

SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

FRANÇOISE DAL'BO

Géométrie d'une famille de groupes agissant sur le produit de deux variétés d'Hadamard

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 15 (1996-1997), p. 85-98

http://www.numdam.org/item?id=TSG_1996-1997__15__85_0

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Grenoble), 1996-1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

GÉOMÉTRIE D'UNE FAMILLE DE GROUPES AGISSANT SUR LE PRODUIT DE DEUX VARIÉTÉS D'HADAMARD

Françoise DAL'BO

A Hubert, d'une absence si présente...

Introduction

Une *variété d'Hadamard pincée* est une variété riemannienne complète simplement connexe dont la courbure sectionnelle est bornée. Nous supposons que la borne supérieure de la courbure est -1 .

Soient (X_1, d_1) , (X_2, d_2) deux variétés d'Hadamard pincées, pour $i = 1, 2$ on note $X_i(\infty)$ le bord géométrique de X_i vu d'un point 0_i fixé au préalable dans X_i ([G-H]) et X l'espace produit $X_1 \times X_2$ muni de la métrique produit. Cet espace contient des sous-variétés totalement géodésiques plates de dimension 2 appelées *plats*. Un vecteur non nul (u_1, u_2) appartenant au fibré unitaire tangent en $0 = (0_1, 0_2)$ à X est tangent à un unique plat si et seulement si $\|u_1\|_1 \|u_2\|_2 \neq 0$, dans ce cas on dit que u est *régulier* et on le code par le triplet $(\frac{u_1}{\|u_1\|_1}, \frac{u_2}{\|u_2\|_2}, \frac{\|u_2\|_2}{\|u_1\|_1})$. Si $\|u_1\|_1 \|u_2\|_2 = 0$, u est *singulier* et on l'identifie à sa composante non nulle. Le bord de X noté $X(\infty)$ se compose donc d'une partie régulière $X_{\text{reg}}(\infty)$ codée par $X_1(\infty) \times X_2(\infty) \times \mathbb{R}_*^+$ et d'une partie singulière $X_{\text{sing}}(\infty)$ codée par $X_1(\infty) \cup X_2(\infty)$. Soit Γ un groupe d'isométries agissant proprement discontinûment sur X , on note $L(\Gamma) = X(\infty) \cap \overline{\Gamma 0}$ son ensemble limite, $P(\Gamma)$ la projection sur \mathbb{R}_*^+ de $L(\Gamma) \cap X_{\text{reg}}(\infty)$ et $\mathcal{F}(\Gamma)$ sa projection sur $X_1(\infty) \times X_2(\infty)$. Dans ce texte nous démontrons les propositions A et B suivantes.

Proposition A. Soient $\Gamma_1 = \langle g_1, \dots, g_k \rangle$ et $\Gamma_2 = \langle h_1, \dots, h_k \rangle$ deux groupes de Schottky (voir paragraphe 2) agissant respectivement sur X_1 et X_2 et $\Gamma_1 \xrightarrow{\rho} \Gamma_2$ l'isomorphisme défini par $\rho(g_i) = h_i$. On note Γ le groupe des isométries de X formé des couples $(\gamma_1, \rho(\gamma_1))$ où $\gamma_1 \in \Gamma_1$. Les propriétés suivantes sont vérifiées :

- 1) $L(\Gamma) \subset X_{\text{reg}}(\infty)$.
- 2) $P(\Gamma)$ est un intervalle borné fermé de \mathbb{R}_*^+ qui coïncide avec l'ensemble $\overline{\left\{ \frac{\ell(\rho(\gamma_1))}{\ell(\gamma_1)} / \gamma_1 \in \Gamma_1 \right\}}$ où $\ell(\gamma_i) = d_i(z, \gamma_i z)$ pour z sur l'axe de γ_i .
- 3) $\mathcal{F}(\Gamma) = \{(x_1, \varphi(x_1)) / x_1 \in L(\Gamma)\}$ où φ représente l'homéomorphisme de Nielsen induit par ρ entre $L(\Gamma_1)$ et $L(\Gamma_2)$.
- 4) $L(\Gamma) = \mathcal{F}(\Gamma) \times P(\Gamma)$.

Au passage remarquons que l'image d'un point $\xi = (\xi_1, \xi_2, r)$ de $X_{\text{reg}}(\infty)$ par une isométrie $g = (g_1, g_2)$ est $g(\xi) = (g(\xi_1), g(\xi_2), r)$, par conséquent si $P(\Gamma)$ contient au moins deux points distincts p_1, p_2 alors $\mathcal{F}(\Gamma) \times \{p_1\}$ et $\mathcal{F}(\Gamma) \times \{p_2\}$ sont deux fermés Γ -invariants de $L(\Gamma)$ ce qui montre que $L(\Gamma)$ n'est pas le plus petit fermé Γ -invariant de $X(\infty)$ (contrairement au cas où X est une variété d'Hadamard pincée). En revanche on verra que $\mathcal{F}(\Gamma)$ est lui le plus petit fermé Γ -invariant de $X_1(\infty) \times X_2(\infty)$. Si on remplace dans la proposition A, X_1 et X_2 par des espaces symétriques de rang 1, cette proposition est due à M. Burger [Bu]. Un résultat analogue dans le cadre général des espaces symétrique a été démontré par Y. Benoist [Be] (voir aussi [G]).

Nous notons $I(X_i)$ le groupe des isométries de X_i .

Proposition B. Soit G un sous-groupe de $I(X_1) \times I(X_2)$ agissant proprement discontinûment et librement sur $X_1 \times X_2$, notons G_i la projection de G sur $I(X_i)$. Si $L(\Gamma)$ est inclus dans $X_{\text{reg}}(\infty)$ alors G_i agit proprement discontinûment librement sur X_i , de plus il existe un isomorphisme $G_1 \xrightarrow{\rho} G_2$ préservant le type de chaque isométrie tel que $G = \{(g_1, \rho(g_1)) \mid g_1 \in G_1\}$.

La réciproque est fausse, il suffit pour s'en convaincre de considérer $G_1 = \langle h_1, p_1 \rangle$ et $G_2 = \langle h_2, p_2 \rangle$ deux groupes de Schottky généralisés avec h_i hyperbolique et p_i parabolique (Voir [D-P1] et [D-P2]) et $G_1 \xrightarrow{\rho} G_2$ l'isomorphisme défini par $\rho(h_1) = p_2$ et $\rho(p_1) = h_2$. On peut également penser au cas où $G_1 = \langle g_1, h_1 \rangle$ est un sous-groupe de Schottky de $\text{SO}(n, 1)$ avec $n \geq 3$ et $G_2 = \langle g_2, h_2 \rangle$ est un groupe libre de $\text{SO}(n)$, dans ce cas l'ensemble limite du groupe $\{(g, \rho(g)) \mid g \in G_1\}$ ne rencontre pas $X_{\text{reg}}(\infty)$.

