Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

François Salein

Variétés anti-de Sitter de dimension 3

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 15 (1996-1997), p. 37-42
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1996-1997__15__37_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
1996–1997 (37–42)

VARIÉTÉS ANTI-DE SITTER DE DIMENSION 3

François SALEIN

RÉSUMÉ. — Le but de cet exposé est de construire toutes les variétés anti-de Sitter compactes de dimension 3 possédant un champ de Killing non trivial.

1. Introduction

Une structure pseudo-riemannienne sur une variété M de dimension n consiste en la donnée d'un tenseur symétrique non dégénéré d'une certaine signature. Le cas riemannien correspond à une signature $(n, 0)$, le cas lorentzien à une signature $(n-1, 1)$. Tout comme dans le cas riemannien, on peut définir à partir d'une structure pseudo-riemannienne une connexion de Levi-Civita, des géodésiques, un tenseur courbure.

Les variétés lorentziennes à courbure négative constante égale à -1 sont appelées anti-de Sitter. En dimension 3, elles sont modelées sur le groupe de Lie $PSL_2(\mathbb{R})$ (noté PSL_2) muni de sa forme de Killing divisée par 8. Cette structure lorentzienne sur PSL_2 possède l'avantage d'être bi-invariante et complète: si on associe l'espace tangent à PSL_2 en l'identité à l'algèbre de Lie des champs de vecteur invariant par multiplication à gauche $sl_2 = \{A \in M_2(\mathbb{R})$ tel que $tr(A) = 0\}$ alors la forme de Killing K s'exprime ainsi: $K(A, B) = tr(A.B)$ où A et B sont éléments de psl_2. Le groupe d'isométrie de cette structure est $I = PSL_2 \times PSL_2 \rtimes (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ où $G = PSL_2 \times PSL_2$ sous-groupe d'indice 4 agit par multiplication à gauche, et par multiplication à droite par l'inverse et $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ est engendré par le passage à l'inverse et la conjugaison par $u = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]$.

Les premiers exemples de variétés anti-de Sitter fermées de dimension 3 sont obtenus en quotientant le revêtement universel de PSL_2, $\widetilde{PSL_2}$ par un de ses sous-groupes dis-

Classification math. : 53C50 (22E40, 58F17, 57S30, 57M05, 30F45).

crets cocompacts $\tilde{\Gamma}$ agissant par multiplication à gauche. Les déformations non-standards de tels exemples ont été découvertes par E.Ghys et W.M.Goldman (voir [4], [6]). Elles sont obtenues en quotientant $\widetilde{PSL_2}$ par Graph$(\tilde{\Gamma},\tilde{\rho}) = \{(x,\tilde{\rho}(x)),\ x \in \tilde{\Gamma}\}$, où $\tilde{\rho}$ est une représentation de $\tilde{\Gamma}$ dans $\widetilde{PSL_2}$, proche de la représentation constante. En fait, des quotients similaires permettent d'obtenir toutes les variétés anti-de Sitter compactes de dimension 3, modulo revêtement fini, en effet:

1. De telles variétés ont comme revêtement universel lorentzien $\widetilde{PSL_2}$. Attention, ce résultat n'est pas trivial, car contrairement au cas riemannien où toutes les variétés compactes sont complètes, dans le cas lorentzien la complétude géodésique des variétés compactes n'est vraie que dans des cas très particuliers. Dans le cas de la courbure constante, B.Klinger l'a montré en généralisant récemment un résultat qu'Y. Carrière avait obtenu sur les variétés lorentziennes de courbure nulle(voir [3], [7]). Ces résultats ont permis de construire toutes les variétés lorentziennes compactes de courbure nulle et de montrer qu'il n'existait pas de variétés compactes de Sitter c'est-à-dire de courbure constante +1.

2. Kulkarni et Raymond ont montré (voir [9]) que les variétés anti-de Sitter compactes de dimension 3 étaient en fait obtenues comme quotient d'un revêtement fini de PSL_2. De plus, les seuls sous-groupes de G agissant de façon libre propre et cocompacte sur PSL_2 sont de la forme (modulo inversion de facteurs) Graph$(\Gamma,\rho) = \{(\gamma,\rho(\gamma)),\gamma \in \Gamma\}$, où Γ est un sous-groupe de PSL_2, isomorphe au groupe fondamental d'une surface fermée, et ρ une représentation de ce sous-groupe dans PSL_2.

