SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

MARC PEIGNÉ

Dénombrement des géodésiques fermées sur certaines variétés avec pointes

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 14 (1995-1996), p. 83-88

<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1995-1996__14__83_0>

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Grenoble), 1995-1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
1995–1996 (83–88)

DÉNOMBREMENT DES GÉODÉSIQUES FERMÉES SUR CERTAINES VARIÉTÉS AVEC POINTES

Marc PEIGNÉ

Résumé

Soit Γ un groupe libre, discret et géométriquement fini d'isométries de la boule hyperbolique $\mathbb{B}^n$ contenant des transformations paraboliques et soit δ l'exposant critique de la série de Poincaré associée à Γ. Nous démontrons que le nombre de géodésiques fermées de $M = \mathbb{B}^n/\Gamma$ de longueur au plus a est équivalent à $\frac{e^{a\delta}}{a\delta}$ lorsque a tend vers $+\infty$. Pour cela, nous codons les géodésiques de M à l'aide d'un alphabet infini et utilisons un théorème du renouvellement harmonique.

Ce résultat a été obtenu avec Françoise Dal'bo et cet exposé est la suite d'un exposé de Françoise au séminaire de Théorie spectrale de Grenoble en octobre 1995. Je tiens ici à remercier l'équipe de géométrie spectrale de Grenoble pour son invitation et son accueil chaleureux.

1. Introduction

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble formé de $2N$ isométries orientées $\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \cdots, \alpha_N, \alpha_N^{-1}$ de la boule hyperbolique $\mathbb{B}^n$ vérifiant les conditions :

($\mathcal{A}1$) *il existe $2N$ demi-boules fermées $(\mathbb{B}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ dans $\mathbb{B}^n$ orthogonales à $^{n-1}$, deux à deux tangentes ou disjointes telles que $\alpha\mathbb{B}_\alpha = \overline{\mathbb{B}^n - \mathbb{B}_{\alpha^{-1}}}$ pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$.*

($\mathcal{A}2$) *le groupe Γ engendré par $\mathcal{A}$ contient des transformations paraboliques.*

Sous ces hypothèses, Γ est un groupe libre, discret et géométriquement fini dont les transformations paraboliques primitives sont conjuguées à des mots réduits de la forme $a_1 \cdots a_k$ où $a_i \in \mathcal{A}$ et $a_1 \neq a_k^{\pm 1}$ lorsque $k \geq 2$ (dans tous les cas on a $\mathbb{B}_{a_1^{-1}} \cap \mathbb{B}_{a_k} \neq \emptyset$).

Classification math. : 53C22, 60K05

Notons δ l'exposant critique de la série de Poincaré $\sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-sd(0,\gamma 0)}$; nous avons le

THÉORÈME 1. — *Le nombre $\pi(a)$ de géodésiques primitives fermées orientées de M de longueur au plus a est équivalent à $\frac{e^{a\delta}}{a\delta}$ lorsque a tend vers $+\infty$.*

De nombreux résultats dans ce sens ont déjà été publiés - nous renvoyons le lecteur à [2] et [3] pour des références plus complètes. En particulier, si $d = 2$, ce théorème est une conséquence d'un résultat de L. Guillopé sur les surfaces géométriquement finies de courbure -1 ([6]). Lorsque $d > 2$, ce résultat est nouveau et généralise celui de S. Lalley [8] établi pour les groupes Γ purement loxodromiques ; la méthode qu'il utilise pour démontrer ce théorème consiste à traduire le problème géométrique initial en un problème de dénombrement d'orbites périodiques pour un flot spécial sur un sous-décalage de type fini, puis à relier ce problème de dénombrement à la théorie du renouvellement pour une marche de Markov transiente sur $\mathbb{R}$. Nous adaptons ici cette méthode ; la présence de transformations paraboliques dans Γ nous oblige à introduire un alphabet infini pour coder les géodésiques de M si bien que nous sortons du cadre du formalisme thermodynamique de Ruelle.