1. Compactification de $X = X_1 \times X_2$

Soient X_1, X_2 deux variétés d'Hadamard pincées, on note $X_i(\infty)$ leur bord géométrique vu de 0_i , point fixé dans X_i (voir [G-H]). On compactifie $X_1 \times X_2$ en lui ajoutant $X_{\text{reg}}(\infty) = X_1(\infty) \times X_2(\infty) \times \mathbb{R}_*^+$ et $X_{\text{sing}}(\infty) = X_1(\infty) \cup X_2(\infty)$ de la façon suivante :

une suite non bornée $x_n = (x_n^1, x_n^2)$ de X converge vers $(\xi_1, \xi_2, p) \in X_{\text{reg}}(\infty)$ si $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^i = \xi_i$ pour $i = 1, 2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d_2(0_2, x_n^2)}{d_1(0_1, x_n^1)} = p$; cette suite converge vers un point singulier

$\eta \in X_i(\infty)$ si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^i = \eta$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d_2(0_2, x_n^2)}{d_1(0_1, x_n^1)} = 0$ (si $i = 1$) ou $+\infty$ (si $i = 2$). L'espace $X(\infty)$

s'identifie au fibré unitaire tangent à X en $0 = (0_1, 0_2)$; soit $u = (u_1, u_2)$ un vecteur régulier de ce fibré (i.e. $\|u_1\|_1 \|u_2\|_2 \neq 0$) la sous-variété totalement géodésique $\mathcal{P}_0(u_1, u_2) = \{(\exp_{0_1} t_1 u_1, \exp_{0_2} t_2 u_2) / t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$ est un plat. Remarquons que deux plats $\mathcal{P}_0(u_1, u_2)$ et $\mathcal{P}_0(v_1, v_2)$ se rencontrent soit uniquement en 0 , soit le long d'une géodésique singulière $(0_1, \exp_{0_2} t u_2)_{t \in \mathbb{R}}$ ou $(\exp_{0_1} t u_1, 0_2)_{t \in \mathbb{R}}$. Si u est régulier u est donc tangent en un unique plat.

Soit γ_i une transformation hyperbolique de X_i , on note γ_i^+ son point attractif et $\ell(\gamma_i)$ son déplacement (i.e. $\ell(\gamma_i) = d_i(z_i, \gamma_i(z_i))$ où z_i appartient à l'axe de γ_i). Notons $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d_2(0_2, \gamma_2^n(0_2))}{d_1(0_1, \gamma_1^n(0_1))} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d_2(z_2, \gamma_2^n(z_2))}{d_1(z_1, \gamma_1^n(z_1))}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma^n(0) = (\gamma_1^+, \gamma_2^+, \frac{\ell(\gamma_2)}{\ell(\gamma_1)})$.

Soit $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ une isométrie de X , γ est *mélangée* si γ_1 et γ_2 ne sont pas du même type. Supposons que γ_1 soit parabolique et γ_2 hyperbolique, on note γ_1^+ l'unique point fixe de γ_1 . Il existe $A > 0$ tel que pour tout $n > 0$, $d_1(0_1, \gamma_1^n 0_1) \leq \text{Log}((1+n)A)$ ([D-P2] chap. IV), par ailleurs $d_2(0_1, \gamma_2^n 0_2) \underset{+\infty}{\sim} n\ell(\gamma_2)$ donc $\lim_{+\infty} d_2(0_1, \gamma_2^n 0_2) / d_1(0_1, \gamma_1^n 0_1) = +\infty$; ceci montre que $\gamma^n(0)$ converge vers $\gamma_2^+ \in X_{\text{sing}}(\infty)$. Si γ est mélangé et si l'un des γ_i est elliptique, il est clair que $\gamma^n(0)$ converge vers $\gamma_j^+ \in X_{\text{sing}}(\infty)$ où γ_j représente la composante non elliptique de γ . En résumé on a la

1.1. Propriété. Soit $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ une isométrie de X , si γ_1 et γ_2 sont hyperboliques $\gamma^n(0)$ converge en $+\infty$ vers $(\gamma_1^+, \gamma_2^+, \frac{\ell(\gamma_2)}{\ell(\gamma_1)}) \in X_{\text{reg}}(\infty)$, si γ est mélangé $\gamma^n(0)$ converge en $+\infty$ vers $\gamma_j^+ \in X_{\text{sing}}(\infty)$ où γ_j représente la composante hyperbolique de γ s'il y en a une et parabolique sinon.

Supposons que γ_1 et γ_2 soient paraboliques, si $X_1 = X_2 = \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ on obtient $\lim_{+\infty} \gamma^n(0) = (\gamma_1^+, \gamma_2^+, 1)$ et si $X_1 = X_2 = \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, $\lim_{+\infty} \gamma^n(0) = (\gamma_1^+, \gamma_2^+, q)$ avec $q \in \{1/2, 1/4\}$. Dans le cas général, il semble qu'aucun résultat ne soit connu, ce problème est directement relié à la question suivante

1.2. Question. Soient (Y, d) une variété d'Hadamard pincée et p une isométrie parabolique, existe-t-il $B > 0$ tel que $d(0, p^n(0)) \geq \text{Log}((1+n)B)$ pour tout $n > 0$?

2. Groupes de Schottky

Soient Y une variété d'Hadamard pincée et 0 un point fixé dans Y . On munit le bord géométrique $Y(\infty)$ de Y vu de 0 de la métrique D définie par $D(\xi, \eta) = e^{-(\xi/\eta)}$ où (ξ/η) représente le produit de Gromov en 0 de ξ et η (voir [Bo] et [K]). Une isométrie g agit par transformation conforme sur $(Y(\infty), D)$ ([Bo]), son facteur conforme en $\xi \in Y(\infty)$ est noté $|g'(\xi)| = \lim_{\xi \rightarrow \eta} D(g(\xi), g(\eta)) / D(\xi, \eta)$.

Les propriétés suivantes découlent directement de la structure conforme de $(Y(\infty), D)$.

