Frédéric Hélein

Surfaces à courbure moyenne constante et inégalité de Wente

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 15 (1996-1997), p. 43-52
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1996-1997__15__43_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
1996–1997 (43–52)

SURFACES À COURBURE MOYENNE CONSTANTE ET INÉGALITÉ DE WENTE

Frédéric HÉLEIN

Dans ce texte, je vais brièvement exposer une approche variationnelle relativement classique pour l'étude des surfaces à courbure moyenne constante et plus particulièrement l'étude de la généralisation du problème de Plateau à ces surfaces. Il s'agit de chercher une immersion conforme dont l'image est une surface à courbure moyenne constante s'appuyant sur un contour donné. Un ingrédient essentiel dans les théorèmes de régularité et d'existence est une inégalité découverte par H. Wente [W1] et développée par H. Brezis et J.-M. Coron [BC].

Je voudrais insister sur cette inégalité et sur l'étude des constantes optimales qui y interviennent, complétée récemment par S. Baraket, P. Topping et Y. Ge. Des phénomènes profondément analogues à ceux intervenant dans l'étude des meilleures constantes pour l'injection de Sobolev de $H^1(\mathbb{R}^n)$ dans $L^{\frac{2n}{n-2}}(\mathbb{R}^n)$ apparaissent.

1. Surfaces minimales et surfaces à courbure moyenne constante

1.1. Surfaces minimales

Le problème de Plateau consiste, étant donnée une courbe fermée Γ dans l'espace, à trouver une surface Σ d'aire minimale dont le bord est exactement Γ. Spécialisons-nous au cas où Γ est difféomorphe au cercle et Σ est simplement connexe. On définit alors

$$\mathscr{E} = \left\{\Sigma \text{ surfaces difféomorphes au disques immergées dans } \mathbb{R}^3; \partial\Sigma = \Gamma\right\}$$

et la fonctionnelle $\mathscr{A}(\Sigma)$ = aire de Σ sur $\mathscr{E}$. Les points critiques de $\mathscr{A}$ sur $\mathscr{E}$ sont appelés (à tort, car non forcément minimisantes) *surfaces minimales* et sont des surfaces dont la

Classification math. : 35, 49, 53

courbure moyenne s'annule partout.

Sous cette forme, le problème est très mal posé, car il est nécessaire de préciser la théorie de la mesure et la topologie mise en jeu. Une voie possible est la théorie de la mesure géométrique. Une autre démarche, plus ancienne, consiste à étudier des paramétrisations de surfaces de $\mathscr{E}$ et donc à remplacer $\mathscr{E}$ par

$$\mathscr{F} = \left\{D^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 / u \text{ est une immersion et } u \text{ envoie } \partial D^2 \text{ sur } \Gamma\right\}$$

et de chercher les minima (ou les points critiques) de la fonctionnelle

$$A(u) = \int_{D^2} \left|\frac{\partial u}{\partial x} \times \frac{\partial u}{\partial y}\right| dxdy = \mathscr{A}(u(D^2))$$

sur $\mathscr{F}$. (Ici, D^2 est le disque unité du plan $\mathbb{R}^2$ et $\times$ désigne le produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$.)

Cette façon de poser le problème est encore insuffisante pour plusieurs raisons, dont la principale est qu'un ensemble de la forme

$$\{u \in \mathscr{F} / A(u) \leqslant C\}$$

est beaucoup trop gros pour être un compact dans une topologie raisonnable (en effet, si $\phi : D^2 \longrightarrow D^2$ est n'importe quel difféomorphisme, alors $A(u(\phi)) = A(u)$; or le semi-groupe des difféomorphismes est énorme).

D'où l'idée, essentiellement mise en œuvre par J. Douglas, T. Radó, puis par C.B. Morrey, de remplacer A par l'énergie de Dirichlet

$$E(u) = \int_{D^2} \frac{1}{2}|du|^2 dxdy,$$

où $|du|^2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha}\right)^2$. Une justification naïve, mais sensée, de cette substitution est que

$$E(u) - A(u) = \int_{D^2} \Big(\frac{|du|^2}{2} - \left|\frac{\partial u}{\partial x} \times \frac{\partial u}{\partial y}\right|\Big) dxdy$$

est une quantité toujours positive ou nulle et qui s'annule si et seulement si u est une immersion conforme. Or on sait que toute surface admet une paramétrisation conforme, donc si par exemple il y a une surface Σ_0 qui minimise $\mathscr{A}$, alors il y a une paramétrisation conforme de Σ_0, qui minimise E et A à la fois.