Cette approche requiert un codage des points de l'ensemble limite ce qui nous a obligé à nous intéresser à une classe très particulière de variétés. A titre de comparaison, L. Guillopé utilise pour dénombrer les géodésiques fermées la formule des traces de Selberg et n'impose pas de conditions aussi draconniennes que nous sur le groupe fondamental des surfaces qu'il étudie. En revanche la méthode des opérateurs de transfert présente beaucoup de souplesse dans sa mise en oeuvre et nous a en particulier permis d'étendre le résultat précédent au cas de la courbure variable pincée [2], [4], [5].

Afin de ne pas rendre cette note trop technique, nous supposons que les transformations paraboliques primitives de Γ sont toutes conjuguées à des éléments de $\mathcal{A}$ (pour le cas général, voir [3]).

2. Codage des géodésiques fermées de M

Notons Λ^0 l'intersection de $\partial\mathbb{B}^n$ avec l'adhérence de $\Gamma 0$ privée de l'orbite sous Γ des points fixes des éléments de $\mathcal{A}$. Le groupe Γ étant libre, à tout point $x \in \Lambda^0$ est associée une unique suite $\omega(x) = (a_i^{n_i})_{i\geq 1}$ de puissances d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $x = \lim_{k\to+\infty} a_1^{n_1}\cdots a_k^{n_k}(0)$ et $a_{i+1} \neq a_i^{\pm 1}$ pour tout $i \geq 1$. Notons $T : \Lambda^0 \to \Lambda^0$ l'application qui à x associe le point $Tx = a_1^{-n_1}x$ où $a_1^{n_1}$ est le premier terme de $\omega(x)$. Soit $\overline{C}$ une géodésique primitive fermée orientée de M ; il existe une transformation loxodromique primitive $\gamma \in \Gamma$ dont l'axe, orienté du point répulsif de γ vers son point attractif x_γ, se projette sur $\overline{C}$ et telle que x_γ soit T-périodique. La longueur de $\overline{C}$ est alors égale à $-\operatorname{Log}|\gamma'(x_\gamma)|$. Notons $f : \Lambda^0 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = -\operatorname{Log}|(a_1^{n_1})'(Tx)|$

et posons $S_k f(x) = f(x) + \cdots + f(T^{k-1}x)$. On a

$$\pi(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sharp\{x \in \Lambda^0 / T^n(x) = x,\ n \text{ est la plus petite période et } S_n f(x) \leq a\}.$$

Pour établir le théorème 1 il suffit de montrer que, lorsque a tend vers $+\infty$, la quantité $N(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sharp\{x \in \Lambda^0 / T^n(x) = x \text{ et } S_n f(x) \leq a\}$ est équivalente à $\frac{e^{a\delta}}{a\delta}$.

3. Propriétés de l'application T

Soit $\alpha \in \mathcal{A}$; notons $\Lambda^0_{\alpha^n}$ l'ensemble des $x \in \Lambda^0$ tels que $\omega(x)$ commence par α^n. Les transformations paraboliques de Γ étant conjuguées aux générateurs de Γ, pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$ l'ensemble $T(\bigcup_{n \geq 1} \Lambda^0_{\alpha^n})$ est inclus dans un compact K_α disjoint de $\mathbb{B}_\alpha \cup \mathbb{B}_{\alpha^{-1}}$. Cette remarque est essentielle pour établir la proposition suivante :

Proposition 1. — *Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\inf_{x \in \Lambda^0} |(T^N)'(x)| > 1$; en d'autre termes, l'application T est dilatante sur Λ^0.*