Si un tel groupe agit proprement, librement et donne un quotient compact, la représentation sera appelée Γ-*admissible* ou admissible s'il n'y a pas d'ambiguité .

Trouver toutes les représentations Γ-admissibles pour tout Γ sous-groupe cocompact de PSL_2 est donc équivalent à la classification des variétés anti-de Sitter compactes de dimension 3 modulo revêtement fini.

Un champ de Killing sur une variété lorentzienne M est un champ de vecteur engendrant un flot isométrique. Comme les seuls champs de Killing non triviaux sur PSL_2 sont ceux engendrés par les sous-groupes à un paramètre de G, l'étude des variétés anti-de Sitter de dimension 3 admettant un champ de Killing non trivial équivaut à trouver toutes les représentations admissibles dans des sous-groupes à un paramètre (i.e. dans des sous-groupes abéliens).

Notations. — si A est un élément de $SL_2(\mathbb{R})$, son image dans PSL_2 sera notée $[A]$. La matrice 2-2 diagonale de diagonale (e^l, e^{-l}) sera notée $Exp(l)$ de même que sa projection dans PSL_2.

Le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}^2$ sera muni de la distance hyperbolique $d_{\mathbb{H}^2}$, on identifie son groupe d'isométrie à PSL_2.

Dorénavant, Γ sera un sous-groupe de PSL_2 discret cocompact sans torsion c'est-à-dire isomorphe au groupe fondamental d'une surface $S = \mathbb{H}^2/\Gamma$. À chaque élément γ de Γ est associée une géodésique fermée sur S dont la longueur sera notée $t(\gamma) = \inf_{x\in\mathbb{H}^2} d(x, \gamma(x)) = 2Argch(1/2\, tr(\gamma))$.

2. Principaux résultats

THÉORÈME 2.1 (Classification des représentations abéliennes admissibles). — *Les représentations Γ-admissibles ρ dans des groupes à un paramètre sont :*

(i) toutes les représentations elliptiques ou paraboliques,

(ii) les représentations hyperboliques de la forme $\rho(\gamma) = Exp(u(\gamma)/2)$ (à une conjugaison près) telles que $u \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{R})$ appartienne à la boule unité ouverte de la norme stable (voir [1] et 3.2 plus bas) $\|\ \|_s$ définie sur $H^1(S, \mathbb{R})$.

THÉORÈME 2.2 (Classification des variétés fermées anti-de Sitter de dimension 3 admettant un champ de Killing non trivial). — *Modulo revêtement fini, ce sont les quotients de PSL_2 par le graphe d'une représentation d'un sous-groupe Γ décrite dans le théorème 2.1.*

Interprétations. — Dans le cas d'une représentation dans un sous-groupe à un paramètre, le flot engendré par ce sous-groupe dans PSL_2 passe au quotient. Ainsi, dans le cas hyperbolique, à chaque élément $\gamma \in \Gamma$ est associée une orbite périodique dans le quotient de période $|\, t(\gamma) - |u(\gamma)|\,|$, où $t(\gamma)$ est la longueur de la géodésique fermée dans S associée à γ.

Le morphisme u est un élément de $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{R})$ qui peut être étendu de manière triviale en un élément de $H^1(S, \mathbb{R})$. Lorsque l'on déforme la représentation triviale le long d'une représentation abélienne hyperbolique, la dégénérescence est obtenue seulement lorsqu'il apparait un h de $H_1(S, \mathbb{R})$ tel que $|u(h)| = \|h\|_s$ où $\|\ \|_s$ représente ici la norme stable de $H_1(S, \mathbb{R})$. Lorsque h est un point rationnel, cette condition exprime le fait qu'une géodésique fermée dans le quotient devient de période nulle.

Ce théorème affirme de plus qu'il n'y a pas de régénérescence (i.e. pas de représentations admissibles telles que $t(\gamma) - |u(\gamma)| < 0$). Ainsi, toute représentation abélienne admissible est obtenue à partir d'une déformation continue de la représentation constante le long des représentations abéliennes admissibles et l'ensemble de ces représentations est donc connexe par arc.

THÉORÈME 2.3. — *L'ensemble des représentations Γ-admissibles est un ouvert de* $\mathrm{Hom}(\Gamma, PSL_2)$.

