Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Martine Babillot

Géodésiques et horocycles sur le revêtement d'homologie d'une surface hyperbolique

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 14 (1995-1996), p. 89-104
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1995-1996__14__89_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
1995–1996 (89–104)

GÉODÉSIQUES ET HOROCYCLES SUR LE REVÊTEMENT D'HOMOLOGIE D'UNE SURFACE HYPERBOLIQUE

Martine BABILLOT

RÉSUMÉ. — Soit $S = \Gamma\backslash \mathbf{H}^2$ une surface hyperbolique compacte et $S' = [\Gamma, \Gamma]\backslash \mathbf{H}^2$ son revêtement d'homologie. Nous construisons une infinité de mesures sur S' invariantes par le flot horocyclique, et nous montrons qu'elles sont ergodiques. Notre approche repose sur une estimée asymptotique du nombre de chemins géodésiques sur S' partant à l'infini dans certaines directions. Cette estimée permet également de dénombrer les points de Γ soumis à diverses contraintes de nature homologique.

Introduction

Deux articles fondamentaux paraissent presque simultanément en 1936. Dans le premier, Hopf prouve l'ergodicité du flot géodésique sur une surface hyperbolique compacte [Ho36]. Dans le deuxième, Hedlund montre la transitivité du flot horocyclique, puis son ergodicité en 1939 [He36] [He39]. Dès lors, de multiples travaux leur sont consacrés, notamment ceux de Selberg dont la formule des traces permet le dénombrement des géodésiques fermées sur ces surfaces [Se56]. En 1967, Anosov et Sinai posent les bases de la théorie générale des flots hyperboliques et des feuilletages stables qui leurs sont associés [An67] [AnS67]. L'étude de ces flots échappe alors aux outils de l'algèbre et/ou de l'analyse harmonique et grâce aux travaux de Ratner, Sinai et Bowen dans les années 70 entre dans le cadre de la dynamique symbolique, avec l'utilisation du formalisme thermodynamique de Ruelle.

On peut voir cet exposé comme un retour aux sources: dans deux travaux récents [BL95] [BL96], nous avons étudié par la dynamique symbolique certains aspects des flots hyperboliques, à savoir le dénombrement d'orbites (fermées ou non) soumises à des contraintes linéaires de nature très générale. Dans ce texte, nous explicitons les résultats obtenus pour le flot géodésique sur une surface hyperbolique compacte $S = \Gamma\backslash \mathbf{H}^2$. Ceux-ci s'interprêtent en effet en termes du flot géodésique et du flot horocyclique sur

Classification math.: 58F17.

le revêtement d'homologie $S' = [\Gamma,\Gamma]\backslash\mathbf{H}^2$ de S. Nous verrons ainsi que même si le flot géodésique n'est pas ergodique sur S' [Re81], il est possible de dénombrer certaines de ses orbites. De plus, il apparaît une famille de mesures sur le bord de l'espace hyperbolique qui sont conformes pour le groupe $[\Gamma,\Gamma]$ et dont l'étude nous parait mériter d'être approfondie. Ces mesures permettent en particulier de construire une infinité de mesures invariantes et ergodiques pour le flot horocyclique sur S'.

Ce texte s'organise comme suit. Après une rapide description du flot géodésique et du flot horocyclique sur une surface hyperbolique quelconque, on se concentre sur les revêtements d'homologie d'une surface compacte S. A toute classe de cohomologie α de $H^1(S,\mathbf{R})$ on associera:

- une série de Poincaré pondérée par α, dont l'exposant de convergence δ_α joue un rôle important dans les questions de dénombrement,
- une mesure sur le cercle qui est δ_α-conforme sous l'action de $[\Gamma,\Gamma]$,
- une mesure invariante m_α ergodique pour le flot géodesique sur S,
- une mesure invariante m'_α dissipative pour le flot géodesique sur S',
- une mesure invariante λ'_α pour le flot horocyclique sur S'.

Dans une troisième partie, on verra que les cycles asymptotiques des mesures m_α décrivent tout l'intérieur de la boule unité de $H_1(S,\mathbf{R})$ muni de la norme stable. On traite ensuite la question de l'ergodicité des mesures λ'_α en la ramenant à un problème de dénombrement de chemins géodésiques sur S' partant à l'infini dans certaines directions. On donnera alors une estimée asymptotique du nombre de tels chemins. Ceci fait l'objet de la quatrième partie. Nous finirons en énonçant brièvement des résultats analogues concernant le nombre de points du réseau Γ ou le nombre de géodésiques fermées de S satisfaisant à des contraintes de nature homologique.

On verra également qu'un certain nombre de questions se font jour –ne serait-ce qu'une preuve plus directe de ces résultats–, montrant ainsi que l'étude de ces deux systèmes dynamiques en mesure infinie que sont le flot géodésique et le flot horocyclique sur S' est encore loin d'être achevée.

Remerciements. — Les conversations que j'ai eues avec Jean-Pierre Otal pendant la rédaction de cet article m'ont été précieuses. Je l'en remercie.

1. Flots géodésique et horocyclique sur une surface hyperbolique.

1.1. — Soit $\mathbf{H}^2$ le plan hyperbolique, identifié ici avec le disque unité de $\mathbf{C}$ muni de la métrique hyperbolique d. Son bord à l'infini est alors le cercle S^1 avec la métrique euclidienne $|\ |$. Pour tout point u de S^1, on notera B_u la fonction de Busemann: $B_u(x) = \lim_{z\to u} d(x,z) - d(\overline{o},z)$ où $\overline{o}$ est l'origine de $\mathbf{H}^2$.