Notons $\sigma(dx)$ la mesure de Patterson sur l'ensemble limite Λ de Γ. La mesure $\mu(dx_1 dx_2)$ sur $\Lambda \times \Lambda$ définie par $\mu(dx_1 dx_2) = \frac{\sigma(dx_1)\sigma(dx_2)}{|x_1 - x_2|^{2\delta}}$ est Γ-invariante. Posons $\Lambda^0 \times_{\mathcal{A}} \Lambda^0 = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} T(\bigcup_{n \geq 1} \Lambda^0_{\alpha^n}) \times \bigcup_{n \geq 1} \Lambda^0_{\alpha^n}$ et notons $\overline{T}$ l'application sur $\Lambda^0 \times_{\mathcal{A}} \Lambda^0$ définie par $\overline{T}(x_1, x_2) = (\alpha^{-n} x_1, \alpha^{-n} x_2)$ où α^n est le premier terme de $\omega(x_2)$. La mesure μ étant Γ-invariante, elle est $\overline{T}$- invariante. Puisque l'ensemble $T(\Lambda^0_\alpha)$ est inclus dans un compact ne rencontrant pas $\bigcup_{n \geq 1} \Lambda^0_{\alpha^n}$, la mesure μ est finie sur $\Lambda^0 \times_{\mathcal{A}} \Lambda^0$; quitte à normaliser, supposons $\mu(\Lambda^0 \times_{\mathcal{A}} \Lambda^0) = 1$ et notons π l'application de $\Lambda^0 \times_{\mathcal{A}} \Lambda^0$ dans Λ^0 définie par $\pi(x_1, x_2) = x_2$.

Proposition 2. — *La mesure $\nu = \pi(\mu)$ est une probabilité T-invariante sur Λ^0, absolument continue par rapport à la mesure de Patterson et dont la densité h est donnée par*

$$\forall \alpha \in \mathcal{A}, \forall x \in \bigcup_{n \geq 1} \Lambda^0_{\alpha^n} \quad h(x) = \int_{T(\bigcup_{n \geq 1} \Lambda^0_{\alpha^n})} \frac{\sigma(dy)}{|x - y|^{2\delta}}.$$

4. Approximation de $\pi(a)$ et potentiel harmonique

Ce paragraphe est inspiré de [8]. Pour tout $(x, a) \in \Lambda^0 \times \mathbb{R}^{*+}$ et tout borélien A de Λ^0, posons

$$N_{(x,a)}(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sum_{y \in \Lambda^0 / T^n y = x} 1_A(y) 1_{[0,a]}(S_n f(y)).$$

En utilisant le caractère dilatant de T, on construit pour tout entier $k \geq 1$ une partition $(\Lambda^0_{k,i})_{i\geq 1}$ de Λ^0 telle que $\lim_{k\to+\infty} \sigma(\Lambda^0_{i,k}) = 0$ et donnant lieu à l'encadrement suivant

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{+\infty} N_{(x_{k,i},a-\theta_k)}(\Lambda^0_{k,i}) \leq N(a) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} N_{(x_{k,i},a+\theta_k)}(\Lambda^0_{k,i})$$

où $x_{k,i} \in \Lambda^0_{k,i}$ et $\lim_{k\to+\infty} \theta_k = 0$. Cet encadrement relie $N(a)$ à l'opérateur P adjoint de T par rapport à ν et défini, pour toute fonction borélienne bornée φ sur Λ^0, par

$$\forall x \in \Lambda^0 \quad P\varphi(x) = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \sum_{n=1}^{+\infty} p_{\alpha^n}(x)\varphi(\alpha^n x)$$

avec $p_{\alpha^n}(x) = 0$ si $x \notin T(\Lambda^0_{\alpha^n})$ et $p_{\alpha^n}(x) = \frac{h(\alpha^n x)}{h(x)}|(\alpha^n)'(x)|^\delta$ sinon. La mesure de probabilité ν étant T-invariante, P est markovien sur Λ^0. Afin de prendre en compte la longueur des géodésiques, introduisons l'opérateur $\widetilde{P}$ associé à (P, f) et défini, pour toute fonction borélienne bornée ψ sur $\Lambda^0 \times \mathbb{R}$ par

$$\forall (x,t) \in \Lambda^0 \times \mathbb{R} \quad \widetilde{P}\psi(x,t) = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \sum_{n=1}^{+\infty} p_{\alpha^n}(x)\psi(\alpha^n x, t + f(\alpha^n x)).$$

On a $N_{(x,a)}(A) = h(x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\widetilde{P}^n(\frac{1_A}{h} \times \xi_a)(x,0)$ avec $\xi_a(t) = e^{\delta t}1_{[0,a]}(t)$.