2.1. Propriétés

- 1) $\forall \xi, \eta \in Y(\infty)$, $D(g(\xi), g(\eta)) = \sqrt{|g'(\xi)| |g'(\eta)|} D(\xi, \eta)$
- 2) Si g est hyperbolique, $e^{\ell(g)} = |g'(g^-)|$ où g^- est le point répulsif de g .

Soient g_1, \dots, g_k des transformations hyperboliques, le groupe engendré par g_1, \dots, g_k est un groupe de Schottky (voir [D-P1], [D-P2]) si pour chaque $i = 1, \dots, k$ il existe deux voisinages compacts de g_i^- et g_i^+ dans $\bar{Y} = Y \cup Y(\infty)$ notés respectivement $V(g_i^{-1})$ et $V(g_i)$ vérifiant les conditions suivantes :

- 1) Les $2k$ voisinages $V(g_1), V(g_1^{-1}), \dots, V(g_k), V(g_k^{-1})$ sont deux à deux disjoints.
- 2) Pour $i = 1, \dots, k$ $\overline{g_i(\bar{Y} - V(g_i^{-1}))} = V(g_i)$.

Voici une façon (classique) de construire de tels groupes. Soient h une transformation hyperbolique et U^-, U^+ deux voisinages compacts disjoints dans $Y(\infty)$ de h^-, h^+ . D'après [G-H] (chap. 8, thm 16), il existe $N > 0$ tel que pour tout $n \geq N$

$$h^n(Y(\infty) - U^-) \subset U^+ \quad \text{et} \quad h^{-n}(Y(\infty) - U^+) \subset U^-.$$

Notons $V^- = U^-$ et $V^+ = \overline{h^N(Y(\infty) - U^-)}$, ces deux ensembles sont des voisinages compacts disjoints de h^- et h^+ . Notons \mathcal{C}^- le cône issu de 0 formé de tous les rayons géodésiques $[0, \xi)$ avec $\xi \in V^-$, ce cône est un voisinage de h^- dans \bar{Y} .

2.2. Lemme. *Il existe $N_1 > N$ tel que $h^{N_1}(\bar{Y} - \mathcal{E}^-) \cap \mathcal{E}^- = \emptyset$.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde et supposons que pour tout $p > N$ il existe $c_p \in \mathcal{E}^-$ vérifiant $h^{-p}(c_p) \notin \mathcal{E}^-$. Notons v_p l'extrémité du rayon géodésique issu de 0 passant par c_p , puisque $c_p \in \mathcal{E}^-$ on a $v_p \in V^-$. On déduit des propriétés 2.1 les égalités suivantes :

$$D(h^{-p} v_p, h^-) = |h^{-p'}(v_p)|^{1/2} e^{-\frac{p}{2}\ell(h)} D(v_p, h^-) \quad \text{et} \quad |h^{-p'}(v_p)|^{1/2} = \frac{D(h^{-p}(v_p), h^+)}{e^{p/2\ell(h)} D(v_p, h^+)}.$$

Pour tout p , $v_p \in V^-$ et $h^+ \in V^+$ donc il existe $A > 0$ tel que $D(v_p, h^+) > A$. On en déduit l'existence d'une constante $B > 0$ telle que

$$|h^{-p'}(v_p)|^{1/2} \leq e^{-\frac{p}{2}\ell(h)} B.$$

Ceci montre que $\lim_{p \rightarrow +\infty} h^{-p}(v_p) = h^-$. Par ailleurs $\lim_{p \rightarrow +\infty} h^{-p}(0) = h^-$ donc $h^{-p}(c_p)$ converge vers h^- ce qui contredit le fait que $h^{-p}(c_p) \notin \mathcal{E}^-$.

Notons $V(h^{-1}) = \mathcal{E}^-$ et $V(h) = \overline{h^{N_1}(\bar{Y} - \mathcal{E}^-)}$, On vient de montrer la

2.3. Propriété. *Il existe deux voisinages compacts disjoints $V(h^{-1})$ et $V(h)$ de h^- et h^+ dans \bar{Y} et N_1 tels que : $h^{N_1}(\bar{Y} - V(h^{-1})) = V(h)$.*

Soient g_1, \dots, g_k des transformations hyperboliques n'ayant aucun point fixe en commun, on obtient par la construction précédente l'existence de $N_1, \dots, N_k \in \mathbb{N}^*$ tels que $\langle g_1^{N_1}, \dots, g_k^{N_1} \rangle$ soit un groupe de Schottky.

On déduit facilement de la dynamique des générateurs les deux résultats suivants :

2.4. Propriété du Ping-Pong. *Soient $\langle g_1, \dots, g_k \rangle$ un groupe de Schottky et $a_1 \dots a_\ell$ un mot réduit (i.e. $a_i \in \{g_1^{\pm 1}, \dots, g_k^{\pm 1}\}$, $a_{i+1} \neq a_i$) pour tout $x \in \bar{Y} - \bigcup_{i=1}^k V(g_i) \cup V(g_i^{-1})$, on a $a_1 \dots a_\ell(x) \in V(a_1)$.*

2.5. Corollaire. *Le groupe $\langle g_1, \dots, g_k \rangle$ est libre, purement hyperbolique et agit proprement discontinûment sur Y .*

On suppose pour simplifier que $\langle g_1, \dots, g_k \rangle$ est un groupe de Schottky et que pour chaque i , $V(g_i^{\epsilon_i})$ est un secteur c'est-à-dire, un ensemble de rayon géodésique issu d'un point $y_{i, \epsilon_i} \in Y$ (la construction indiquée précédemment fournit de tels voisinages).

2.6. Remarque. Le domaine $\mathcal{D} = Y - \bigcup_{i=1}^k V(g_i) \cup V(g_i^{-1})$ est un domaine fondamental de $\langle g_1, \dots, g_k \rangle$.