Le groupe d'isométries de $\mathbf{H}^2$ est le groupe $SU(1,1)$ des transformations conformes du disque, ou à un isomorphisme près le groupe $G = PSL(2,\mathbf{R})$. L'action de G se prolonge en une action sur le bord de $\mathbf{H}^2$. Rappelons que si $\gamma \in G$, le coefficient de dilatation $\gamma'(u)$ de γ au point u de S^1 est donné par l'égalité $\gamma'(u) = \exp(-b(\gamma,u))$ où le cocycle b est défini par :

$$b(\gamma,u) = B_u(\gamma^{-1}.\overline{o}).$$

On a donc en particulier la relation : $b(\gamma_1\gamma_2,u) = b(\gamma_1,\gamma_2.u) + b(\gamma_2,u)$. Rappelons également *l'égalité des accroissements finis* : pour tout u et v de S^1

$$|\gamma.u - \gamma.v|^2 = \gamma'(u)\gamma'(v)|u-v|^2.$$

1.2. — Toute géodésique orientée de $\mathbf{H}^2$ pouvant être repérée par ses deux extrémités sur le bord, l'espace $\mathcal{G}$ des géodésiques s'identifie à l'espace $S^1 \times S^1$ privé de la diagonale. Le fibré unitaire tangent de $\mathbf{H}^2$ s'identifie quant à lui avec l'espace des géodésiques pointées $\mathcal{G}_p = \mathcal{G} \times \mathbf{R}$: à un vecteur tangent (x,u), on fait correspondre le triplet (u^-, u^+, r) où u^- et u^+ sont les deux extrémités de la géodésique passant par (x,u) et $r = B_{u^+}(x)$. Dans ces coordonnées, l'action de G est donnée par

$$\gamma(u^-,u^+,r) = (\ \gamma.u^-,\ \gamma.u^+,\ r - b(\gamma,u^+)\ ).$$

Observons enfin que l'espace $\mathcal{H} = S^1 \times \mathbf{R}$ paramètre l'espace des horocycles: à un point (u,r) on fait correspondre l'horocycle centrée en u et à distance (algébrique) r de l'origine. L'application de $\mathcal{G}_p$ dans $\mathcal{G}$ (resp. $\mathcal{H}$) qui à (u^-,u^+,r) fait correspondre (u^-,u^+) (resp.(u^+,r)) est alors G-équivariante.

1.3. — Soit Γ un groupe Fuchsien, i.e. un sous groupe discret et sans torsion de $G = PSL(2,\mathbf{R})$. Alors Γ opère librement et proprement discontinuement sur $\mathbf{H}^2$. Notons S la surface hyperbolique $S = \Gamma\backslash\mathbf{H}^2$. L'action de $\mathbf{R}$ sur $\mathcal{G}_p = \mathcal{G} \times \mathbf{R}$ par translation sur la deuxième composante commute avec celle de Γ et définit donc par passage au quotient une action de $\mathbf{R}$ sur $T^1S = \Gamma\backslash\mathcal{G}_p$. On notera (g_t) ce flot: c'est le flot géodésique de S. Une mesure invariante pour ce flot correspond ainsi à un *courant géodésique orienté*, i.e à une mesure Γ-invariante sur $\mathcal{G}$ [Bo88]. De façon identique, l'action de $\mathbf{R}$ sur $\mathcal{G}_p = \mathbf{R} \times \mathcal{H}$ devient après passage au quotient le flot horocyclique (h_s), et toute mesure Γ-invariante sur $\mathcal{H}$ fournit une mesure invariante pour ce flot.

Une description plus algébrique de ces flots est la suivante: si l'on identifie $T^1\mathbf{H}^2$ avec $G = PSL(2,\mathbf{R})$ et T^1S avec l'espace homogène $\Gamma\backslash G$, les flots géodésique et horocyclique sont donnés par l'action à droite des sous-groupes à un paramètre

$$g_t = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad h_s = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La mesure de Haar sur G induit ainsi sur T^1S une mesure invariante pour ces deux flots appelée *mesure de Liouville* et que nous noterons ici m_0. Le courant géodésique sur $\mathcal{G}$ qui lui correspond est donné par $d\nu_0(u^+)d\nu_0(u^-)/|u^- - u^+|^2$ où ν_0 est la mesure de Lebesgue sur S^1, tandis que la mesure Γ-invariante sur l'espace des horocycles est : $d\nu_0(u^+)e^{-r}dr$. En mesure finie, i.e. lorsque Γ est un réseau de G, on sait que les flots géodésique et horocyclique sont ergodiques pour cette mesure, et dans le cas co-compact, on dispose d'un résultat d'unique ergodicité dû à Furstenberg : la mesure de Liouville est la seule mesure invariante pour le flot horocyclique [Fu73]. En mesure infinie, le théorème de Hopf-Tsuji-Sullivan donne un critère pour l'ergodicité du flot géodésique: il faut et il suffit que la série de Poincaré de Γ

$$P_0(s) = \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(\bar{o}, \gamma.\bar{o})}$$

diverge pour $s = 1$ (voir aussi [Re81][Gu89]). Par contre, on connaît encore assez mal le flot horocyclique : on sait que les seules mesures *de probabilité* invariantes sont portées par les horocycles fermés [Ra92]. Lorsque S est géométriquement finie sans pointes, les mesures ergodiques ont été décrites par Burger [Bu90].

Nous allons étudier ici une classe très précise de surfaces hyperboliques, à savoir les revêtements abéliens de surfaces hyperboliques compactes. Ces variétés ne sont pas géométriquement finies.

2. Revêtement d'homologie d'une surface compacte et mesures invariantes

2.1. — Supposons dorénavant S compacte. Notons g le genre de S ($g \geq 2$) et Γ' le groupe engendré par les commutateurs de Γ. Le groupe $A = \Gamma/\Gamma'$ est donc isomorphe à $\mathbf{Z}^{2g}$ et s'identifie avec le premier groupe d'homologie $H_1(S, \mathbf{Z})$. Soit S' la surface $\Gamma' \backslash \mathbf{H}^2$. C'est un revêtement abélien de S de fibre A, appelé revêtement d'homologie de S. Si γ appartient à Γ, on note $[\gamma]$ son image dans A. De même, on associe à un lacet c de S l'élément $[c]$ de A qu'il induit en homologie: il mesure l'enroulement de c autour des anses de S.

Introduisons également les sous-ensembles de Γ définis par :

$$\text{pour } L \in \mathbf{N} \qquad \Gamma(L) := \{\gamma \in \Gamma\ ;\ L - 1 \leq d(\bar{o}, \gamma.\bar{o}) < L\}$$

$$\text{pour } L \in \mathbf{N} \text{ et } \xi \in H_1(S, \mathbf{R}) \quad \Gamma(L, \xi) := \{\gamma \in \Gamma(L)\ ;\ \|[\gamma] - L\xi\| < 1/2\}$$

(pour une norme $\|\ \|$ arbitraire sur $H_1(S, \mathbf{R})$).