5. Comportement asymptotique de $N_{(x,a)}(A)$

Introduisons l'espace $L = \{\varphi : \Lambda^0 \to \mathbb{C} / \|\varphi\| = |\varphi|_\infty + m(\varphi)\} < +\infty$ où $|\varphi|_\infty$ est la norme de la convergence uniforme sur Λ^0 et $m(\varphi) = \sup_{\substack{\alpha\in\mathcal{A}\\ n\in\mathbb{N}^*}} \sup_{\substack{x,y\in\Lambda^0_{\alpha^n}\\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\delta_0}}$ avec $\delta_0 = inf(1,\delta)$. Dans le §5, nous montrons que le couple (P, f) vérifie les hypothèses H suivantes :

H1 - *P opère sur $(L, \|.\|)$*

H2 - *Le rayon spectral sur $(L, \|.\|)$ de l'opérateur $P - \nu$ est strictement inférieur à* 1

H3 -*Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, l'opérateur P_λ défini par $P_\lambda\varphi = P(e^{i\lambda f}\varphi)$ opère sur $(L, \|.\|)$ et $I - P_\lambda$ est inversible sur L*

H4 - $\sup_{x\in\Lambda^0} Pf^3(x) < +\infty$ *et* $0 < \nu(f) < +\infty$

H5 - *L'application $\lambda \mapsto P_\lambda$ est de classe C^3 de $(\mathbb{R}, |.|)$ dans l'espace de Banach des applications linéaires continues sur $(L, \|.\|)$ muni de la norme usuelle*

Reprenant alors des arguments de la théorie du renouvellement des marches de Markov sur $\mathbb{R}$ ([1], [7]), on obtient le

THÉORÈME 2. — *Pour toute fonction φ non nulle, continue par morceaux et bornée de Λ^0 dans $\mathbb{R}^+$ et toute fonction u non nulle, continue et croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$,* *on a*

$$\lim_{a\to+\infty}\sup_{x\in X}\left|\frac{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\widetilde{P}^n(\varphi\otimes u1_{[0,a]})(x,0)}{\frac{\sigma(h\varphi)}{a}\int_0^a u(t)dt}-1\right|=0.$$

En prenant $\varphi(x)=\frac{1_A(x)}{h(x)}$ et $u(t)=e^{\delta t}$, on obtient $N_{(x,a)}(A)\sim h(x)\sigma(A)\frac{e^{a\delta}}{a\delta}$ lorsque $a\to+\infty$. Le comportement asymptotique de $N(a)$ découle alors de l'encadrement $(*)$ du §4.

6. Spectre de P

En étudiant précisément l'action au bord des puissances des éléments de $\mathcal{A}$, on établit l'existence d'une constante $K>0$ telle que $\|p_{\alpha^n}\|\leq\frac{K}{n^{2\delta_0}}$ pour tout $\alpha\in\mathcal{A}$ et $n\geq1$. Comme Γ contient des transformations paraboliques on a $\delta>1/2$ si bien que la série $\sum_{\alpha\in\mathcal{A}}\sum_{n=1}^{+\infty}\|p_{\alpha^n}\|$ converge ; cette propriété est essentielle pour montrer que le couple (P,f) vérifie l'hypothèse $H1$.

