Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Yves Colin de Verdière

Minorations de sommes de valeurs propres d'un domaine et conjecture de Polya

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 3 (1984-1985), exp. nº 6, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1984-1985__3__A6_0>

MINORATIONS DE SOMMES DE VALEURS PROPRES D'UN DOMAINE ET CONJECTURE DE POLYA

par Yves COLIN DE VERDIERE

Soit Ω un domaine d'une variété riemannienne X tel que le spectre du laplacien avec conditions de Dirichlet sur Ω soit discret, on introduit les fonctions : $Z_\Omega(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-t\lambda_i}$ $(t > 0)$, $N_\Omega(\lambda) = \#\{\lambda_i \leq \lambda\}$ et $S_k(\Omega) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$ où $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots$ désigne le spectre du laplacien avec conditions de Dirichlet sur Ω .

On s'intéresse à des majorations de Z_Ω , N_Ω et à des minorations de S_k , ainsi qu'à l'estimation asymptotique de ces fonctions lorsque Ω est grand.

Le minimax donne les estimations triviales $\lambda_i(\Omega) \geq \lambda_i(X)$, mais ces estimations ne sont pas très intéressantes lorsque X a un spectre continu (typiquement $X = \mathbb{R}^n$) . Pour ce qui est de $Z_\Omega(t)$, on peut, en utilisant son expression à partir du mouvement brownien sur X , le majorer par $\int_\Omega e(t,x,x)dx$ où e est le noyau de la chaleur sur X .

Pour utiliser commodément l'information spectrale sur X , on introduit d'abord la densité d'état.

1. - DENSITE D'ETAT.

On associe à Δ une mesure de sur $X \times \mathbb{R}$ portée par $X \times$ Spectre(X) , la densité d'état, dont la propriété intuitive cherchée est la suivante :

$$\text{si} \quad \Omega \subset X \quad \text{est grand,} \quad N_\Omega(\lambda_0) \sim \int_{-\infty}^{\lambda_0} \int_\Omega de(x, \lambda) .$$

Comme on ne peut pas prendre ceci comme définition, cela deviendra éventuellement un théorème en précisant en quel sens Ω doit être grand, le sens intuitif est que les effets de bord doivent être négligeables (longueur $(b\Omega) \ll$ aire (Ω), etc...)

DEFINITION. <u>Pour</u> $f \in C_0^\infty(X)$, $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, <u>on pose</u>

$$\int_{X \times \mathbb{R}} f(x)\, g(\lambda)\, de(x, \lambda) = \mathrm{Tr}(f(x) \circ g(\Delta)) .$$

Il faut vérifier que

1) $f(x)\, g(\Delta)$ est à trace : cela est trivial car le noyau $[g(\Delta)](x,y)$ est C^∞ et donc $f(x)\, g(\Delta)$ est à trace ;

2) $de(x, \lambda)$ est une mesure positive, car $\mathrm{Tr}(f(x)g(\Delta)) \geq 0$ si f et g sont ≥ 0, en effet dans ce cas : $[g(\Delta)](x, x) \geq 0$ comme limite de $\langle g(\Delta)\delta_\epsilon | \delta_\epsilon \rangle$ où δ_ϵ converge vers Dirac en x ;

3) $de(x, \lambda)$ est portée par $X \times \mathrm{Sp}(\Delta)$: évident ;

4) $de(x, \lambda)$ est C^∞ par rapport à x, dans le sens suivant,

$\int f(x, \lambda)\, de(x, \lambda) = \int_X \int_{\mathbb{R}} f(x, \cdot)\nu_x(\lambda)\, dx$ où $x \mapsto \nu_x$ est C^∞ de X dans $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ [au sens faible]. Evident :

$\int f(\lambda)\nu_x(\lambda) = [f(\Delta)](x, x)$ et ce noyau est C^∞ ;

5) si X est homogène au sens que $\mathrm{Isom}(X)$ est transitif, on a : $de(x, \lambda) = d\nu(\lambda) \otimes dx$, on peut aussi donner à $d\nu(\lambda)$ le nom de densité spectrale ;