2.2. — Depuis Patterson et Sullivan, on sait que certaines mesures géométriques portées par le bord de l'espace hyperbolique jouent un rôle privilégié dans l'étude du flot géodésique sur une surface (non nécessairement compacte). Rappelons qu'une mesure borélienne ν sur le bord S^1 est dite *conforme* pour un groupe Fuchsien F si son support est contenu dans l'ensemble limite de F et s'il existe un exposant $\delta \geq 0$ tel que pour tout élément γ de F on ait :

$$\frac{d\gamma^{-1}\nu}{d\nu}(u) = \gamma'(u)^{\delta}.$$

Lorsque F est co-compact, son ensemble limite coïncide avec le cercle S^1, et il existe une seule mesure conforme sur S^1 à savoir la mesure de Lebesgue d'exposant $\delta = 1$ [Su79]. Considérons maintenant le groupe $F = \Gamma'$. Son ensemble limite s'identifie également avec S^1 puisque Γ' est normal dans Γ. Nous allons maintenant construire une famille de mesures $\{\nu_\alpha,\ \alpha \in H^1(S,\mathbf{R})\ \}$ sur S^1 qui auront en particulier la propriété d'être conformes pour l'action de Γ'. Pour cela, suivons l'approche de Patterson [Pa76].

a) Introduisons pour une classe de cohomologie α de S la série de Dirichlet définie par:

$$P_\alpha(s) = \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{\alpha([\gamma])-sd(\bar{o},\gamma.\bar{o})}.$$

Notons δ_α son abscisse de convergence et donnons en tout d'abord quelques propriétés élémentaires.

(i) L'application $\alpha \to \delta_\alpha$ est convexe.

(ii) En regroupant γ et γ^{-1} dans la somme ci-dessus, on voit que $\delta_\alpha = \delta_{-\alpha} \geq \delta_0 = 1$.

(iii) Puisque $P_\alpha(s) \asymp \sum_{L\in\mathbf{N}} \left(\sum_{\gamma\in\Gamma(L)} e^{\alpha([\gamma])}\right) e^{-sL}$, l'exposant δ_α est donné par:

$$\delta_\alpha = \limsup_{L\to+\infty} \frac{1}{L} \log \Big(\sum_{\gamma\in\Gamma(L)} e^{\alpha([\gamma])}\Big)$$

(iv) Pour tout $\xi \in H_1(S,\mathbf{R})$, minorons P_α en ne sommant que sur les élements de $\Gamma(L,\xi)$. On obtient : $P_\alpha(s) \geq cste \sum_{L\in\mathbf{N}} a_L(\xi) e^{(\alpha(\xi)-s)L}$ où $a_L(\xi)$ est le cardinal de $\Gamma(L,\xi)$. Notons $\overline{H}(\xi) = \limsup_L \frac{1}{L}\log a_L(\xi)$ le taux de croissance exponentielle de la suite $(a_L(\xi))$. Nous avons donc:

$$\delta_\alpha \geq \sup_{\xi\in H_1(S,\mathbf{R})} (\alpha(\xi) + \overline{H}(\xi))$$

Nous verrons ultérieurement cette inégalité se preciser en une égalité.

b) Supposons dans un premier temps que la série P_α diverge à l'exposant δ_α. Soit alors ν_α une limite vague lorsque s décroit vers δ_α de la famille de probabilités

$$\nu_\alpha^s := \frac{1}{P_\alpha(s)} \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{\alpha([\gamma])-sd(\bar{o},\gamma.\bar{o})} \delta_{\gamma.\bar{o}} \qquad \text{pour} \quad s > \delta_\alpha$$

Elle est supportée par le bord S^1 et satisfait à la relation:

$$(C_\alpha) \quad \frac{d\gamma^{-1}\nu_\alpha}{d\nu}(u) = e^{\alpha([\gamma])}\,\gamma'(u)^{\delta_\alpha}.$$

En particulier, si $\gamma \in \Gamma'$ on a $[\gamma] = 0$ et la relation (C_α) exprime que ν_α est conforme pour le groupe Γ' d'exposant δ_α. Si $P_\alpha(\delta_\alpha)$ converge, on modifie légèrement les mesures (ν_α^s) en ajoutant des poids convenablement choisis.

c) En utilisant l'égalité des accroissements finis, on observe alors que la mesure μ_α sur l'espace $\mathcal{G}$ des géodésiques définie par

$$d\mu_\alpha(u^-, u^+) = \frac{d\nu_{-\alpha}(u^-)d\nu_\alpha(u^+)}{|u^+ - u^-|^{2\delta_\alpha}}$$

est Γ-invariante. On obtient ainsi une mesure invariante pour le flot géodésique sur T^1S, qui est finie puisque S est compacte. Notons m_α la mesure de probabilité correspondante.

Rappelons comment l'argument de Hopf permet de montrer son ergodicité. Soit f une fonction continue sur T^1S. D'après le théorème ergodique de Birkhoff, les fonctions $\limsup_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(g_t v)dt$ et $\limsup_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(g_{-t}v)dt$ coïncident m_α-p.s. et sont invariantes par le flot géodésique. On en déduit en les relevant à $T^1\mathrm{H}^2$ deux fonctions $F^+(u^-, u^+)$ et $F^-(u^-, u^+)$ égales $\nu_{-\alpha} \otimes \nu_\alpha$-p.s. On observe alors que $F^+(u^-, u^+)$ ne dépend pas de u^- puisque deux vecteurs de T^1S dont les relevés pointent vers le même point u^+ à l'infini sont rapprochés par le flot géodésique. On écrira donc $F^+(u^-, u^+) = f^+(u^+)$ pour une fonction f^+ mesurable sur S^1. De même, $F^-(u^-, u^+) = f^-(u^-)$. Des égalités

$$f^+(u^+) \;=\; F^+(u^-, u^+) \;=\; F^-(u^-, u^+) \;=\; f^-(u^-) \qquad d\nu_{-\alpha}(u^-)d\nu_\alpha(u^+) - p.s.$$

résulte la constance presque sûre de F^+, et donc l'ergodicité de m_α.

d) Remarquons alors que

$$m_\alpha(f) \;=\; f^+(u^+)\;\; d\nu_\alpha(u^+) - p.s. \;=\; f^-(u^-)\;\; d\nu_{-\alpha}(u^-) - p.s.$$

A partir de là, un argument de F. Ledrappier [Le95] permet de montrer l'unicité d'une mesure satisfaisant à la relation (C_α) : si ν_α et ν'_α satisfont à la relation (C_α), on obtient deux mesures de probabilités m_α et m'_α sur T^1S associées respectivement aux courants $\dfrac{d\nu_{-\alpha}(u^-)d\nu_\alpha(u^+)}{|u^+ - u^-|^{2\delta_\alpha}}$ et $\dfrac{d\nu_{-\alpha}(u^-)d\nu'_\alpha(u^+)}{|u^+ - u^-|^{2\delta_\alpha}}$. Mais alors, pour toute fonction continue f sur T^1S on a

$$m_\alpha(f) = f^-(u^-) \quad d\nu_{-\alpha}(u^-) - p.s \quad = m'_\alpha(f)$$

d'après la remarque précédente. Les deux mesures m_α et m'_α sont donc égales, ainsi que les deux probabilités ν_α et ν'_α. En particulier, la famille (ν_α^s) converge vers ν_α si s tend vers δ_α.

