decay*, Int. Math. Res. Notices **9** (1994), 363–377.

[25] L. Habermann and J. Jost, *Green functions and conformal geometry, I and II*, MPI Leipzig (1997), preprint.

[26] S. Hawking, *Gravitational radiation in an expanding universe*, J. Math. Phys. **9** (1968), 598–604.

[27] S. W. Hawking and G.F.R. Ellis, *The large-scale structure of space-time*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1973.

[28] M. Herzlich, *Minimal surfaces, the Dirac operator and the Penrose inequality*, Actes de la table ronde A.L. Besse de géométrie pseudoriemannienne, Nancy, 1-6 Juin 1998, to appear.

[29] ———, *Métriques privilégiées dans la classe conforme d'une variété asymptotiquement plate, et applications*, C. R. Acad. Sci. Paris **323** (1996), 287–292.

[30] ———, *A Penrose-like inequality for the mass of Riemannian asymptotically flat manifolds*, Commun. Math. Phys. **188** (1997), 121–133.

[31] ———, *Scalar curvature and rigidity for odd-dimensional complex hyperbolic spaces*, Math. Annalen (1998), to appear.

[32] O. Hijazi, *Première valeur propre de l'opérateur de Dirac et nombre de Yamabe*, C. R. Acad. Sci. Paris **313** (1991), 865–868.

[33] G. Huisken and T. Ilmanen, *The Riemannian Penrose inequality*, Int. Math. Res. Not. **20** (1997), 1045–1058.

[34] P. S. Jang and R. Wald, *The positive energy conjecture and the cosmic censor hypothesis*, J. Math. Phys. **18** (1977), 41–44.

[35] A. Kasue, *A compactification of a manifold with asymptotically nonnegative curvature*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. Paris **21** (1988), 593–622.

[36] J. Kazdan, *Positive energy in general relativity*, Sém. Bourbaki n° 593, Astérisque, vol. 92-93, Soc. math. France, 1982.

[37] P. B. Kronheimer, *A Torelli type theorem for gravitational instantons*, J. Diff. Geom. **29** (1989), 685–697.

[38] J. Lee and T. H. Parker, *The Yamabe problem*, Bull. Amer. Math. Soc. **17** (1987), 37–91.

[39] M. C. Leung, *Pinching theorem on asymptotically hyperbolic spaces*, Int. J. Math. **5** (1993), 841–857.

[40] A. Lichnerowicz, *Spineurs harmoniques*, C. R. Acad. Sci. Paris **257** (1963), 7–9.

[41] E. Malec and K. Roszkowski, *Comment on Herzlich's proof of the Penrose inequality*, Jagiellon Univ, Krakow (1998), preprint, gr-qc 9806035.

[42] M. Min-Oo, *Scalar curvature rigidity of asymptotically hyperbolic spin manifolds*, Math. Ann. **285** (1989), 527–539.

[43] R. Penrose, *Naked singularities*, Ann. N. Y. Acad. Sci. **224** (1973), 125–134.

[44] OO. Reula and K. P. Tod, *Positivity of the Bondi energy*, J. Math. Phys. **25** (1984), 1004–1008.

[45] R. Schoen, *Conformal deformation of a Riemannian manifold to constant scalar curvature*, J. Diff. Geom **20** (1984), 479–495.

[46] ———, *Variational theory for the total scalar curvature functional for Riemannian metrics and related topics*, Topics in Calculus of Variations (M. Giaquinta, ed.), Lect. Notes in Math., vol. 1365, Springer, 1989, pp. 121–154.

[47] R. Schoen and S. T. Yau, *On the proof of the positive mass conjecture in General Relativity*, Commun. Math. Phys **65** (1979), 45–76.

[48] ———, *On the structure of manifolds with positive scalar curvature*, Manuscripta math. **28** (1979), 159–183.

[49] ———, *Conformally flat manifolds, Kleinian groups and scalar curvature*, Invent. Math. **92** (1988), 47–71.

[50] K. S. Thorne, *Magic without magic*, Freeman, San Francisco, 1972.

[51] P. Tod, private communication.

[52] N. Trudinger, *Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **22** (1968), 265–274.

[53] S. Unnebrink, *Asymptotically flat four-manifolds*, Diff. Geom. Appl. **6** (1996), 271–274.

[54] E. Witten, *A new proof of the positive energy theorem*, Commun. Math. Phys. **80** (1981), 381–402.

[55] H. Yamabe, *On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, Osaka Math. J. **12** (1960), 21–37.

Marc HERZLICH
Département de Mathématiques
cnrs upresa 5030
Université Montpellier II
MONTPELLIER (France)
E-mail: herzlich@math.univ-montp2.fr