6) si $e(t, x, y)$ est le noyau de la chaleur sur X, on a : $\int_{\mathbb{R}} e^{-t\lambda}\, d\nu_x(\lambda) = e(t, x, x)$: $e(t, x, x)$ est la transformée de Laplace de $d\nu_x(\lambda)$;

7) si on a une transformation de Fourier explicite, on peut en déduire $de(x,\lambda)$:

Exemple 1. Si le spectre de X est discret,

$$de(x,\lambda) = \sum_{\lambda \in Sp(X)} [P_\lambda](x,x)\, dx \otimes \delta(\lambda)$$

où $[P_\lambda]$ est le noyau du projecteur spectral sur E_λ . Par exemple, si X est homogène compacte et $n_\lambda = \dim(E_\lambda)$, on a :

$$[P_\lambda](x,x) = \frac{1}{\mathrm{vol}(X)} \sum_{\lambda \in Sp(X)} n_\lambda\, \delta(\lambda) .$$

Exemple 2. Si on a $\mathfrak{F} : L^2(X,dx) \to L^2([\lambda_0, +\infty[\, , \mathcal{H}, d\lambda)$ où $\mathcal{H}$ est un Hilbert auxiliaire et $m_\lambda \circ \mathfrak{F} = \mathfrak{F} \circ \Delta_X$, on a :

$$(\mathfrak{F}f)(\lambda) = \int f(x)\, \vec{\varphi}(x,\lambda)\, dx$$

et

$$(\mathfrak{F}^{-1}\vec{g})(x) = \int \langle g(\lambda) \,|\, \vec{\varphi}(x,\lambda)\rangle_{\mathcal{H}}\, d\lambda ,$$

on a alors :

$$[g(\Delta)](x,x) = \|\vec{\varphi}(x,\lambda)\|^2_{\mathcal{H}}\, d\lambda .$$

Exemple 3. Calcul dans le cas de $\mathbb{R}^n$: on peut le faire à partir du noyau de la chaleur :

$$\int e^{-t\lambda} \nu(\lambda) = e(t,x,x)$$

ou de la transformation de Fourier avec $\mathcal{H} = L^2(S^{n-1})$, on a :

$$d\nu(\lambda) = \frac{n}{2}\, \frac{\mathrm{vol}(B_n)}{(2\pi)^n}\, \lambda^{(n/2)-1}\, d\lambda .$$

On peut aussi l'obtenir par l'asymptotique du spectre pour les grands domaines $\Omega_r = r\Omega_1$ $N_{\Omega_r}(\lambda) = N_{\Omega_1}(\lambda r^2)$: l'asymptotique $r \to \infty$ est donc l'asymptotique de Weyl.

Exemple 4. Cas du demi-plan de Poincaré.

La théorie de Selberg ([HL]) montre que, si $k(z,z') = \Phi\left(\frac{|z-z'|^2}{yy'}\right)$ est un noyau ne dépendant que de la distance hyperbolique de z à z' et si φ est une fonction propre du laplacien dans le demi-plan de Poincaré $((\Delta-\lambda)\varphi = 0)$, on a : $\int_H k(z,z')\varphi(z')\,dz' = H(\lambda)\,\varphi(z)$ où $H(\lambda)$ ne dépend pas de φ , et Selberg donne des formules explicites reliant Φ à H ; il suffit de déterminer $k(z,z) = \Phi(0)$ en fonction de H ; la formule est

$$k(z,z) = \frac{1}{4\pi}\int_{1/4}^{+\infty} H(\lambda)\,\mathrm{th}\,\pi r\,d\lambda \quad \text{avec} \quad r = \sqrt{\lambda-(1/4)} \ .$$

D'après les définitions précédentes, on a :

$$d\nu(\lambda) = \frac{\mathrm{th}\,\pi r}{4\pi}\,d\lambda \quad \text{avec} \quad r = \sqrt{(\lambda-(1/4))_+} \ .$$

Remarque. On peut se demander d'où vient cette expression de la densité d'état ; on sait que les formules de Selberg s'interprètent en termes de décomposition en irréductibles de représentations de $SL_2(\mathbb{R})$ dans $L^2(SL_2(\mathbb{R})/\Gamma)$: on a pour les représentations des groupes la formule de Plancherel et $d\nu(\lambda)$ est reliée à la mesure de Plancherel qui est une mesure naturelle sur l'ensemble des représentations irréductibles de $SL_2(\mathbb{R})$.