2.4. — Les courants μ_α sont également Γ'-invariants. En quotientant par Γ', cela permet de construire une mesure (infinie) sur T^1S' invariante pour le flot géodésique, que l'on notera m'_α. On retrouve bien sûr la mesure de Liouville sur T^1S' en prenant $\alpha = 0$. Rappelons ici que puisque le revêtement d'homologie a pour fibre $\mathbf{Z}^{2g}$ avec $2g \geq 3$, la mesure de Liouville n'est pas conservative [Re81]. Nous verrons ci-après en 4.1. que les mesures m'_α le sont encore moins.

2.5. — Construisons maintenant une mesure λ'_α sur T^1S' invariante pour le flot horocyclique. Pour cela, considérons tout d'abord sur l'espace $\mathcal{H}$ des horocycles la mesure κ_α définie par

$$d\kappa_\alpha(u, r) = e^{-\delta_\alpha r}\, d\nu_\alpha(u) dr.$$

De la description de l'action de Γ sur $\mathcal{H}$, il résulte que l'on a

$$d\gamma^{-1}\kappa_\alpha = e^{\alpha([\gamma])}\ \kappa_\alpha$$

pour tout élément γ de Γ. Nous voyons en particulier que la mesure κ_α est invariante sous l'action du groupe Γ'. La mesure $ds \otimes \kappa_\alpha$ sur $\mathcal{G}_p = \mathbf{R} \times \mathcal{H}$ induit donc par passage au quotient une mesure λ'_α sur T^1S' invariante par le flot horocyclique. De plus, cette mesure est quasi-invariante sous l'action du groupe de revêtement $A = \Gamma/\Gamma'$:

$$(QI_\alpha) \qquad a^{-1}\lambda'_\alpha = e^{\alpha(a)}\lambda'_\alpha \quad \text{pour tout } a \in A.$$

On retrouve encore la mesure de Liouville en prenant $\alpha = 0$. Le résultat d'unique ergodicité de Furstenberg signifie alors que λ'_0 est la seule mesure invariante à la fois par A et par le flot horocyclique. Nous avons étendu ceci aux mesures λ'_α [BL96]:

Proposition 1. *Pour tout $\alpha \in H^1(S, \mathbf{R})$, la mesure λ'_α construite ci-dessus est la seule mesure sur T^1S' (à une constante multiplicative près) qui soit invariante par le flot horocyclique de S' et qui vérifie la relation de quasi-invariance (QI_α).*

La question qui se pose est alors celle de l'ergodicité de ces mesures. Nous avons [BL96]:

Théorème 1. *Pour tout $\alpha \in H^1(S, \mathbf{R})$, la mesure λ'_α est conservative et ergodique pour le flot horocyclique sur S'.*

Pour montrer ce résultat, nous passons par une étape intermédiaire, qui consiste à estimer le nombre de chemins géodésiques sur S' partant à l'infini dans une certaine direction, ou ce qui revient au même, le nombre de chemins géodésiques dans S dont l'enroulement autour des anses de S est controlé. Dans un premier temps, il nous faut donc comprendre ces enroulements, et décrire les cycles asymptotiques des mesures m_α.

3. Cycles asymptotiques des mesures m_α.

3.1. — Sol Schwartzmann a associé à une mesure invariante m par un flot sur une variété V son *cycle asymptotique*: celui-ci mesure l'enroulement moyen des orbites du flot [Sc57]. Pour le construire, on se fixe une origine v_0 de V et une application mesurable J qui à tout v associe un chemin régulier J_v de v_0 à v. L'orbite jusqu'au temps t d'un point v peut donc être refermée en un lacet que l'on notera $c(t, v)$. Par le théorème ergodique de Birkhoff, la limite de $[c(t, v)]/t$ existe pour m-presque tout point v ; c'est un élément du premier groupe d'homologie réelle $H_1(V, \mathbf{R})$ que l'on notera $e(v)$. Le cycle de m est alors défini par :

$$e(m) = \int_V e(v)\ dm(v).$$

Il est clairement indépendant du choix de J. Notons que lorsque m est la mesure de Dirac ϵ_p associée à une orbite périodique p du flot de longueur $l(p)$, son cycle est donné par $e(\epsilon_p) = [p]/l(p)$.

3.2. — Soit $\mathcal{M}$ (resp $\mathcal{M}^1$) l'espace des mesures (resp. mesures de probabilité) invariantes pour le flot. L'application linéaire e envoie donc $\mathcal{M}^1$ sur un convexe compact de $H_1(V, \mathbf{R})$ que l'on notera C. Dans le cas où V est le fibré unitaire d'une variété fermée S à courbure négative et (g_t) le flot géodésique de S, on sait que ce convexe coïncide avec la boule unité de $H_1(T^1S, \mathbf{R}) \simeq H_1(S, \mathbf{R})$ pour la norme stable [Fed].

Revenons maintenant à la surface hyperbolique S. La proposition suivante montre que l'on peut paramétrer tout l'intérieur de C par $H^1(S, \mathbf{R})$:

Proposition 2. *Soit m_α la mesure associée en 2.2.c à une classe α de $H^1(S, \mathbf{R})$ et $e(m_\alpha)$ son cycle. Alors, l'application $\alpha \to e(m_\alpha)$ est un difféomorphisme entre $H^1(S, \mathbf{R})$ et l'intérieur de C.*

Donnons une idée des outils utilisés dans la preuve de ce résultat [BL95]. On associe tout d'abord à α une fonction höldérienne $F_\alpha : T^1S \to \mathbf{R}$ en choisissant un représentant ω de α et en posant $F_\alpha(x, v) = \omega_x(v)$. (Le choix d'un autre représentant donne une fonction qui est (g_t)-homologue à F_α). L'expression de l'exposant de convergence δ_α donnée dans la section 2.2 a) montre que δ_α s'identifie avec la pression de F_α. Le formalisme thermodynamique permet alors de calculer les dérivées premières et secondes de δ_α. Ainsi, la différentielle δ'_α vue comme élément du dual de $H^1(S, R)$ s'identifie avec le cycle de m_α.