Démonstration. En utilisant la propriété du Ping-Pong, on montre facilement que pour tout $g \neq e$, appartenant à $\langle g_1, \dots, g_k \rangle$ on a $g \overset{\circ}{\mathcal{D}} \cap \overset{\circ}{\mathcal{D}} = \emptyset$. Soit $y \in Y - \mathcal{D}$, il existe $s_1 \in \{1, \dots, k\}$ et $\varepsilon_1 \in \{\pm 1\}$ tels que $y \in V(g_{s_1}^{\varepsilon_1})$, notons $y_1 = g_{s_1}^{-\varepsilon_1}(y)$. Si $y_1 \in \mathcal{D}$, on a montré l'existence d'un $g \in G$ tel que $g(y) \in \mathcal{D}$, sinon il existe $s_2 \in \{1, \dots, k\}$ et $\varepsilon_2 \in \{\pm 1\}$ avec $g_{s_2}^{\varepsilon_2} \neq g_{s_1}^{-\varepsilon_1}$ tels que $y_1 \in V(g_{s_2}^{\varepsilon_2})$, on pose $y_2 = g_{s_2}^{-\varepsilon_2}(y_1)$. On construit de cette façon une suite y_n . Le but est de démontrer qu'il existe $n \geq 1$ tel que $y_n \in \mathcal{D}$. Supposons que pour tout $n > 0$, $y_n \notin \mathcal{D}$ ainsi $y \in g_{s_1}^{\varepsilon_1} \dots g_{s_n}^{\varepsilon_n} (V(g_{s_{n+1}}^{\varepsilon_{n+1}}))$ pour tout $n > 0$. Quitte à extraire une sous-suite on peut supposer que $y \in g_{s_1}^{\varepsilon_1} \dots g_{s_{n_p}}^{\varepsilon_{n_p}}(V)$ où V est un voisinage fixé de la forme $V(g_s^\varepsilon)$. Notons $V_p = g_{s_1}^{\varepsilon_1} \dots g_{s_{n_p}}^{\varepsilon_{n_p}}(V)$, il découle de la propriété du Ping-Pong que $V_{p+1} \subset V_p$, ainsi $y \in \bigcap_{p=1}^{+\infty} V_p$. Posons $V_p(\infty) = V_p \cap Y(\infty)$ et $\gamma_p = g_{s_1}^{\varepsilon_1} \dots g_{s_{n_p}}^{\varepsilon_{n_p}}$, on a

$$D(\gamma_p(\xi), \gamma_p(\eta)) = |\gamma_p'(\eta)|^{1/2} |\gamma_p'(\xi)|^{1/2} D(\xi, \eta) \quad \text{et} \quad |\gamma_p'(\xi)|^{1/2} = \frac{D(\gamma_p(\xi), \gamma_p^-)}{e^{\frac{\ell(\gamma_p)}{2}} D(\xi, \gamma_p^-)}.$$

Puisque $\gamma_p^- \in V(g_{s_{n_p}}^{-\varepsilon_{n_p}})$ et $g_{s_{n_p}}^{-\varepsilon_{n_p}} \neq g_s^\varepsilon$, si ξ et η appartiennent à V il existe $B > 0$ tel que pour tout $p > 0$ $|\gamma_p'(\xi)|$ et $|\gamma_p'(\eta)|$ soient majorés par $\frac{B}{e^{\frac{\ell(\gamma_p)}{2}}}$ donc $\text{Diam } V_p(\infty) \leq \frac{K}{e^{\frac{\ell(\gamma_p)}{2}}}$.

D'après [D-P2] (corollary II-3), $\lim_{p \rightarrow +\infty} \ell(\gamma_p) = +\infty$ donc $\lim_{p \rightarrow +\infty} \text{Diam } V_p(\infty) = 0$.

Cela entraîne que pour tout $z \in Y$ et pour toute suite $\xi_p \in V_p(\infty)$, quitte à extraire une sous-suite $\lim_{p \rightarrow +\infty} \gamma_p(z) = \lim_{p \rightarrow \infty} \gamma_p(\xi_p) = \xi$ avec $\{\xi\} = \bigcap_{p=1}^{+\infty} V_p(\infty)$. Montrons que pour tout compact $K \subset Y$, il existe $p > 0$ tel que $V_p \cap K \neq \emptyset$, ceci montrera que le point y considéré au départ appartient à $Y(\infty)$ on aboutira ainsi à une contradiction. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe K tel que pour tout $p > 0$, $V_p \cap K \neq \emptyset$. Soit v_p une suite de V telle que $\gamma_p(v_p) \in K$ et converge. Le voisinage V est un cône issu d'un point z fixé, soit $\gamma_p(\infty)$ l'extrémité du rayon issu de z passant par v_p , on a $\gamma_p(\infty) \in V$, ainsi $\gamma_p(z)$ et $\gamma_p(v_p(\infty))$ (quitte à extraire une sous-suite) converge vers ξ donc $\gamma_p(v_p)$ aussi ce qui est contradictoire. \square

2.7. Corollaire. *Soit $\langle g_1, \dots, g_k \rangle$ un groupe de Schottky, il existe un compact sur la variété $Y/\langle g_1, \dots, g_k \rangle$ contenant toutes les géodésiques fermées.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une suite $(\bar{\mathcal{G}}_n)_{n \geq 1}$ de géodésiques fermées sur $Y/\langle g_1, \dots, g_k \rangle$ et une suite de points non bornée $\bar{x}_n \in \bar{\mathcal{G}}_n$. Ceci se traduit sur le domaine fondamental \mathcal{D} introduit précédemment par l'existence d'une suite non bornée $x_n \in \mathcal{D}$ et d'une suite d'axes de transformations hyperboliques h_n contenant x_n . Quitte à extraire une sous-suite on peut supposer que $h_n = a_1 \dots a_{\rho_n}$ est un mot réduit et que x_n, h_n^+, h_n^- convergent dans \bar{Y} . Comme $h_n^+ \in a_1 V(a_2)$ on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x \in a_1 V(a_2) \cap \bar{\mathcal{D}}$. Or $\mathcal{D} = Y - \bigcup_{i=1}^k V(g_i) \cup V(g_i^{-1})$ donc $x \in \partial V(a_1)$ où $\partial V(a_i)$ désigne la frontière de $V(a_i)$. Ainsi $x \in \partial V(a_1) \cap a_1 V(a_2)$, par ailleurs $\partial V(a_1) = a_1(\partial V(a_1^{-1}))$ donc $a_1^{-1}x \in \partial V(a_1^{-1}) \cap V(a_2)$ ce qui est impossible car $a_1 \neq a_2^{-1}$. \square