Exemple 5. Le cas du champ magnétique constant dans $\mathbb{R}^2$.

Il s'agit de l'opérateur $H = X^2+Y^2$ avec $X = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}B_0 y$, $Y = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}B_0 x$. En fait, c'est le laplacien sur un fibré en droites complexes $\mathbb{R}^2\times\mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ muni d'une connexion $\nabla_{\partial/\partial x} = X$, $\nabla_{\partial/\partial y} = Y$: le spectre de H est formé d'une suite de valeurs propres

(1) $\quad E_n = |B_0|(2n+1)$, $(n = 0,1,2,\dots)$, chaque valeur propre étant de multiplicité infinie ; si $P_n(x,y)$ est le noyau du projecteur orthogonal sur E_n , on a : $de(x,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x,x)dx \otimes \delta_{E_n}$, on peut calculer de plus explicitement, car on connait le noyau de la chaleur ([A-H-S]) : $[e^{-tH}](x,x) = \frac{B_0}{4\pi\,\mathrm{sh}\,B_0 t}$: on en déduit que $P_n(x,x)$ est indépendant de x , ce qui était prévisible puisque la courbure est constante et :

$$P_n(x,x) = \frac{|B_0|}{2\pi} ;$$

(2) $$d\nu(\lambda) = \frac{|B_0|}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{E_n}$$

Effet de bord : ils sont plus petits qu'en l'absence de champ magnétique, car le noyau de la chaleur est plus petit.

On en déduit que, lorsque Ω tend vers $\mathbb{R}^2$ (sans effet de bords), par exemple $\Omega_r = r\,\Omega_1$, on a, pour f continue par morceaux et à support compact :

$$\lim_{\Omega\to\mathbb{R}^2} \frac{\sum_k f(\lambda_k(\Omega))}{\mathrm{vol}\,\Omega} = \frac{|B_0|}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} f((2n+1)|B_0|) .$$

Le spectre de Ω se concentre sur la progression arithmétique de raison $2|B_0|$, avec une multiplicité approchée $\frac{|B_0|\,\mathrm{vol}\,\Omega}{2\pi}$. Ce résultat est à rapprocher des résultats sur les variétés à géodésiques toutes périodiques ; tout se passe comme si on avait des géodésiques périodiques de longueur $\frac{2\pi}{|B_0|}$, qui est effectivement la longueur des trajectoires de vitesse 1 (cercles) dans le champ magnétique constant : s'il n'y a pas d'effet de bords, la plupart des trajectoires sont de ce type.

[Cet exemple a été rédigé après l'exposé oral, suite à une remarque de J.-P. Demailly qui rencontre un problème de ce type dans l'étude des laplaciens complexes] .

2. - LA CONJECTURE DE POLYA.

On peut donner un énoncé général de cette conjecture :

$$N_\Omega(\lambda_0) \le \int_{-\infty}^{\lambda_0} \int_\Omega de(x,\lambda) .$$

Dans le cas d'un espace homogène, cela se traduit par :

$$N_\Omega(\lambda_0) \le \mathrm{vol}(\Omega) \int_{-\infty}^{\lambda_0} d\nu(\lambda) \ .$$