D'autre part, la forme quadratique δ''_α, qui est positive par convexité de δ_α, est en fait strictement positive. Cela découle d'un théorème difficile de Ratner sur le théorème central limite pour des flots d'Anosov [Ra73].

Par conséquent, l'application $\alpha \to \delta'_\alpha$ est un difféomorphisme local de $H^1(S, \mathbf{R})$ *dans* C. Pour montrer que son image coïncide avec tout l'intérieur de C, on utilise le principe variationnel:

$$\delta_\alpha = \sup_{m \in \mathcal{M}^1} h_m + \int F_\alpha dm$$

où h_m est l'entropie de m pour le flot géodésique. Comme $\int F_\alpha dm = \alpha(e(m))$, on obtient

$$\delta_\alpha = \sup_{\xi \in C} H(\xi) \ + \ \alpha(\xi)$$

où l'on a posé pour ξ appartenant au convexe C

$$H(\xi) = \sup_{m \in \mathcal{M}^1,\ e(m) = \xi} h_m.$$

Ainsi δ_α s'interprete comme la transformée de Legendre de la fonction convexe $-H$. Un théorème d'analyse convexe permet alors d'identifier l'image de δ'_α avec l'intérieur du support de H, c'est à dire avec l'intérieur de C.

3.3. — Lorsque $\alpha = 0$, la mesure m_α est la mesure de Liouville. Le courant géodésique qui lui correspond est alors symétrique, et le cycle de m_0 est nul. Il suit de la Proposition 2 que pour toute autre valeur de α, le cycle de m_α est non-nul. D'autre part, dans le cas d'une surface hyperbolique, la mesure de Liouville est la mesure d'entropie maximale. On en déduit que la fonction H est maximale en $\xi = 0$, avec $H(0) = 1$.

3.4. — Remarquons que la Proposition 2 permet d'associer à tout point ξ de l'intérieur de C une classe de cohomologie α, et donc une mesure invariante de cycle ξ, à savoir la mesure m_α. Nous noterons $e^{-1}(\xi)$ cette mesure. Il suit également du principe variationnel que $e^{-1}(\xi)$ peut-être caractérisée comme étant l'unique mesure maximisant l'entropie parmi toutes les mesures de cycle ξ. Est-il possible d'étendre e^{-1} au bord de C? Rappelons ici que C n'est pas strictement convexe: son bord possède des facettes [Ma95]. Pour résoudre cette question, il faudrait connaître de façon précise le comportement de δ_α lorsque α tend vers l'infini dans $H^1(S, \mathbf{R})$, ou encore l'ensemble des valeurs d'adhérence des m_α.

4. Géodésiques et horocycles sur S'.

4.1. — Dans la section précédente, nous avons associé à (presque)-tout vecteur $v \in T^1S$ un enroulement $e(v) \in H_1(S, \mathbf{R})$, et paramétré l'intérieur de l'ensemble C des enroulements possibles. Relevons ici e en une fonction définie sur T^1S'. Alors e mesure cette fois le "déplacement moyen" d'une orbite du flot géodésique. De façon plus précise, fixons un domaine fondamental D pour l'action de $A = \Gamma/\Gamma'$ sur T^1S', et pour $v \in D$, notons $a_t(v)$ l'élément de A tel que $g_t(v)$ appartienne au domaine translaté $a_t(v)D$. Nous appellerons $a_t(v)$ le *déplacement* de v au temps t. On aura:

$$\frac{a_t(v)}{t} \to e(v) \qquad \text{si} \quad t \to +\infty.$$

On peut donc distinguer les points de T^1S' suivant la manière dont ils partent à l'infini: si l'on pose pour $\xi \in C$

$$E_\xi = \{ \, v \in T^1S'; \ e(v) = \xi \, \},$$

la famille $\{E_\xi\}$ forme une partition de T^1S' en sous-ensembles, dont on observe qu'ils sont invariants par le flot géodésique, par le flot horocyclique et par A.

Nous avons associé à tout $\alpha \in H^1(S, \mathbf{R})$ une mesure m_α ergodique pour le flot géodésique sur S. Par conséquent, $m_\alpha(dv)$-p.s., $e(v) = e(m_\alpha)$. De la description des mesures λ'_α et m'_α que nous avons donnée en 2.4 et 2.5., il résulte que ces deux mesures ne chargent que les points de $E_{e(m_\alpha)}$. En particulier pour m'_α-presque tout v, le déplacement $a_t(v)$ est de l'ordre de $t \ e(m_\alpha)$. Ainsi, lorsque $\alpha \neq 0$, le flot géodésique sur S' part à l'infini avec vitesse non nulle sous la mesure m'_α, et la mesure m'_α n'est pas conservative.

4.2. — Décrivons maintenant l'approche utilisée pour montrer le Théorème 1. On considère un ensemble $A \subset D$ transverse au flot géodésique et au flot horocyclique, typiquement une morceau d'horocycle instable. On l'épaissit en posant successivement $A^\delta = \cup_{0 \leq t \leq \delta} g_t(A)$, puis $\tilde{A} = \cup_{0 \leq s \leq \tau} h_s(A^\delta)$, pour deux nombres δ et τ fixés. Si v est un point fixé de T^1S', l'intégrale

$$I(T, A) = \int_{0}^{T} \mathbf{1}_{\tilde{A}}(h_s(v)) \, ds$$

mesure alors le temps passé dans $\tilde{A}$ par l'horocycle $\mathcal{H}(v, T)$ issu de v et de longueur T. Puisque A^δ est transverse à $\mathcal{H}(v, T)$ si δ est choisi suffisamment petit, on obtient

$$I(T, A) = \tau \ \text{card} \ A^\delta \cap \mathcal{H}(v, T).$$

Associons maintenant à tout point de cette intersection la géodésique issue de ce point et de longueur $L = \log T + c$. La relation $g_t h_s g_{-t} = h_{se^{-t}}$ montre que l'image de $\mathcal{H}(v, T)$ par g_L est l'horocycle $B_L = \mathcal{H}(g_L(v), e^{-c})$ issue de $g_L(v)$ et de longueur e^{-c}. On voit ainsi que le cardinal de $A^\delta \cap \mathcal{H}(v, T)$ coïncide avec le nombre de géodésiques allant de A à B_L et de longueur comprise entre $L - \delta$ et L. Ces chemins ne sont pas quelconques: nous savons que $B_L \subset a_L(v)D$ et que si v est un vecteur générique pour λ'_α, la suite $(a_L(v)/L)$ converge vers $e(m_\alpha)$.