Soit Σ l'espace symbolique des mots réduits infinis $(a_i)_{i \geq 1}$ (i.e. $a_i \in \{g_1^{\pm 1}, \dots, g_k^{\pm 1}\}, a_{i+1} \neq a_i^{-1}$) muni de la distance δ définie par $\delta((a_i)_{i \geq 1}, (b_i)_{i \geq 1}) = 0$ si $a_i = b_i \forall i \geq 1$ et $1/N$ avec $N = \min\{i \geq 1 / a_i \neq b_i\}$ sinon. L'application $\Sigma \xrightarrow{\varphi} L(G)$ définie par $\varphi((a_i)_{i \geq 1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_1 \dots a_n(y)$ pour y fixé dans Y est un homéomorphisme (indépendant de y) de (Σ, δ) sur $L(G)$ muni de la métrique D . Soient X_1 et X_2 deux variétés d'Hadamard pincées et $G_1 = \langle g_{11}, \dots, g_{1k} \rangle, G_2 = \langle g_{21}, \dots, g_{2k} \rangle$ deux groupes de Schottky agissant respectivement sur X_1 et X_2 . On note Σ_i l'espace symbolique des mots réduits associé à G_i et $\Sigma_i \xrightarrow{\varphi_i} L(G_i)$ l'homéomorphisme défini ci-dessus. Soit $L(G_1) \xrightarrow{\varphi} L(G_2)$ l'application définie pour $x = \varphi_1((a_{1j})_{j \geq 1}) \in L(G_1)$ par $\varphi(x) = \varphi_2((a_{2j})_{j \geq 1})$ avec la convention suivante : si $a_{1j} = g_{1\ell}$ alors $a_{2j} = g_{2\ell}$. Comme φ_1, φ_2 sont des homéomorphismes on a la :

2.8. Propriété. *L'application $L(G_1) \xrightarrow{\varphi} L(G_2)$, appelée application de Nielsen associée à G_1, G_2 , est un homéomorphisme.*

On rappelle que $\langle g_1, \dots, g_k \rangle$ est un groupe de Schottky

2.9. Lemme de comparaison. *Il existe $c > 0$ tel que pour tout $p > 0$ et pour tout mot fortement réduit $g = a_1^{n_1} \dots a_p^{n_p}$ (i.e. $a_i \in \{g_1^{\pm 1}, \dots, g_k^{\pm 1}\}, n_i > 0, a_{i+1} \neq a_i^{-1}$ et $a_1 \neq a_p^{-1}$) on ait*

$$|\ell(g) - \sum_{i=1}^p n_i \ell(a_i)| \leq c \times p.$$

Remarquons que $c \times p$ ne peut pas être remplacé par une constante uniforme, il suffit pour s'en convaincre de prendre $g = (g_1 g_2)^n$ et de supposer $\ell(g_1 g_2) \neq \ell(g_1) + \ell(g_2)$.

Démonstration du lemme. D'après les propriétés 2-1, le lemme revient à montrer l'existence de $d > 1$ tel que pour tout mot fortement réduit $g = a_1^{n_1} \dots a_p^{n_p}$ on ait :

$$d^{-p} \leq \frac{e^{\ell(g)}}{\prod_{i=1}^p e^{n_i \ell(a_i)}} \leq d^p.$$

Pour alléger la démonstration on se restreint au cas où $p=2$ et $g = g_1^{n_1} g_2^{n_2}$ avec $n_i > 0$.

On a

$$e^{\ell(g)} = |g'(g^-)| \quad \text{et} \quad |g'(g^-)| = |g_1^{n_1}(g_2^{n_2}(g^-))| |g_2^{n_2}(g^-)|.$$

D'après la propriété 2-1 1)

$$|g_2^{n_2}(g^-)| |g_2^{n_2}(g_2^+)| = D^2(g_2^{n_2}(g^-), g_2^+) / D^2(g^-, g_2^+).$$

Notons A le diamètre de $Y(\infty)$ et $B = \inf_{\substack{i,j \in \{1, \dots, k\} \\ \varepsilon, \varepsilon' \in \{\pm 1\} \\ (i, \varepsilon) \neq (j, \varepsilon')}} D(V_\infty(g_i^\varepsilon), V_\infty(g_j^{\varepsilon'}))$,

où $V_\infty(g_i^\varepsilon) = V_\infty(g_i^\varepsilon) \cap Y(\infty)$.

Comme $g_2^{n_2}(g_-) \in V_\infty(g_1^{-1})$, $g_2^+ \in V_\infty(g_2)$ et $g^- \in V_\infty(g_2^{-1})$ on obtient

$$\frac{B^2}{A^2} \leq \frac{|g_2^{n_2}(g^-)|}{e^{n_2 \ell(g_2)}} \leq \frac{A^2}{B^2}$$

le même raisonnement appliqué cette fois à $|g_1^{n_1}(g_2^{n_2}(g^-))|$ montre que

$$\frac{B^2}{A^2} \leq \frac{|g_1^{n_1}(g_2^{n_2}(g^-))|}{e^{n_1 \ell(g_1)}} \leq \frac{A^2}{B^2}.$$

Posons $d = \frac{B^2}{A^2}$, on a

$$d^{-2} \leq \frac{e^{\ell(g)}}{\prod_{i=1}^2 e^{n_i \ell(g_i)}} \leq d^2. \quad \square$$

3. Démonstrations des propositions A et B

Soient $\Gamma_1 = \langle g_1, \dots, g_k \rangle$, $\Gamma_2 = \langle h_1, \dots, h_k \rangle$ des groupes de Schottky agissant respectivement sur des variétés d'Hadamard pincées X_1, X_2 et $\Gamma_1 \xrightarrow{\varphi} \Gamma_2$ l'isomorphisme défini par $\rho(g_i) = h_i$.

On note $\Gamma = \{(\gamma_1, \rho(\gamma_1)) / \gamma_1 \in \Gamma_1\}$, ce groupe est libre et agit proprement discontinûment sur $X = X_1 \times X_2$. On rappelle que $L(\Gamma) = X(\infty) \cap \overline{\Gamma 0}$ et que $P(\Gamma)$ représente la projection

de $L(\Gamma) \cap X_{\text{reg}}(\infty)$ sur \mathbb{R}_*^+ . Dans ce paragraphe nous démontrons en plusieurs étapes les propositions A et B énoncées dans l'introduction.

3.1. Proposition A 1) 2).

1) $L(\Gamma) \subset X_{\text{reg}}(\infty)$

2) $P(\Gamma)$ est un intervalle borné fermé de \mathbb{R}_*^+ qui coïncide avec $\overline{\left\{ \frac{\ell(\rho(\gamma_1))}{\ell(\gamma_1)} / \gamma_1 \in \Gamma_1 \right\}}$.