3. Démonstrations

Nous ne donnerons ici qu'un résumé rapide des démonstrations pour plus de précision voir [10].

a. Idée de la preuve du théorème 2.3. — La preuve utilise le fait que les structures anti-de Sitter sont complètes (voir [7]) et donc d'après un principe observé par Ehresmann (voir [11], [6], [5]), on peut déformer une telle structure pour obtenir des variétés difféomorphes.

b. Résumé de la démonstration du théorème 2.1.

Remarque. — Comme $\mathrm{Graph}(\Gamma, \rho)$ est discret dans G et sans torsion, la liberté de son action sur PSL_2 découle de la propreté.

Soit ρ une représentation abélienne telle que $\mathrm{Graph}(\Gamma, \rho)$ agisse proprement, librement sur PSL_2. Le revêtement universel du quotient M_ρ est topologiquement $\mathbb{R}^3$ et son groupe fondamental $\pi_1(M_\rho)$ est isomorphe au groupe fondamental de la variété compacte PSL_2/Γ. Ainsi, $H_3(\pi_1(M_\rho), \mathbb{R}) \neq 0$ et l'action de $\mathrm{Graph}(\Gamma, \rho)$ est cocompacte, il suffit donc de vérifier que $\mathrm{Graph}(\Gamma, \rho)$ agisse proprement, librement sur PSL_2 pour qu'il agisse de façon cocompacte.

Le problème d'admissibilité est invariant par conjugaison de ρ par un élément de PSL_2.

(i) Cas elliptique ou parabolique:

Cas elliptique : on peut construire sur PSL_2 une métrique riemannienne g invariante par $\mathrm{Graph}(\Gamma, \rho)$ qui agit alors de façon propre comme sous-groupe discret des isométries de g.

Cas parabolique : toute représentation parabolique est conjuguée à une représentation proche de la représentation triviale. On conclut alors par le théorème 2.3 (voir [6] et [5]).

(ii) Cas hyperbolique : on va utiliser un critère dû dans le cas général à Y. Benoist (voir [2]).

LEMME 3.1 (Critère de propreté). — *Le sous-groupe* $Graph(\Gamma,\rho)$ *de* G *agit proprement sur* PSL_2 *si et seulement si :* (1) $\lim_{l(\gamma)\to\infty} |l(\gamma) - l(\rho(\gamma))| = +\infty$, *où* $l(\gamma) = 2d_{\mathbb{H}^2}(i,\gamma(i))$.

DÉFINITION 3.2 (voir [1] et [9]). — *La norme stable sur* $H_1(S,\mathbb{R})$ *est définie comme suit :*

$$\text{si } h \in H_1(S,\mathbb{Z}),\ \|h\|_s = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \inf\{t(\gamma_n),\ \text{où } \gamma_n \in \Gamma = \pi_1(S) \text{ représente } nh\}$$

Ensuite, on étend cette définition par homogénéité aux points rationnels de $H_1(S,\mathbb{R})$, *puis par uniforme continuité à tout* $H_1(S,\mathbb{R})$. *Sur* $H^1(S,\mathbb{R})$, *la norme stable est définie par dualité.*

LEMME 3.3 (non régénérescence des représentations hyperboliques). — *Si une représentation hyperbolique de la forme* $\rho(\gamma) = Exp(u(\gamma)/2)$ *est admissible alors, pour tout* γ *élément de* Γ, $|u(\gamma)| < t(\gamma)$.

La preuve de ce lemme est obtenue en appliquant le critère de propreté 3.1 à des produits du type $\gamma_1^{n_1}.\gamma_2^{n_2}$, où γ_1 et γ_2 sont des éléments de Γ.

LEMME 3.4 . — *Les représentations hyperboliques sont de la forme* $\rho(\gamma) = Exp(u(\gamma)/2)$ *(à conjugaison près) et sont admissibles si et seulement* u *est dans la boule unité ouverte de la norme stable de* $H^1(S,\mathbb{R})$.