En fait, il y a une autre justification – moins naïve – pour remplacer A par E et qui est que, dans la mise en œuvre de la méthode variationnelle, les choses marchent de façon magique. En voici les grandes lignes.

On peut déjà munir $\mathscr{F}$ d'une topologie et poser

$$\mathscr{F} = \left\{u \in H^1(D^2, \mathbb{R}^3) / u_{|\partial D^2} \text{ est une paramétrisation monotone de } \Gamma\right\}.$$

Ici $H^1(D^2, \mathbb{R}^3)$ est l'espace des applications mesurables de D^2 vers $\mathbb{R}^3$ qui sont de carré intégrable et dont les dérivées au sens des distributions sont aussi de carré intégrable. Examinons à présent l'équation d'Euler-Lagrange.

Soit $u \in \mathcal{F}$ un point critique de E, en écrivant que

$$E(u + \epsilon v) = E(u) + o(\epsilon),$$

pour tout $v \in H^1(D^2, \mathbb{R}^3)$ avec $v = 0$ sur ∂D^2, on obtient aisément que $\Delta u = 0$. Cela ne garantit pas que $u(D^2)$ est à courbure moyenne nulle, sauf si on sait que u est conforme, id est

$$|u_x|^2 - |u_y|^2 = \langle u_x, u_y \rangle = 0.$$

Écrivons maintenant que u est point critique de E par rapport à des déformations de u du type $u \longrightarrow u \circ \phi_t$, où $\phi_t : D^2 \longrightarrow D^2$ est une famille de difféomorphismes telle que ϕ_0 est l'identité et $\phi_{t|\partial D^2}$ est un difféomorphisme de ∂D^2 dans lui lui-même. On obtient le système d'équation d'Euler suivant. Si $\phi_t(x) = x + tZ(x)$, où $Z = X + iY$, alors

$$\begin{aligned} E(u \circ \phi_t) = E(u) + t \int_{D^2} [& (|\partial_x u|^2 - |\partial_y u|^2)(\partial_x X - \partial_y Y) \\ & + 2\langle \partial_x u, \partial_y u \rangle (\partial_x Y + \partial_y X)] dxdy + o(t). \end{aligned}$$

D'où l'on déduit que si l'on note

$$\omega : = |u_x|^2 - |u_y|^2 - 2i\langle u_x, u_y \rangle \in \mathbb{C}$$

la "différentielle de Hopf", alors

$$\frac{\partial \omega}{\partial \overline{z}} = 0 \text{ sur } D^2$$

$$\operatorname{Im}(\omega(n)^2) = 0 \text{ sur } \partial D^2, \text{ où } n = n^1 + in^2 \text{ est le complexe unité normal à } \partial D^2.$$

La deuxième équation provient du fait que la restriction de ϕ_t au bord de D^2 n'est pas nécessairement l'identité et que donc on autorise des "glissements" parallèlement au bord (c'est donc dû à la structure particulière de $\mathcal{F}$).

Ces deux conditions entraînent que ω est une fonction holomorphe telle que ωz^2 soit réel sur ∂D^2, donc que $\omega = 0$. Nous en déduisons que u est conforme.

Conclusion. Les points critiques de E sur $\mathcal{F}$ sont solutions de

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Delta u & = & 0 \\ |u_x|^2 - |u_y|^2 - 2i\langle u_x, u_y \rangle & = & 0. \end{array} \right. \tag{1}$$

Démontrer l'existence de tels points critiques minimisants est possible. Cela nécessitera de remplacer $\mathscr{F}$ par $\mathscr{F}' = \{u \in \mathscr{F} / u(1) = M_0, u(e^{\frac{i\pi}{3}}) = M_1, u(e^{\frac{i2\pi}{3}}) = M_2\}$ où M_1, M_2 et M_3 sont trois points distincts sur Γ. Cet artifice ne change pas l'équation d'Euler du problème et permet de geler l'action du groupe (à trois paramètres) des transformations conformes de D^2, source d'un défaut de compacité. Ce résultat d'existence a été obtenu par J. Douglas [D] et T. Radó [R] dans les années 1930.