Démonstration. Soit $\xi \in L(\Gamma)$, il existe une suite $\gamma_n = (\gamma_{n_1}, \gamma_{n_2})$ avec $\gamma_{n_2} = \rho(\gamma_{n_1})$ dans Γ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n(0) = \xi$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $\gamma_{n_1} = a_1 \dots a_{\ell_n}$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n = +\infty$, $a_1 \neq a_{\ell_n}^{-1}$ et $a_1 \dots a_{\ell_n}$ réduit. On note C_n la géodésique de X_1 d'extrémités $\gamma_{n_1}^+$ et $\gamma_{n_1}^-$.

1) D'après le corollaire 2.7, il existe un compact connexe d'intérieur non vide K_1 de X_1 inclus dans un domaine fondamental \mathcal{D} (qui contient 0_1) de Γ_1 fixé au préalable tel que $\partial K_1 \subset \partial \mathcal{D}$ et $C_n \subset \bigcup_{\gamma_1 \in \Gamma_1} \gamma_1 K_1$ pour toute géodésique C_n . Soit $z_n \in C_n \cap \partial K_1$, on note $[y_j, y_{j+1}]$ le segment de C_n inclus dans $a_1 \dots a_{j+1}(K_1)$, on a

$$[z_n, \gamma_{n+1}(z_n)] = \bigcup_{j=0}^{\ell_n-1} [y_j, y_{j+1}].$$

On obtient ainsi

$$\sum_{j=0}^{\ell_n-1} d_1(y_j, y_{j+1}) - 2d_1(z_{n_1}, 0_1) \leq d_1(0_1, \gamma_{n_1} 0_1) \leq 2d_1(z_{n_1}, 0_1) + \sum_{j=0}^{\ell_n-1} d_1(y_j, y_{j+1}).$$

Notons $(\partial \mathcal{D}_i)_{i \leq 2k}$ les côtés deux à deux disjoints de \mathcal{D} et posons $A_1 = \text{diamètre } K_1$,

$$B_1 = \inf_{\substack{x \in \partial \mathcal{D}_i \cap K_1 \\ y \in \partial \mathcal{D}_j \cap K_1 \\ i \neq j}} d_1(x, y), \quad C_1 = \sup_{k \in K} d_1(0_1, k),$$

on a $\ell_n B_1 - 2C_1 \leq d_1(0_1, \gamma_{n_1} 0_1) \leq 2C_1 + \ell_n \times A_1$.

La même inégalité (en changeant les constantes) a lieu si on remplace γ_{n_1} par $\rho(\gamma_{n_1})$. On en déduit l'encadrement suivant

$$\frac{\ell_n B_2 - 2C_2}{\ell_n A_1 + 2C_1} \leq \frac{d_2(0_2, \rho(\gamma_{n_1})(0_2))}{d_1(0_1, \gamma_{n_1}(0_1))} \leq \frac{\ell_n A_2 - 2C_2}{\ell_n B_1 - 2C_1}$$

ce qui montre que $P(\Gamma)$ est inclus dans $\left[\frac{B_2}{A_1}, \frac{A_2}{B_1} \right]$ et donc que $L(\Gamma) \cap X_{\text{Sing}}(\infty) = \emptyset$.

2) Soit $p \in P(\Gamma)$, il existe $(\gamma_{n_1})_{n \geq 1}$ tel que

$$p = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d_2(0_2, \rho(\gamma_{n_1})(0_2))}{d_1(0_1, \gamma_{n_1}(0_1))}$$

Notons $\gamma_{n_2} = \rho(\gamma_{n_1})$ et choisissons pour $i = 1, 2$ un point z_{n_i} sur l'axe de γ_{n_i} appartenant au compact K_i introduit en 1) on a

$$\ell(\gamma_{n_i}) - 2d(0_i, z_{n_i}) \leq d_i(0_i, \gamma_{n_i}, 0_i) \leq 2d(0_i, z_{n_i}) + \ell(\gamma_{n_i})$$

puisque $d(0_i, z_{n_i})$ est uniformément borné on obtient $p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ell(\gamma_{n_2})}{\ell(\gamma_{n_1})}$ et donc

$$P(\Gamma) \subset I = \overline{\left\{ \frac{\ell(\rho(\gamma_1))}{\ell(\gamma_1)} / \gamma_1 \in \Gamma_1 \right\}}.$$

Soit $q \in I$, si $q = \frac{\ell(\rho(\gamma_1))}{\ell(\gamma_1)}$ alors $q \in P(\Gamma)$ car $(\gamma_1, \rho(\gamma_1))^n(0)$ converge quand n tend vers $+\infty$ vers $(\gamma_1^+, \rho(\gamma_1)^+, q)$. Si maintenant $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ell(\rho(\gamma_{n_1}))}{\ell(\gamma_{n_1})}$ alors $q \in P(\Gamma)$ car $L(\Gamma)$ est fermé.

En conclusion $P(\Gamma) = I$. Montrons à présent que I est un intervalle, pour cela il suffit de montrer que si $r = \frac{\ell(r_2)}{\ell(r_1)}$ et $s = \frac{\ell(s_2)}{\ell(s_1)}$ avec $r_1, s_1 \in \Gamma_1$, et $r_2 = \rho(r_1), s_2 = \rho(s_1)$ alors l'intervalle $[r, s]$ est inclus dans I . On suppose $r \neq s$, ceci entraîne que pour $i=1, 2$ r_i et s_i ne fixent aucun point en commun et donc que pour N assez grand les groupes $\langle r_i^N, s_i^N \rangle$ sont des groupes de Schottky. D'après le lemme 2.9 on a pour $n > 0$ et $m > 0$ $(\ell(r_1^{Nn}, s_1^{Nm}), \ell(r_2^{Nn}, s_2^{Nm})) = n(\ell(r_1^N, \ell(r_2^N)) + m(\ell(s_1^N), \ell(s_2^N)) + U_{nm}$ avec $\|U_{nm}\|$ uniformément bornée.