Si une telle majoration est correcte, elle est optimale pour les grands domaines d'après la définition intuitive de $de(x,\lambda)$. De cette majoration, on tire facilement, en testant pour $\lambda = \lambda_k$ une minoration de λ_k :

$$k/\mathrm{vol}\,\Omega \le \int_{-\infty}^{\lambda_k} d\nu(\lambda) \ .$$

A. Le cas euclidien.

Polya a démontré ce résultat si Ω est un domaine borné pouvant paver $\mathbb{R}^n$. Soit D_1 le disque unité, D_r le disque de rayon r et N_r le nombre de pavé $\subset D_r$, on a évidemment $\mathrm{vol}(\Omega) = \lim\limits_{r\to\infty} \frac{\mathrm{vol}(D_r)}{N_r}$. Par le minimax et $D_r \supset \bigcup\limits_{i\in J_r} \Omega_i$, où J_r est l'ensemble des pavés $\subset D_r$ ($\# J_r = N_r$) , on a :

$$N_r \cdot N_\Omega(\lambda) \le N_{rD_1}(\lambda) = N_{D_1}(r^2\lambda) \ .$$

Donc :

$$N_\Omega(\lambda) \le \frac{N_{D_1}(r^2\lambda)}{N_r} \quad \text{et} \quad r \to \infty \ ,$$

donc :

$$N_\Omega(\lambda) \le \mathrm{vol}\,\Omega \cdot \lim_{r\to\infty} \frac{N_{D_1}(r^2\lambda)}{r^n \mathrm{vol}(D_1)} \ ,$$

on conclut par l'asymptotique de Weyl.

Cette démonstration marche bien à cause de la relation $N_{rD_1}(\lambda) = N_{D_1}(r^2\lambda)$ qui est due au fait que les homothéties multiplient la métrique euclidienne par un facteur constant : ce n'est plus le cas pour la métrique hyperbolique où on est en présence de 2 asymptotiques distinctes : Ω fixé, $\lambda \to \infty$ et $\Omega \to H$, λ fixé .

B. <u>Le cas hyperbolique</u>.

Le problème des effets de bords devient alors redoutable car la longueur du bord d'un grand domaine hyperbolique est du même ordre de grandeur que l'aire de ce domaine. On doit travailler sur des variétés sans bord et plus précisément on introduit la définition suivante :

Soit Γ un sous-groupe discret cocompact de $PSL_2(\mathbb{R})$, on note $\mathrm{inj}(\Gamma)$ le rayon d'injectivité de $\Gamma\backslash H$ ($= 0$ si Γ a des points fixes), on dira qu'<u>une suite</u> $\Gamma_i\backslash H$ <u>converge au sens de Huber vers</u> H si on a : $\lim_{i\to\infty} \mathrm{inj}(\Gamma_i) = +\infty$ [cela implique la convergence au sens de Hausdorff pointé en tout $x_0 \in \Gamma_i\backslash H$ vers H] .

Huber a prouvé le remarquable résultat suivant ([HR]) : si $\Gamma_i\backslash H$ converge au sens de Huber vers H, on a : pour toute fonction f continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$ majoré par $e^{-a\lambda}$ $(a>0)$;

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\sum f(\lambda_k^i)}{\mathrm{vol}(\Gamma_i\backslash H)} = \int f(\lambda)\, d\nu(\lambda) .$$

En particulier : $\lim_{i\to\infty} \dfrac{N_i(\lambda_0)}{\mathrm{vol}(\Gamma_i\backslash H)} = \displaystyle\int_{1/4}^{\lambda_0} d\nu(\lambda)$. Ce résultat peut en fait se démontrer facilement à partir d'une estimation :

$$e_\Gamma(t,x,x) = e_H(t,x,x) + O\left(e^{-C\,\mathrm{inj}(\Gamma)/t}\right) \quad (C>0)$$

et le O est universel, ainsi que C . Cette estimation résulte de l'expression de e_Γ comme $\sum_\Gamma e_H(t,x,\gamma x)$ et d'une majoration universelle du nombre de points du réseau $\Gamma\cdot R_0$ dans une boule de rayon R .