1.2. Surfaces à courbure moyenne constante

Il s'agit des surfaces dont la courbure moyenne est partout égale à une constante $H \in \mathbb{R}$. Si $H = 0$, on retrouve les surfaces minimales, ainsi l'usage est de réserver l'appellation "surface à courbure moyenne constante" aux surfaces telles que $H \neq 0$. Par changement d'échelle et d'orientation, tous ces problèmes sont équivalents au cas où $H = 1$. Notons que pour toute immersion conforme u d'un domaine bidimensionnel, la courbure moyenne est la fonction scalaire h telle que

$$-\Delta u = 2hu_x \times u_y.$$

Par conséquent, la recherche des immersions conformes à courbure moyenne constante conduit à l'étude du système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta u & = & 2H u_x \times u_y \\ |u_x|^2 - |u_y|^2 - 2i\langle u_x, u_y\rangle & = & 0. \end{array} \right. \tag{2}$$

D'une façon tout à fait analogue à ce qui se produisait avec les surfaces minimales, les solutions de ce système sont obtenues sur D^2 comme les points critiques de la fonctionnelle

$$E(u) + 2HV(u)$$

où $V(u)$ est le volume de l'espace contenu entre $u(D^2)$ et une autre surface de référence s'appuyant sur Γ. Par exemple, on peut prendre

$$V(u) = \frac{1}{3} \int_{D^2} u.u_x \times u_y dxdy.$$

L'existence de solutions minimisantes pour le problème de Plateau a été obtenue par S. Hildebrandt [Hi] (modulo l'hypothèse que H diam(Γ) $\leqslant 2$). Une deuxième solution, non minimisante, a été construite par H. Brezis et J.-M. Coron [BC]. En général, pour ces solutions, l'équation $-\Delta u = 2H u_x \times u_y$ n'est satisfaite qu'au sens des distributions car a priori, $u \in H^1$. H. Wente a démontré la régularité ($\mathscr{C}^\infty$) de toute solution faible à cette équation [W1]. La preuve utilise de façon remarquable la structure algébrique du produit vectoriel $u_x \times u_y$ et plus précisément, que chacune des composantes de ce vecteur a la structure d'un mineur. C'est l'objet de la section suivante.

D'une manière générale, il est envisageable d'étendre ces méthodes pour montrer l'existence de surfaces Σ topologiquement plus complexes. Mais une difficulté apparaît : les points critiques de $E(u)$ ou de $E(u) + 2HV(u)$ ne sont pas conformes en général. Au mieux, on peut montrer qu'un point critique u satisfait la condition que la forme quadratique $\omega = [|u_x|^2 - |u_y|^2 - 2i\langle u_x, u_y\rangle](dz)^2$ est dans un sous-espace vectoriel de dimension finie de l'ensemble des formes différentielles quadratiques holomorphes sur Σ. Ce sous-espace vectoriel est de dimension 0 si Σ est un disque, mais plus généralement, sa dimension est égale à celle de l'espace des modules des structures complexes sur Σ.

Ces difficultés expliquent en partie que l'on ne sache pas à l'heure actuelle démontrer l'existence d'immersions de surfaces compactes à courbure moyenne constante de genre supérieur où égal à 1 par des techniques variationnelles. Cependant, on sait depuis la construction en 1984 par H. Wente d'un tore à courbure moyenne contante immergé [W2] que de telles surfaces existent.

2. Inégalité de Wente

H. Brezis et J.-M. Coron [BC] ont dégagé de la preuve de H. Wente [W1] le résultat suivant

LEMME 2.1. — *Soit $a, b \in H^1(D^2, \mathbb{R})$ et considérons la solution ϕ de*

$$\begin{cases} -\Delta\phi = \{a, b\} & \text{sur } D^2 \\ \phi = 0 & \text{sur } \partial D^2, \end{cases} \tag{3}$$

où $\{a, b\} := a_x b_y - a_y b_x$. Alors $\phi \in H^1(D^2, \mathbb{R}) \cap \mathscr{C}^0(D^2, \mathbb{R})$ et on a les estimations

$$\|\phi\|_{L^\infty} \leqslant C_\infty \|da\|_{L^2} \|db\|_{L^2}, \tag{4}$$

$$\|d\phi\|_{L^2} \leqslant C_2 \|da\|_{L^2} \|db\|_{L^2}. \tag{5}$$

Ce qui est remarquable dans ce résultat est qu'il ne peut pas être obtenu par une application directe de la théorie de Calderon-Zygmund, à savoir en utilisant le fait que le second membre de (3), $\{a, b\}$ est dans l'espace L^1. En effet, ici, la théorie classique ne donne des estimations que dans des espaces légèrement plus grands. Le surcroît donné par ce lemme provient uniquement de la structure algébrique de $\{a, b\}$ et en particulier du fait que des manipulations du style $\{a, b\} = \frac{\partial}{\partial x}(ab_y) - \frac{\partial}{\partial y}(ab_x)$ sont possibles. Ce genre de miracle est familier des spécialistes de la théorie de la compacité par compensation.