Notons $U_r = (\ell(r_1^N), \ell(r_2^N))$, $U_s = (\ell(s_1^N), \ell(s_2^N))$ et A une borne uniforme de $\|U_{nm}\|$, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ il existe $\gamma_{1nm} \in \Gamma_1$ tel que le point de coordonnées $(\ell(\gamma_{1nm}), \ell(\rho(\gamma_{1nm})))$ appartienne au disque de rayon A et de centre $nU_r + mU_s$. Ceci montre que $\left\{ \frac{\ell(\rho(\gamma_{1nm}))}{\ell(\gamma_{1nm})} / n, m \in \mathbb{N} \right\}$ est dense dans $[r, s]$. (Cet argument est utilisé dans [Be]). \square

Soit $x \in L(\Gamma_1)$, on rappelle qu'il existe une unique suite infinie de mots réduits $(a_1 \dots a_n)_{n \geq 1}$ en les générateurs de C_1 telle que $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_1 \dots a_n(0_1)$, on note φ l'application de Nielsen définie par

$$\begin{aligned} L(\Gamma_1) &\xrightarrow{\varphi} L(\Gamma_2) \\ x &\longmapsto \varphi(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \rho(a_1) \dots \rho(a_n)(0_2). \end{aligned}$$

Par construction de φ on a $\varphi \circ \gamma_1 = \rho(\gamma_1) \circ \varphi$ pour tout $\gamma_1 \in \Gamma_1$. De plus φ est un homéomorphisme (propriété 2.8).

On rappelle que $\mathcal{F}(\Gamma)$ représente la projection de $L(\Gamma) \cap X_{\text{reg}}(\infty)$ sur $X_1(\infty) \times X_2(\infty)$.

3.2. Proposition A 3) 4)

3) $\mathcal{F}(\Gamma) = \{(x_1, \varphi(x_1)) / x_1 \in L(\Gamma_1)\}$

4) $L(\Gamma) = \mathcal{F}(\Gamma) \times P(\Gamma)$.

Démonstration.

3) Soient $(x_1, x_2) \in \mathcal{F}(\Gamma)$, il existe $(\gamma_{n_1}, \rho(\gamma_{n_1}))_{n \geq 1}$ dans Γ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_{n_1}(0_1) = x_1$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\gamma_{n_1})(0_2) = x_2$. Quitte à extraire une sous-suite on peut supposer $\gamma_{n_1} = a_1 \dots a_{\ell_n}$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n = +\infty$ donc $x_2 = \varphi(x_1)$.

4) Soient $(x_1, \varphi(x_1), p) \in \mathcal{F}(\Gamma) \times P(\Gamma)$, il existe $(\gamma_{n_1})_{n \geq 1}$ dans Γ_1 tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ell(\rho(\gamma_{n_1}))}{\rho(\gamma_{n_1})} = p$. Quitte à extraire une sous-suite on peut supposer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_{n_1}(0_1) = y_1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho(\gamma_{n_1})(0_2) = \varphi(y_1)$, ainsi $(y_1, \varphi(y_1), p) \in L(\Gamma)$. L'ensemble $L(\Gamma_1)$ étant le plus petit fermé Γ -invariant de $X_1(\infty)$, il existe $(g_{n_1})_{n \geq 1}$ dans Γ_1 tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_{n_1}(y_1) = x_1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho(g_{n_1})(\varphi(y_1)) = \varphi(x_1)$. Comme $(g_1, g_2)(x_1, \varphi(x_1), p) = (g_1(x_1), g_2(\varphi(x_1), p))$ on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} (g_{n_1}, \rho(g_{n_1}))(y_1, \varphi(y_1), p) = (x_1, \varphi(x_1), p)$ et donc $(x_1, \varphi(x_1), p) \in L(\Gamma)$. \square

3.3. Remarque. $\mathcal{F}(\Gamma)$ est le plus petit fermé Γ -invariant de $X_1(\infty) \times X_2(\infty)$.

Cette remarque découle du fait suivant : soient $x_i \in X_i(\infty)$ et $\gamma_{i\ell} = a_{i1} \dots a_{i\ell}$ une suite de mots réduits emboîtés de Γ_i , quitte à extraire une sous-suite $\gamma_{i\ell}(x_i)$ converge vers le point de $L(\Gamma_i)$ codé dans l'espace symbolique Σ_i par la suite $a_{i1} a_{i2} \dots a_{in} \dots$.

3.4. Proposition B. Soit G un sous-groupe de $I(X_1) \times I(X_2)$ agissant proprement discontinûment et librement sur $X_1 \times X_2$. Notons G_i sa projection sur $I(X_i)$. Si $L(G) \cap X_{\text{sing}}(\infty) = \emptyset$ alors il existe un isomorphisme $G_1 \xrightarrow{p} G_2$ préservant le type des isométries, G_i agit proprement discontinûment et librement sur X_i et $G = \{(g_1, \rho(g_1)) / g_1 \in G_1\}$.

Démonstration. Supposons que G_1 n'agisse pas proprement discontinûment sur X , alors il existe une suite $(g_{n_1})_{n \geq 1}$ de G_1 telle que $\lim_{n_1 \rightarrow \infty} g_{n_1}(0_1) = 0_1$. Comme G agit proprement discontinûment sur X , $\lim_{n_2 \rightarrow +\infty} d_2(0_2, g_{n_2}(0_2)) = +\infty$ et donc $(g_{n_1}(0_1), g_{n_2}(0_2))$ converge vers un point de $X_{\text{sing}}(\infty) \cap L(\Gamma)$ ce qui est contraire à l'hypothèse. Le même

raisonnement s'applique à G_2 . On en déduit que G_i agit proprement discontinûment sur X_i . Supposons à présent que G contienne un élément $g = (\text{Id}, g_2)$ avec $g_2 \neq \text{Id}$, comme l'action de G est libre, g_2 n'est pas elliptique donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} g^n(0)$ appartient à $X_{\text{sing}}(\infty) \cap L(\Gamma)$, ce qui est impossible ainsi la projection $G \xrightarrow{p_1} G_1$ est un isomorphisme, idem pour p_2 . On note $G_1 \xrightarrow{\rho} G_2$ l'isomorphisme défini par $\rho(g_1) = p_2(p_1^{-1}(g_1))$, cet isomorphisme conserve le type des isométries (i.e. ρ (hyperbolique) est hyperbolique, ρ (parabolique) est parabolique) car si g_1 et g_2 ne sont pas du même type alors d'après la propriété 1.1 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_2(0_2, g_2^n(0_2))}{d_1(0_1, g_1^n(0_1))} \in \{0, +\infty\}$ et donc $L(\Gamma) \cap X_{\text{sing}}(\infty) \neq \emptyset$. Par construction de ρ on a $G = \{ (g_1, \rho(g_1)) / g_1 \in G_1 \}$. \square