Pour vérifier les hypothèses H2 et H3, on établit le

Lemme 1. — *Il existe $N\in\mathbb{N}^*$, $\rho\in]0,1[$ et deux constantes positives A,B tels que pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$ on ait*

$$\forall\varphi\in L\quad\|P_\lambda^N\varphi\|\leq\rho\|\varphi\|+(A|\lambda|+B)|\varphi|_\infty.$$

Ce lemme, lié au caractère dilatant de T, permet d'appliquer le théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu [7] ; on en déduit que le rayon spectral $\rho(P_\lambda)$ de P_λ sur L est ≤1, que les valeurs spectrales de module $\rho(P_\lambda)$ sont en nombre fini et sont des valeurs propres dont les espaces propres associés sont de dimension finie. Le contrôle des valeurs propres de module 1 résulte du lemme suivant

Lemme 2. — *i) Soient $\varphi\in L$ et $e^{i\theta}\in\mathbb{C}$ tels que $P\varphi=e^{i\theta}\varphi$. Alors*

- si $\sharp\mathcal{A}>4$ on a $e^{i\theta}=1$ et φ est constante sur Λ^0

- si $\mathcal{A}=\{\alpha_1^{\pm1},\alpha_2^{\pm1}\}$ on a $e^{i\theta}=1$ et φ est constante sur Λ^0 ou bien $e^{i\theta}=-1$ et $\varphi=C(1_{\Lambda^0_{\alpha_1}\cup\Lambda^0_{\alpha_1^{-1}}}-1_{\Lambda^0_{\alpha_2}\cup\Lambda^0_{\alpha_2^{-1}}})$

ii) Pour $\lambda\neq0$, l'opérateur P_λ ne possède pas de valeur propre de module 1 sur L.

Les hypothèse H4 et H5 reposent sur un contrôle précis de la fonction f et des poids p_{α^n}.

Remarque 1. — *L'étude du spectre des opérateurs P_λ permet d'appliquer un théorème du renouvellement "classique" ([1], [7]) décrivant le comportement lorsque a tend* *vers $+\infty$ du potentiel $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \widetilde{P}^n((x,a), dy\, dt)$; en reprenant alors les arguments de [7] on en déduit que le flot géodésique sur le fibré unitaire tangent de M est mélangeant relativement à la mesure $\overline{\mu \times dt}$ (induite par $\mu \times dt$ sur $\Lambda^0 \times_{\mathcal{A}} \Lambda^0 \times \mathbb{R}$.) Ce résultat, du à D. Rudolph en courbure constante, s'étend par la méthode des opérateurs de transfert au cas de la courbure variable pincée.*

Références

[1] Babillot M. *Théorie du renouvellement pour des chaînes semi- markoviennes transientes* Ann. I. H. P. , 24, $n^\circ 4$ (1988), 507-569.

[2] Broise A., Dal'bo F., Peigné. M. *Méthode des opérateurs de transfert: transformations dilatantes de l'intervalle et géodésiques fermées* à paraître à Astérisque

[3] Dal'bo F., Peigné. M. *Groupes du ping-pong et géodésiques fermées en courbure -1* Annales de l'Institut Fourier, T. 46, $n^\circ 3$ (1996), 755–799.

[4] Dal'bo F., Peigné. M. *Géodésiques fermées et pointes en courbure variable* C.R.A.S T. 322, Série 1, $n^\circ 10$ (1996), 939–944.

[5] Dal'bo F., Peigné. M. *Some negatively curved manifolds with cusps, mixing and counting* soumis pour publication

[6] Guillopé L. *Fonction Zeta de Selberg et surfaces de géométrie finie* Adv. Studies in Pure Math. 21, (1992), pp. 33-70.

[7] Guivarc'h Y., Hardy J. *Théorèmes limites pour une classe de chaînes de Markov et applications aux difféomorphismes d'Anosov* Ann. I. H. P., n^o 1 (1988), 73–98.

[8] Lalley S. P. *Renewal theorems in symbolic dynamics with applications to geodesic flows, non euclidean tesselations and their fractal limits* Acta. Math. 163 (1989), 1–55.

Marc PEIGNÉ
IMR
Université de Rennes 1
Campus de Beaulieu
35042 RENNES Cedex (France)