Une application directe de ce lemme permet de déduire immédiatement que toute solution faible dans H^1 de $-\Delta u = 2H u_x \times u_y$ est continue. Il suffit d'écrire ce système composante par composante. Une fois que l'on sait que u est continue, la théorie classique des systèmes elliptiques du second ordre [LU] permet de déduire que u est $\mathscr{C}^\infty$. Ce lemme joue également un gand rôle dans les résultats d'existence obtenus par H. Brezis et J.-M. Coron.

On peut réinterpréter ce résultat en construisant l'opérateur bilinéaire $T : (a, b) \longrightarrow \phi$, solution de (3) et en disant que cet opérateur applique continûment $H^1(D^2) \times H^1(D^2)$ dans $H^1(D^2)$ et dans $\mathscr{C}^0(D^2)$.

La question qui va nous intéresser dans la suite est la recherche de la norme de cet opérateur évaluée dans ces deux topologie, ou autrement dit la recherche des meilleures constantes $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_\infty$ dans les inégalités (4) et (5). Nous allons aussi élargir le problème et remplacer D^2 par n'importe quel ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ ou même une surface riemannienne $\mathscr{M}$ avec ou sans bord.

Une première remarque est que ces constantes sont invariantes par transformations conformes et donc ne dépendent que de la structure conforme de Ω ou de $\mathscr{M}$. Ainsi la question précédente a un sens non seulement sur une surface riemannienne mais aussi sur une surface de Riemann. Deuxièmement, F. Bethuel et J.-M. Ghidaglia ont démontré en 1992 que ces deux constantes sont majorées par une certaine constante indépendante du domaine [BG]. Mais à la suite, il n'était pas clair si ces constantes dépendaient ou non du domaine. On peut aujourd'hui répondre à toutes ces questions.

- en 1993, S. Baraket a montré que pour tout domaine Ω ou toute surface de Riemann $\mathscr{M}$, $\mathscr{C}_\infty(\mathscr{M}) \geqslant \frac{1}{2\pi}$ [Ba].
- en 1995, P. Topping a montré que réciproquement pour tout domaine Ω ou toute surface de Riemann $\mathscr{M}$, $\mathscr{C}_\infty(\mathscr{M}) \leqslant \frac{1}{2\pi}$. Donc $\mathscr{C}_\infty(\mathscr{M}) = \frac{1}{2\pi}$ [T].
- dernièrement, en 1996, Y. Ge a prouvé que, si $\partial\mathscr{M} \neq \emptyset$, $\mathscr{C}_2(\mathscr{M}) = \sqrt{\frac{3}{16\pi}}$ et si $\partial\mathscr{M} = \emptyset$, $\mathscr{C}_2(\mathscr{M}) = \sqrt{\frac{3}{32\pi}}$ [G].

Pour obtenir une minoration de ces constantes, la méthode consiste à exhiber une suite maximisante (qui en général ne va pas converger à cause de phénomènes de concentration). Les majorations de ces constantes reposent sur des utilisations judicieuses de l'inégalité isopérimétrique.

Pour donner une idée des preuves, montrons le résultat suivant:

LEMME 2.2. — *([Ge]) $\forall (a, b) \in H^1(D^2)$, $\forall \phi$, solution de (3),*

$$\|d\phi\|_{L^2} \leqslant \sqrt{\frac{3}{16\pi}}\|da\|_{L^2}\|db\|_{L^2}.$$

Cette constante est atteinte pour $(a, b) = \frac{2}{1+r^2}(x, y)$ et $\phi = \frac{1-r^2}{2+2r^2}$. Cela établit que $\mathscr{C}_2(D^2) = \sqrt{\frac{3}{16\pi}}$.