Comment construire de telles suites ? L'exemple le plus simple est ce qu'on appelle une tour :

DEFINITION. <u>Une suite</u> $\ldots \subset \Gamma_{i+1} \subset \Gamma_i \subset \ldots \subset \Gamma_1 = \Gamma$ <u>est dite une tour si</u> $\forall i$, Γ_{i+1} <u>est distingué dans</u> Γ <u>et si</u> $\bigcap_{i=1}^{\infty} \Gamma_i = \{e\}$.

L'existence de tours n'est pas triviale, mais de l'article [B], on peut déduire : $\forall \Gamma \subset \mathrm{Isom}(H)$ et H/Γ compact, il existe une tour à partir de Γ.

Idée : si $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$, on peut prendre $\Gamma_i = \mathrm{Ker}(SL_2(\mathbb{Z}) \to SL_2(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}))$ où l'homomorphisme est l'homorphisme naturel.

On étend cette idée en utilisant des entiers d'un corps de nombres algébriques convenables.

De tout ceci, on peut déduire : si $\Gamma\backslash H$ compact et Ω est un domaine fondamental de Γ dans H, la conjecture de Polya est vraie pour Ω :

$$N_\Omega(\lambda_0) \leq \mathrm{vol}(\Omega) \int_{1/4}^{\lambda_0} d\nu(\lambda) \ .$$

(Ce résultat ne paraît pas être connu).

3. - INEGALITES DE LI-YAU.

On supposera pour simplifier que X est homogène dans ce paragraphe. $\Omega \subset X$, on désigne par $\widetilde{\varphi}_i$ les prolongées par 0 à X des fonctions propres du laplacien de Dirichlet sur Ω. Pour $k = 1, \ldots$, on désigne par P_k le projecteur de $L^2(X)$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{E}_k$ engendré par $\widetilde{\varphi}_1, \widetilde{\varphi}_2, \ldots, \widetilde{\varphi}_k$ et on introduit la mesure $d\nu_k(\lambda)$ définie par :

$$\int_{\mathbb{R}} g(\lambda)\, d\nu_k(\lambda) = \mathrm{Tr}(g(\Delta) \circ P_k) \ ,$$

où $g(\Delta)$ est calculé au sens de X. A priori $d\nu_k(\lambda)$ est seulement une mesure bornée car alors $g(\Delta) \circ P_k$ est un opérateur borné de rang fini, donc à trace. En fait on a un peu plus (voir (iii) : $\int_{\mathbb{R}} \lambda\, d\nu_k(\lambda) < +\infty$).

(i) On a : $\boxed{d\nu_k(\lambda) \leq \mathrm{vol}(\Omega) d\nu(\lambda)}$. Cela résulte du fait que $\mathcal{E}_k \subset L^2(\Omega)$, on a alors :

$$\mathrm{Tr}(g(\Delta)\cdot P_k) \leq \mathrm{Tr}(g(\Delta)\circ R_\Omega) = \iint_{\Omega\times\mathbb{R}} g(\lambda)\, de(x,\lambda)$$

où R_Ω est la restriction à Ω (multiplication par χ_Ω) .

$$\mathrm{Tr}(g(\Delta)\circ P_k) = \sum_{i=1}^{k} \langle g(\Delta)\tilde{\varphi}_i | \tilde{\varphi}_i \rangle \leq \sum_{i=1}^{\infty} \langle g(\Delta)\tilde{\varphi}_i | \tilde{\varphi}_i \rangle = \mathrm{Tr}(g(\Delta)\circ R_\Omega) ,$$

pour $g \geq 0$.

(ii) On a : $\boxed{\int_{\mathbb{R}} d\nu_k(\lambda) = k}$: cela résulte de la définition avec $g \equiv 1$.