4.3. — Au moyen de la représentation symbolique du flot géodésique, nous avons pu dénombrer le nombre de chemins géodésiques avec ce type de contraintes [BL96]:

Théorème 2. *Soit A (resp. B) un morceau d'horocycle instable (resp. stable) de T^1S' contenu dans un domaine fondamental $D \subset T^1S'$. Pour $a \in \Gamma/\Gamma'$, notons $N(A, B, L, a)$ le nombre de géodésiques de S' de longueur comprise entre $L - \delta$ et L allant de A à aB. Soit (a_L) une suite d'élements de Γ/Γ' telle que a_L/L converge vers un élément ξ appartenant à l'intérieur de C. Alors $\xi = e(m_\alpha)$ pour un unique $\alpha \in H^1(S, \mathbb{R})$ (Proposition 2) et nous avons:*

$$N(A, B, L, a_L) \sim c(\delta, \alpha)\ \nu_\alpha^-(A)\ \nu_\alpha^+(B)\ \frac{e^{LH(a_L/L)}}{L^g} \quad \text{lorsque } L \to +\infty$$

(La fonction $H(.)$ a été introduite en 3.2.)

Avant de continuer la preuve du Théorème 1, faisons quelques remarques sur cet énoncé.

a) Notons tout d'abord qu'il n'est possible de remplacer $LH(a_L/L)$ par $LH(\xi)$ dans cet énoncé que lorsque la distance de a_L à $L\xi$ tend vers 0, comme on le voit en développant H au voisinage de ξ. Or, dans les cas qui nous intéressent, la suite a_L est la suite $a_L(v)$ des déplacements d'un vecteur v générique pour λ'_α. Le théorème central limite pour cette fonctionnelle du flot géodésique dit que la distance de $a_L(v)$ à $L\xi$ est de l'ordre de $\sqrt{L}$.

b) Les quantités $\nu_\alpha^-(A)$ et $\nu_\alpha^+(B)$ s'interprêtent comme les mesures conditionnelles de m'_α sur les horocycles instables et stables de T^1S' respectivement. Il est possible d'expliciter ces mesures en fonction de la mesure conforme ν_α que nous avons construite en 2.2. Par exemple, si B se relève sur $\mathbb{H}^2$ en un morceau d'horocycle de la forme $I \times \{u^+\} \times \{r\}$, où I est un intervalle de S^1, u^+ un point de S^1 non contenu dans I et r un réel fixé, on a:

$$\nu_\alpha^+(B) = e^{\delta_\alpha r} \int_I \frac{d\nu_{-\alpha}(u)}{|u - u^+|^{2\delta_\alpha}}\,.$$

Ces mesures ont la propriété d'invariance sous le flot géodésique (g_t) de S' suivante:

$$g_t\nu_\alpha^+ = e^{\delta_\alpha t}\nu_\alpha^+ \qquad g_t\nu_\alpha^- = e^{-\delta_\alpha t}\nu_\alpha^-$$

(Rappelons que dans le cas d'une surface *compacte*, seule la mesure de Lebesgue sur les horocycles —ou la mesure de Margulis en courbure variable— a cette propriété).

c) Dans la constante $c(\delta, \alpha)$, intervient le déterminant de δ''_α, qui peut tendre vers 0 lorsque α tend vers l'infini, puisque C n'est pas strictement convexe. La question du dénombrement de chemins lorsque la suite a_L/L tend vers un point du bord de C reste ainsi ouverte.

d) Lorque nous voudrons utiliser cet énoncé pour le dénombrement des points de $A^\delta \cap \mathcal{H}(v, T)$, il nous faudra considérer l'ensemble $B = a_L(v)^{-1}B_L$, qui est bien contenu dans le domaine fondamental D, mais qui n'est pas fixe. Il nous faut donc une version "uniforme" en A et en B du Théorème 2. Celle ci peut être effectivement énoncée, à condition de minorer et de majorer la longueur des ensembles A et B.

4.4. — Revenons maintenant à l'intégrale $I(T, A)$ lorsque v est un vecteur générique pour la mesure λ'_α. Alors $a_L(v)/L$ converge vers $e(m_\alpha)$, et à condition de choisir la constante c de façon à contrôler la longueur de B_L, nous sommes dans les conditions d'application du Théorème 2.

Dans un premier temps, montrons que la mesure (infinie) λ'_α est conservative. Pour cela, il suffit de voir que $\lambda'_\alpha(dv)$-p.s, $I(T, A)$ tend vers l'infini si $T \to +\infty$. Or pour T grand, $a_L(v)/L$ est suffisamment proche de $\xi = e(m_\alpha)$ pour que l'on puisse minorer $H(a_L(v)/L)$ par le nombre (strictement positif) $H(\xi)/2$. On obtient donc la minoration:

$$I(T, A) \geq cste \frac{T^{H(\xi)/2}}{(\log T)^g}$$

et $I(T, A)$ tend bien vers $+\infty$.

Le Théorème 2 permet également de calculer la limite lorsque T tend vers $+\infty$ du rapport $I(T, A)/I(T, A')$ lorsque A et A' sont deux morceaux d'horocycles stables. On obtient:

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{I(T, A)}{I(T, A')} = \frac{\nu_\alpha^-(A)}{\nu_\alpha^-(A')} \quad \lambda'_\alpha(dv) - p.s.$$

Comme cette limite est indépendante de v, et que la classe des ensembles $\tilde{A}$ est suffisamment grande, la mesure λ'_α est ergodique pour le flot horocyclique.

4.5. — Il est vraisemblable que les mesures (λ'_α) soient en fait les seules mesures ergodiques et conservatives pour le flot horocyclique sur S'. Si cela était vrai, on obtiendrait un analogue du phénomène d'unique ergodicité que l'on observe sur une surface compacte.