Démonstration. — Commençons par considérer $(a,b) \in H^1(D^2, \mathbb{R}^2) \cap \mathscr{C}^\infty(D^2, \mathbb{R}^2)$, le cas général s'en déduira par densité. Nous construisons une application u de S^2 dans $\mathbb{R}^3$ de la façon suivante. Nous identifions S^2 avec $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ via la projection stéréographique et nous posons

$$u(z) = \begin{pmatrix} a(z) \\ b(z) \\ -t\phi(z) \end{pmatrix} \text{ si } |z| \leqslant 1,$$

et

$$u(z) = \begin{pmatrix} a(z|z|^{-2}) \\ b(z|z|^{-2}) \\ -t\phi(z|z|^{-2}) \end{pmatrix} \text{ si } |z| \geqslant 1,$$

où t est un paramètre réel et ϕ est la solution de (3). Soit V le volume algébrique enfermé par l'image de u dans $\mathbb{R}^3$ et A l'aire de l'image de u. D'une part

$$\begin{aligned} V &= 2\int_{D^2} u^3\{u^1, u^2\} dxdy \\ &= 2t\int_{D^2} \phi\{u^1, u^2\} dxdy \\ &= -2t\int_{D^2} \phi\Delta\phi dxdy \\ &= 2t\int_{D^2} |d\phi|^2 dxdy. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} A &= 2\int_{D^2} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \times \frac{\partial u}{\partial y} \right| dxdy \\ &\leqslant \int_{D^2} |du|^2 dxdy \\ &= \int_{D^2} (|da|^2 + |db|^2 + t^2|d\phi|^2) dxdy. \end{aligned}$$

En remplaçant A et V selon les deux formules précédentes dans l'inégalité isopérimétrique

$$36\pi V^2 \leqslant |A|^3,$$

on obtient

$$144\pi t^2 \|d\phi\|_{L^2}^4 \leqslant \left(\|d(a,b)\|_{L^2}^2 + t^2 \|d\phi\|_{L^2}^2 \right)^3.$$

En choisissant

$$t^2 = \frac{3}{16\pi} \left(\frac{\|d(a,b)\|_{L^2}^2}{2} \right)^2,$$

on obtient l'inégalité annoncée dans le lemme, ce qui conduit bien à $\mathscr{C}_2(D^2) \leqslant \sqrt{\frac{3}{16\pi}}$. *CQFD.*

2.3. Un problème variationnel avec défaut de compacité

La recherche de $\mathscr{C}_2(\mathcal{M})$ pour une surface $\mathcal{M}$ quelconque revient à étudier le problème variationnel

$$\mathrm{Sup}\left\{ \frac{\|d\phi\|_{L^2}}{\|da\|_{L^2}\|db\|_{L^2}} / \phi \text{ solution de (3)}, a, b \in H^1(\mathcal{M}) \setminus \{0\} \right\}, \tag{6}$$

ou encore

$$\mathrm{Sup}\{ \frac{2\|d\phi\|_{L^2}}{\|d(a,b)\|^2_{L^2}} / \phi \text{ solution de (3)}, (a,b) \in H^1(\mathcal{M}, \mathbb{R}^2) \setminus \{0\}\}. \tag{7}$$

Il est facile de montrer que d'ailleurs ces deux suprema sont égaux. Le résultat précédent dit que cet extremum est atteint dans le cas où $\mathcal{M} = D^2$. Plus généralement,

THÉORÈME 2.3. — ([G]) *Le maximum dans (7) est atteint si et seulement si $\mathcal{M}$ est simplement connexe (id est $\mathcal{M}$ est conformément équivalent à D^2 ou S^2). Si $\mathcal{M}$ n'est pas simplement connexe, toute suite minimisante converge faiblement vers 0.*

Cela est essentiellement dû à l'invariance du problème par transformations conformes, source de phénomènes de concentration, comme dans le problème de Yamabe.

2.4. Une relation inattendue avec les H-surfaces

On peut plus généralement s'intéresser aux points critiques de la fonctionnelle suivante sur $H^1(\mathcal{M}, \mathbb{R}^2)$

$$\mathscr{W}(a,b) := \frac{2\|d\phi\|_{L^2}}{\|d(a,b)\|^2_{L^2}},$$

où ϕ est défini à partir de (a,b) comme étant solution de (3). L'équation d'Euler-Lagrange de cette fonctionnelle prend la forme particulièrement simple suivante.