4. Remarques sur $P(\Gamma)$

On rappelle que $X = X_1 \times X_2$ est le produit de deux variétés d'Hadamard pincées et que Γ est un groupe d'isométries construit à partir de deux groupes de Schottky Γ_1, Γ_2 , on note δ_Γ l'exposant critique de la série de Poincaré $\sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(0, \gamma(0))}$, par un procédé du type "Patterson-Sullivan" [A] [Bu][C], on peut construire sur $X(\infty)$ une famille de mesures $(\mu_x)_{x \in X}$ vérifiant $\frac{d\mu_x}{d\mu_0}(z) = e^{-\delta_\Gamma h_z(x)}$ où $h_z(x)$ désigne la fonction de Busemann normalisée par $h_z(0) = 0$. Le support de μ_x est inclus dans $L(\Gamma)$. Si X_1 et X_2 sont des espaces symétriques de rang 1 et si Γ est Zariski dense, d'après [A], [Bu] il existe $p_\Gamma \in P(\Gamma)$ tel que $\text{supp } \mu_x = \mathcal{F}(\Gamma) \times \{p_\Gamma\}$ pour tout $x \in X$, dans le cas particulier où le volume de X/Γ est fini, $p_\Gamma = 1$. Nous construisons ici des exemples de groupes Γ pour lesquels $P(\Gamma)$ ne contient pas 1 (ces groupes sont bien sûr de covolume infini).

4.1. Remarque. *Il existe des groupes $\Gamma = \{(\gamma_1, \rho(\gamma_1)) \mid \gamma_1 \in \Gamma_1\}$ tels que $1 \notin P(\Gamma)$.*

En effet, revenons à la démonstration de la proposition 3.1 partie A 1), dans cette démonstration apparaît l'inclusion suivante : $P(\Gamma) \subset [\frac{B_2}{A_1}, \frac{A_2}{B_1}]$. Fixons $\Gamma_1 = \langle g_1, g_2 \rangle$, on peut modifier $\Gamma_2 = \langle h_1, h_2 \rangle$ par exemple en prenant $V(h_1^{\pm 1})$ et $V(h_2^{\pm 1})$ de toute petite taille pour que $B_2 > A_1$, on obtient alors $P(\Gamma) \subset]1, +\infty[$.

D'autres exemples ayant cette propriété peuvent être construits en prenant $h_1 = g_1^N$ et $h_2 = g_2^N$. Soit $\gamma_1 = a_1^{n_1} \dots a_p^{n_p}$ d'après le lemme 2.9 on a :

$$\frac{\ell(\rho(\gamma_1))}{\ell(\gamma_1)} = \frac{N \sum_{i=1}^p n_i \ell(a_i) + c(\rho(\gamma_1)) \times p}{\sum_{i=1}^p n_i \ell(a_i) + c(\gamma_1) \times p}$$

où $|c(\gamma_1)|$ et $|c(\rho(\gamma_1))|$ sont uniformément bornées par un réel $A > 0$.

Notons $\ell = \min\{\ell(g_1), \ell(g_2)\}$, il suffit de choisir N tel que $(N-1)\ell \geq 2A$.

Signalons également l'existence dans l'espace de Teichmüller d'un pantalon d'un chemin de pantalons hyperboliques $(P_t)_{t \in \mathbb{R}}$ tels que si $t > t'$ la longueur des géodésiques fermées de P_t soit plus grande que la longueur des géodésiques fermées correspondantes sur $P_{t'}$ [S].

Pour $i=1,2$ on note δ_{Γ_i} l'exposant critique de la série de Poincaré associée à Γ_i , cet exposant coïncide avec celui de la série $\sum_{\gamma_i \in \Gamma_i} e^{-s\ell(\gamma_i)}$. Si $P(\Gamma) = [a, b]$ alors

$$\sum_{\gamma_1 \in \Gamma_1} e^{-s\ell(\gamma_1)} \geq \sum_{\gamma_2 \in \Gamma_2} e^{-s/a \ell(\gamma_2)} \quad \text{et} \quad \sum_{\gamma_2 \in \Gamma_2} e^{-s\ell(\gamma_2)} \geq \sum_{\gamma_1 \in \Gamma_1} e^{-s\ell(\gamma_1)b}.$$

On en déduit la

4.2. Remarque. $\delta_{\Gamma_1} / \delta_{\Gamma_2} \in P(\Gamma)$.

Références

- [A] Albuquerque P. : *Patterson-Sullivan Measure in Higher rank symmetric spaces*.
CRAS (1997) Tome 324 série I n°4.
- [Be] Benoist Y. : *Propriétés asymptotiques des groupes linéaires* (preprint 96).
- [Bo] Bourdon M. : *Structures conformes au bord et flot géodésique d'un CAT(-1)-espace*.
L'Enseignement Mathématique, t. 41, (1995), 63-102.
- [Bu] Burger M. : *Intersection, Manhattan curve, and Patterson-Sullivan theory in rank 2*.
International Mathematics research notices (1993) n°7, 217-225.
- [C] Coornaert M. : *Mesures de Patterson-Sullivan sur le bord d'un espace hyperbolique au sens de Gromov*. Pacific Journal of Mathematics vol. 159 n°2 (1993) pp. 241-270.
- [DP1] Dal'bo F., Peigné M. : *Groupes du Ping-Pong et géodésiques fermées en courbure -1*.
Annales de l'Institut Fourier, 46, n°3 (1996).
- [DP2] Dal'bo F., Peigné M. : *Some negatively curved manifolds with cusps, mixing and counting*. J. reine angew. Math. (à paraître).
- [G] Guivarc'h Y. : *Produits de matrices aléatoires et applications aux propriétés géométriques des sous-groupes du groupe linéaire*. Ergod. th. and Dynam. Sys. (1990), 10, 483-512.
- [G-H] Ghys E. et De La Harpe P. : *Sur les groupes hyperboliques d'après M. Gromov*.
Progress in Mathematics. Vol. 83 Birkhauser (1990).
- [K] Kaimanovitch V. : *Ergodicity of harmonic invariant measures for the geodesic flow on hyperbolic spaces*. J. reine angew. Math. 455 (1994), 57-103.
- [[S] Schmutz P. : *Riemann surfaces with shortest geodesic of maximal length*. Geom. Funct. Anal. 3 (1993) n°6, 564-631.

F. Dal'bo
 Institut Mathématiques de Rennes
 Université de Rennes 1
 Campus de Beaulieu
 35042 Rennes cedex
 dalbo@univ-rennes1.fr