5. Points dans le réseau Γ et géodésiques fermées

5.1. — On s'intéresse ici au cardinal des ensembles $\Gamma(L)$ et $\Gamma(L,\xi)$ (voir 2.1.). On sait en effet depuis Margulis que le dénombrement de chemins géodésiques permet le dénombrement de points dans le réseau Γ. Ainsi, lorsque l'on joint les points de $\Gamma.\overline{o}$ à l'origine par des rayons géodésiques et que l'on considère l'image de ces rayons dans la variété quotient $S = \Gamma\backslash \mathrm{H}^2$, on voit que le nombre de points de $\Gamma(L)$ coïncide exactement avec le nombre de chemins géodésiques sur T^1S de longueur comprise entre $L-1$ et L allant de U à U (U est la sphère unité centrée au point origine de S). En utilisant cette approche, Margulis a étendu à toutes les variétés à courbure négative l'estimée card $\Gamma(L) \sim e^L$, obtenue sur les surface hyperboliques par Delsarte au moyen de l'analyse harmonique [De42][Ma69].

5.2. — Les éléments de $\Gamma(L,\xi)$ correspondent quant à eux à des chemins géodésiques allant de U à U, de longueur comprise entre $L-1$ et L, et dont l'enroulement vaut à peu près $L\xi$. En les relevant à la variété S', on obtient des chemins dont le déplacement est de l'ordre de $L\xi$. En approximant la sphère unité autour d'un point par des morceaux d'horocycles, on peut, grâce au Théorème 2 obtenir l'estimée suivante [BL96]:

Theorème 3. *Pour tout ξ dans l'intérieur de C,*

$$\text{card}\ \Gamma(L,\xi) \sim c(\xi)b(L,\xi)\ \frac{e^{LH(\xi)}}{L^g} \quad \text{si} \quad L \to +\infty$$

où $H(\xi)$ est la plus grande entropie des mesures de cycle ξ (voir 3.2), et $b(L,\xi)$ un terme borné oscillant. Cette convergence est uniforme lorsque ξ varie dans un compact contenu dans l'intérieur de C.

Remarques.

a) On trouve donc que le taux de croissance $\overline{H}(\xi)$ du cardinal de $\Gamma(L,\xi)$ que nous avons introduit en 2.2.a est en fait égal à $H(\xi)$.

b) Prenons dans cet énoncé $\xi = a/L$, où a est un élement fixé de Γ/Γ'. Pour L grand, ξ est proche de 0. De plus, H étant maximale en $\xi = 0$, son gradient est nul en 0. Par conséquent, $L(H(a/L) - H(0))$ tend vers 0 lorsque L tend vers l'infini. On retrouve ainsi un résultat de Pollicott et Sharp [PS94] :

$$\text{card}\ \{\gamma \in \Gamma(L)\ ;\ [\gamma] = a\ \} \sim c(0)\frac{e^L}{L^g}$$

5.3. — Depuis Selberg, on sait estimer le nombre N_L de géodésiques *fermées* de longueur L d'une surface hyperbolique au moyen de la formule des traces, et dans certains cas préciser l'équivalent obtenu en un développement asymptotique [Se57] [Hu59]. Ainsi $N_L \sim e^L/L$ lorsque L tend vers $+\infty$. Le dénombrement d'orbites fermées dans une classe d'homologie *a fixée* a été quant- à lui introduit par Adachi et Sunada, et étudié complètement par Philips et Sarnak [PS87]. (Voir l'article de survol [VN94]). Le problème posé par Lalley en 87 est alors celui du dénombrement des géodésiques fermées dont la classe d'homologie n'est plus nécessairement fixée mais part à l'infini dans $H_1(S, \mathbf{R})$ avec une certaine vitesse. On s'intéresse donc à l'ensemble de géodésiques fermées défini par

$$\mathcal{P}(L,\xi) = \{p \;;\quad L-1 \leq l(p) \leq L \quad \text{et} \quad \|\,[p] - L\xi\| \leq 1\,\}$$

où ξ est un vecteur de $H_1(S, \mathbf{R})$. Il s'agit donc des orbites de longueur à peu près L et d'homologie proche de $L\xi$. Nous allons donner une estimation du cardinal de cet ensemble lorsque L tend vers l'infini. Observons tout d'abord que lorsque ξ n'est pas dans le convexe C, l'ensemble $\mathcal{P}(L,\xi)$ est vide pour L suffisamment grand. Sinon, il existerait une suite p_n de géodésiques fermées de longueur arbitrairement grande, et une limite vague des mesures de Dirac ϵ_{p_n} fournirait une mesure invariante de cycle ξ. Il n'y a donc lieu de s'intéresser qu'aux valeurs de ξ contenues dans C. Le théorème suivant concernant le cardinal de $\mathcal{P}(L,\xi)$ avait été obtenu par Lalley [La89] pour des valeurs de ξ proches de 0 [Bl95].

Théorème 4. *Pour tout ξ dans l'intérieur de C, nous avons lorsque L tend vers $+\infty$:*

$$\operatorname{card} \mathcal{P}(L,\xi) \quad \sim \quad c(\xi)\; b(L,\xi) \quad \frac{e^{LH(\xi)}}{L^{1+g}}$$

où $b(L,\xi)$ est un terme borné oscillant. Cette convergence est uniforme lorsque ξ varie dans un compact de l'intérieur de C.

Comme précédemment, prendre $\xi = a/L$ dans cet énoncé permet de retrouver les résultats concernant le nombre de géodésiques fermées dans une classe d'homologie (e.g.[AS87] [La89] [Po91]).

5.4. — L'étude de la distribution spatiale des orbites périodiques nécessitait en général une démonstration autonome (Voir [Ze89] [Sh93]). En utilisant un résultat de grandes déviations de Kifer [Ki94] et la caractérisation de $e^{-1}(\xi)$ comme unique mesure maximisant l'entropie parmi les mesures de cycle ξ (voir 3.4.), nous avons pu déduire directement du théorème précédent le résultat suivant [BL95]:

Théorème 5. *Pour tout ξ dans l'intérieur de C, nous avons :*

$$\frac{1}{\operatorname{card} \mathcal{P}(L,\xi)} \sum_{p\in\mathcal{P}(L,\xi)} \epsilon_p \quad \rightarrow \quad e^{-1}(\xi)$$

Références

[An67] D.V. ANOSOV. Geodesic flows on closed Riemannian manifolds with negative curvature, *Proc. Steklov Inst. Math. 90*, **90** (1967) 1-235.