Preuve. — D'après le lemme précédent, si la représentation ρ est admissible, pour tout γ élément de Γ, $|u(\gamma)| < t(\gamma)$ soit, pour tout h dans $H_1(S,\mathbb{Z})$, $|u(h)| \leq \lim_{n\to\infty} 1/n \ \inf\{t(\gamma)/\gamma$ représente $nh\}$, c'est-à-dire $|u(h)| \leq \|h\|_s$, soit $\|u\|_s \leq 1$ mais d'après le théorème 2.3, l'ensemble est ouvert donc $\|u\|_s < 1$. Réciproquement, si $\|u\|_s < 1$, alors pour tout γ de Γ, $|u(\gamma)| \leq \|u\|_s t(\gamma)$ et $|u(\gamma)| \leq \|u\|_s l(\gamma)$, soit $\lim_{l(\gamma)\to\infty} l(\gamma) - |u(\gamma)| = +\infty$. La représentation est donc admisssible d'après le lemme 3.1. Ceci démontre le lemme 3.4 et le théorème 2.1.

Remarques. — Ce résultat peut s'étendre aux représentations résolubles. En effet, si ρ est une représentation de Γ dans un sous-groupe résoluble, trouver si elle est admissible revient à trouver toutes les représentations admissibles dans le groupe des matrices diagonales supérieures GA ou dans $N_{P_1}(A)$ le normalisateur dans PSL_2 des matrices unipotentes supérieures, or toutes les représentations dans $N_{P_1}(A)$ sont admissibles car elles vérifient le critère de propreté de Benoist ($t(\rho(\gamma)) = 0$ pout tous les éléments de Γ).

Si on étudie les représentations dans GA de la même manière que précédemment, on associe à chaque matrice $\rho(\gamma)$ un homomorphisme $u \in \mathrm{Hom}(\pi_1(S),\mathbb{R})$ tel que $u(\gamma) = 2Argch(1/2\ tr(\rho(\gamma)))$ et les mêmes calculs montrent que la représentation est admissible si et seulement si u est dans la boule unité ouverte de la norme stable.

Dans le cas non-résoluble, Goldman (voir [6]) a montré que les représentations discrètes fidèles n'étaient jamais admissibles, par contre dans les autres cas, la condition $t(\rho(\gamma)) < t(\gamma)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ reste une condition nécessaire d'admissibilité et la condition $l(\rho(\gamma)) < A \cdot l(\gamma)$ avec $0 < A < 1$ une condition suffisante.

Contrairement à ce que l'on pouvait penser, les représentations admissibles ne sont pas toutes des déformations de la représentation constante car l'ensemble des représentations admissibles n'est pas connexe, on peut en effet construire des représentations de classe d'Euler non maximales admissibles pour toutes classe d'Euler paires.

Remerciements. — Je remercie Abdelghani Zeghib pour son encadrement, ses encouragements et ses conseils.

Bibliographie

[1] V. Bangert. — *Minimal geodesics*, Erg. Th. et Dyn. Sys. 10 (1989), 263–286.

[2] Y. Benoist. — *Actions propres sur les espaces homogènes réductifs*, Ann. of Math(2) 144(2) (1996), 315–347.

[3] Y. Carrière. — *Autour de la conjecture de L. Markus sur les variétés affines*, Invent. Math. 95 (1989), 615–618.

[4] É. Ghys. — *Flots d'Anosov dont les feuilletages stables sont différentiables*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4e série 20 (1987), 251–270.

[5] É. Ghys. — *Déformations des structures complexes sur les espaces homogénes de $SL(2, \mathbb{C})$*, J. Reine angew. Math. 468 (1995), 113–138.

[6] W. M. Goldman. — *Nonstandard Lorentz space forms*, J. Differential Geometry 21 (1985), 301–308.

[7] B. Klinger. — *Complétude des Variétés Lorentziennes à Courbure Constante*, Math. Ann. 306 (2) (1996), 353–370.

[8] R. S. Kulkarni, F. Raymond. — *3-dimensional Lorentz space-forms and Seifert fiber spaces*, Journal of Differential Geometry 21 (1995), 231–268.

[9] D. Massart. — *Normes stables des surfaces*, Thèse ENS-Lyon, juin1996.

[10] F. Salein. — *Variétés anti-de Sitter de dimension 3 possédant un champ de Killing non trivial*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 324 (1997), 525–530.

[11] W. Thurston. — *The geometry and topology of 3-manifolds*, Princeton University lecture notes, 1977.

François SALEIN
UMPA
UMR 128
ENS Lyon
46, allée d'Italie
69364 LYON cedex 07 (France)
email : fsalein@umpa.ens-lyon.fr