LEMME 2.4. — ([Hé]) *Soit $(a,b) \in H^1(\mathcal{M}, \mathbb{R}^2)$ un point critique de $\|d(a,b)\|^2_{L^2}$, sous la contrainte $\|d\phi\|_{L^2} = 1$. Alors, a, b et ϕ satisfont à l'équation*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta a & = & \lambda\{a, \phi\} \\ -\Delta b & = & \lambda\{\phi, a\} \\ -\Delta \phi & = & \{a, b\}, \end{array} \right.$$

sur $\mathcal{M}$, avec les conditions au bord

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial a}{\partial n} = \dfrac{\partial b}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{M} \\ \phi = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{M}, \end{array} \right.$$

où $\lambda = \|da\|_{L^2}^2 = \|db\|_{L^2}^2$. *De façon équivalente, si on définit* u *de* $\mathcal{M}$ *vers* $\mathbb{R}^3$ *par*

$$u = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda}a \\ \sqrt{\lambda}b \\ \lambda\phi \end{pmatrix},$$

alors, dans des coordonnées locales conformes,

$$-\Delta u = 2\frac{\partial u}{\partial x} \times \frac{\partial u}{\partial y}.$$

De plus, u *est de classe* $\mathscr{C}^\infty$.

Ainsi l'étude de ce problème variationnel conduit à une approche variationnelle des surfaces à courbure moyenne constante. Il est à noter cependant que les points critiques de ce problème variationnel ne conduisent pas nécessairement à des solutions conformes du système (3). Nous retrouvons ainsi une difficulté de l'approche variationnelle classique.

Yuxin Ge a obtenu le résultat d'existence suivant, inspiré d'un résultat analogue dû à Jean-Michel Coron, qui concernait le problème de Yamabe [C].

THÉORÈME 2.5. — ([Ge]) *Soit* x_i *des points distincts dans* D^2, *et* r_i *des réels positifs. On note* $B(x_i, r_i)$ *la boule ouverte de centre* x_i *et de rayon* r_i *on suppose que* x_i *et* r_i *sont tels que ces boules sont disjointes. Soit* $\Omega = D^2 \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_i)$, *alors il existe* $\epsilon > 0$ *tel que si* $r_i < \epsilon \forall i$, *alors il existe un point critique du problème variationnel (7).*

La démonstration repose sur une étude détaillée de la topologie des ensemble de niveau de la fonctionnelle. On doit aussi vérifier que l'on travaille dans une zone où la condition de Palais-Smale est vérifiée. En cela, la stratégie est très proche de celle de J.-M. Coron. La solution obtenue est, bien entendu, non minimisante.

Bibliographie

[B] S. BARAKET. — *Estimation of the best constant involving the L^∞ norm in Wente's inequality*, Annales de l'Université Paul Sabatier.

[BC] H. BREZIS, J.-M. CORON. — *Multiple solutions of H-systems and Rellich's conjecture*, Comm. Pure Appl. Math. 37 (1984), 149–187.

[BG] F. BETHUEL, J.-M. GHIDAGLIA. — *Improved regularity of elliptic equations involving Jacobians and applications*, J. Math. Pures Appl. 72 (1993), 441–475.

[C] J.-M. CORON. — *Topologie et cas limite des injections de Sobolev*, C. R. Acad. Sc. Paris 299 (1984), 209–212.

[D] J. DOUGLAS. — *Solution of the problem of Plateau*, Trans. Amer. Math. Soc. 33 (1931), 263–321.

[Ge] Y. GE. — *Estimation of the best constant involving the L^2 norm in Wente's inequality* et *Wente's inequality and compact H-surface into Euclidean space*, à paraître dans COCV.

[Hé] F. HÉLEIN. — *Applications harmoniques, lois de conservation et repères mobiles*, Diderot éditeur, Paris, 1996.

[Hi] S. HILDEBRANDT. — *On the Plateau problem for the surfaces of constant mean curvature*, Comm. Pur Appl. Math. 23 (1970), 97–114.

[LU] O. LADYZHENSKAYA, N. URAL'CEVA. — *Équations aux dérivées partielles de type elliptique*, Dunod, Paris, 1969.

[R] T. RADÓ. — *On Plateau's problem*, Ann. of math. 31 (1930), 457–469.

[T] P. TOPPING. — *The optimal constant in Wente's L^∞ estimate*, à paraître dans Comm. Helv. Math.

[W1] H. WENTE. — *An existence theorem for surfaces of constant mean curvature*, J. Math. Anal. Appl. 26 (1969), 318=344; *Large solutions to the volume constraint Plateau problem*, Arch. rat. Mech. Anal. 75 (1980), 59–77.

[W2] H. WENTE. — *Counter-example to a conjecture of H. Hopf*, Pacific J. Math. 121 (1986), 193–243.

Frédéric HÉLEIN
CMLA, ENS de Cachan
61, avenue du Président Wilson
94235 CACHAN Cedex (France)
helein@cmla.ens-cachan.fr