[AnS67] D.V. ANOSOV & Y.G. SINAI. Some smooth ergodic systems, *Russ. Math. Surveys*, **22** (1967) 103–167.

[AS87] T. ADACHI & T. SUNADA. Homology of closed geodesics in a negatively curved manifold, *J. Diff. Geom.*, **26** (1987) 81–99.

[BL95] M. BABILLOT & F. LEDRAPPIER. Lalley's theorem for periodic orbits of hyperbolic flows (1995) à paraître dans *Ergodic Theory and Dynamical Systems.*

[BL96] M. BABILLOT & F. LEDRAPPIER. Geodesic paths and horocycle flow on abelian covers, (1996) *Prépublication 359 du Laboratoire de Probabilités, Université Paris 6.*

[Bo73] R. BOWEN. Symbolic dynamics for hyperbolic flows, *Amer. J. Maths*, **95** (1973) 429–460.

[Bo75] R. BOWEN. *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphismes*, Lectures Notes in Math. **470** Spinger-Verlag (1975)

[Bo88] F. BONAHON. The geometry of Teichmuller spaces via geodesic currents, *Invent. Math.*, **92** (1988) 139–162.

[Bu90] M. BURGER. Horocycle flows on geometrically finite surfaces, *Duke Math. J.*, **61** (1990) 779–803

[De42] J. DELSARTE. Sur le Gitter fuschien, *C.R. Acad. Sci Paris*, **214** (1942) 147–149.

[Fed] H. FEDERER. *Geometric measure theory*, Springer Verlag (1969)

[Fu73] H. FURSTENBERG. The unique ergodicity of the horocycle flow in *Recent advances in topological dynamics*, Lecture Notes **318** Springer-Verlag, (1973) 95–115.

[Gu89] Y. GUIVARC'H. Propriétés ergodiques, en mesure infinie, de systèmes dynamiques fibrés. *Ergod. Th. & Dyn. Syst.*, **9** (1989) 433–453.

[Hed36] G.A. HEDLUND. Fuchsian groups and transitive horocycle, *Duke Math. J.*, **2** (1936) 530–542.

[Hed39] G.A. HEDLUND. Fuchsian groups and mixtures, *Ann. of Math.*, **40** (1939) 370–383.

[Ho36] E. HOPF. Fuchsian groups and ergodic theory, *Trans. A.M.S.*, **39** (1936) 299–314.

[Ho39] E. HOPF. Statistik der Geodätische Linien Manigfaltigkeiten Negativer Krümmung, *Ber. Voch. Sachs. Akad. Wiss. Leipzig*, **91** (1939) 261–304.

[Hu59] H. HUBER. Zur analytischen Theorie hyperbolischer Raumformen und Bewegungsgruppen (I): *Math. Ann.*, **138** (1959) 1-26. (II): *Math. Ann.*, **142** (1961) 385–398. (III): *Math. Ann.*, **143** (1961) 463–464.

[Ki76] Y. KIFER . Large deviations, averaging and periodic orbits of dynamical sytems, *Comm. Math. Phys.*, **162** (1994) 33–46.

[La87] S. LALLEY. Distribution of periodic orbits of symbolic and Axiom A flows, *Adv. Appl. Math.*, **8** (1987) 154–193.

[La89] S. LALLEY. Closed geodesics in homology classes on surfaces of variable negative curvature, *Duke Math. J.*, **58** (1989) 795–821.

[Le94] F. LEDRAPPIER. Structure au bord des variétés à courbure négative. *Sem. Th. Spectrale et Geométrie Grenoble* (1994–1995) 97–122.

[Ma69] G.A. MARGULIS. Applications of ergodic theory for the investigation of manifolds of negative curvature, *Func. Anal. Appl.*, **3** (1969) 335–336.

[Ma96] D. MASSART. Normes stables pour les surfaces, *Thèse de Doctorat*, E.N.S. Lyon (1996)

[Pa76] S.J. PATTERSON. The limit set of a Fucsian group, *Acta Math.*,, **136** (1976) 241–273.

[Po91] M. POLLICOTT. Homology and closed geodesics in a compact negatively curved surface, *Amer. J. Math.*, **113** (1991) 379–385.

[PS87] R. PHILLIPS & P. SARNAK. Geodesics in homology classes, *Duke Math. J.*, **55** (1987) 287–297.

[PS94] M. POLLICOTT & R. SHARP. Orbit counting for some discrete groups acting on simply connected maniflods with negative curvature *Inventiones Math.*, **117** (1994), 275–302.

[Ra69] M. RATNER. Markov partitions for Anosov flows on 3-dimensional manifolds, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, **186** (1969) 519–521.

[Ra73] M. RATNER . The central limit theorem for geodesic flows on n-dimensional manifolds of negative curvature, *Israel J. Math.*, **16** (1973) 181-193.

[Ra92] M. RATNER. Raghunathan's conjecture for $SL(2,\mathbb{R})$, *Israel J. of Math*, **80** (1992) 1–31.

[Re81] M. REES. Checking ergodicity of some geodesic flows with infinite Gibbs measure. *Ergod. Th. & Dyn. Sys.*, **1** (1981) 107–133.

[Rue] D. RUELLE. *Thermodynamic Formalism*, London, Addison-Wesley (1978).

[Sc57] S. SCHWARTZMANN. Asymptotic Cycles, *Ann. of Math.*, **66** (1957) 270–284.

[Se56] A. SELBERG. Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric spaces with applications to Dirichlet series, *J. Indian Math. Soc.*, **20** (1956) 47–87.

[Su79] D. SULLIVAN. The density at infinity of a discrete group of hyperbolic isometries, *Publ. IHES*, **59** (1979) 171–202.

[Sh93] R. SHARP. Closed orbits in homology classes for Anosov flows, *Ergod. Th. & Dyn. Syst.*, **13** (1993) 387–408.

[VN94] A.B.VENKOV & A.M. NIKITIN. The Selberg trace formula, Ramanujan graphs, and some problems of mathematical physics, *St Petersburg Math. J.* **5** (1994) 419–484.

[Ze89] S. ZELDITCH. Trace formula for compact $\Gamma\backslash PSL_2(\mathbb{R})$ and the equidistribution theory of closed geodesics, *Duke Math. J.* **59** (1989) 27–81.

Martine BABILLOT
Université PARIS 6
Laboratoire de Probabilités (URA224)
Tour 46–56 3ème étage
4, Place Jussieu
75252 Paris Cedex 05