(iii) On a : $\boxed{\int_{\mathbb{R}} \lambda\, d\nu_k(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = S_k(\Omega)}$. Cela mérite quelques détails. Définissons

$$\int_{\mathbb{R}} g(\lambda)\, d\nu_k(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} \langle g(\Delta)\tilde{\varphi}_i | \tilde{\varphi}_i \rangle ,$$

comme $\tilde{\varphi}_i \in H^1(X)$, on voit que l'expression précédente est bien définie si $g(\Delta) \in \mathcal{L}(H^1(X), H^{-1}(X))$, c'est-à-dire si $g(\lambda) = O(|\lambda|)$. Il reste à calculer : $\sum_{i=1}^{k} \langle \Delta\tilde{\varphi}_i | \tilde{\varphi}_i \rangle$, où Δ est le laplacien au sens des distributions ; or $\forall \varphi \in H^1(X)$, on a : $\langle \Delta\varphi | \varphi \rangle_{H^{-1}, H^1} = \int \|d\varphi\|^2$ et donc ici :

$$\langle \Delta\tilde{\varphi}_i | \tilde{\varphi}_i \rangle = \int_\Omega \|d\varphi_i\|^2 = \lambda_i .$$

<u>Application</u> : <u>Inégalité de Li-Yau</u> : elle consiste à déterminer la valeur minimum de $\int \lambda\, d\nu_k(\lambda)$ compatible avec (i) et (ii) . Cette valeur minimum s'obtient en prenant $d\nu_k(\lambda) = \chi_{[-\infty, \lambda_0]}(\lambda) d\nu(\lambda)$ avec $\int_{-\infty}^{\lambda_0} d\nu(\lambda) = \frac{k}{\mathrm{vol}\,\Omega}$, on a ainsi :

$$S_k(\Omega) \geq \int_{-\infty}^{\lambda_0} \lambda\, d\nu(\lambda) .$$

Exemple 1. Cas de $\mathbb{R}^2$, $d\nu(\lambda) = \frac{d\lambda}{4\pi}$ et donc,

$$\int_0^{\lambda_0} \frac{d\lambda}{4\pi} = \frac{\lambda_0}{4\pi} = \frac{k}{\text{vol }\Omega} : \lambda_0 = \frac{4\pi}{\text{vol }\Omega} k \quad ,$$

on en déduit

$$S_k(\Omega) \geq \int_0^{\lambda_0} \frac{\lambda d\lambda}{4\pi} \text{ vol }\Omega = \frac{2\pi}{\text{vol }\Omega} k^2 \ .$$

Exemple 2. Cas du demi-plan de Poincaré.

Soit $X(\mu) = \int_{1/4}^{\mu} \frac{\text{th }\pi r}{4\pi} d\lambda$ et $Y(\mu) = \int_{1/4}^{\mu} \lambda \frac{\text{th }\pi r}{4\pi} d\lambda$, on a

$$S_k(\Omega) \geq \text{vol}(\Omega)\, Y \quad X^{-1}\left(\frac{k}{\text{vol }\Omega}\right) \ .$$

Dans tous les cas on a : $S_k(\Omega) \geq \text{vol }\Omega\, F\left(\frac{k}{\text{vol }\Omega}\right)$.

Pour $\mathbb{R}^2$, $F = F_{\text{eucl}} = 2\pi\, t^2$

Pour H , $F = F_{\text{hyp}} = Y \circ X^{-1}$.

BIBLIOGRAPHIE

[A-H-S] J. AVRON, I. HERBST, B. SIMON : Schrödinger operators with magnetic fields, I. Duke Math. Journal 45, 847-883 (1978).

[B] A. BOREL : Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces. Topology 2 (1963), 111-122.

[B-C] J. BROSSARD, CARMONA

[D] H. DONNELLY : On the spectrum of towers. Proc. AMS 87 (1983), 322-329.

[HL] D. HEJHAL : Selberg trace formula I. Springer Lecture Notes n°

[HR] H. HUBER : Über das Spektrum... .
Comm. Math. Helv. 58 (1982), 627-647.

[L-Y] P. LI - S. YAU : On the Schrödinger Equation and the Eigenvalue Problem.
Comm. Math. Phys. 88 (1983), 309-318.

[P] G. POLYA : On the eigenvalues of vibrating membranes.
Proc. London Math. Soc. 11 (1961), 419-433.

- o -