Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Manlio Bordoni

Comparaison de spectres d'opérateurs de type Schrödinger et Dirac

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 14 (1995-1996), p. 69-81
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1995-1996__14__69_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
1995–1996 (69–81)

COMPARAISON DE SPECTRES D'OPÉRATEURS DE TYPE SCHRÖDINGER ET DIRAC

Manlio BORDONI

Ces notes reprennent et élargissent un exposé que j'ai donné à l'Institut Fourier de Grenoble, le 25 avril 1996.

Les sections 2 (exemples), 4 (démonstrations) et 6 (digression) peuvent être sautées sans dommage pour la compréhension. J'ai essayé d'éviter l'excès de détails techniques en visant surtout les applications pratiques des énoncés généraux, particulièrement en développant les applications de l'opérateur de Dirac classique. Je voudrais saisir l'occasion de remercier les collègues de l'Institut Fourier pour m'avoir invité et pour leur participation amicale à ma conférence.

1. Position du problème

Soit (M, g) une variété riemannienne donnée, connexe et de dimension finie n. Notons v_g la mesure canonique induite par la métrique riemannienne g et notons

$$\ll u, v \gg_{L^2(M)} = \int_M u(x)v(x)dv_g(x)$$

le produit scalaire intégral, défini pour tout couple u, v de fonctions sur M dont le produit est mesurable ; on écrira $\ll u, v \gg_{L^2}$ ou $\ll u, v \gg$. Notons $L^2(M)$ le complété de $C^\infty(M)$ par rapport à la norme $\| \|_{L^2}$ associée au produit scalaire intégral et $H^1(M)$ le premier espace de Sobolev de M, le complété de $C^\infty(M)$ par rapport à la norme $\| \|_{H^1}$ associée au produit scalaire

$$\ll u, v \gg_{H^1} = \int_M u(x)v(x)dv_g(x) + \int_M g(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v)(x)dv_g(x).$$

Classification math. : 58G25.

Un opérateur $T : H^1(M) \to H^{-1}(M)$, *autoadjoint* par rapport au produit scalaire L^2, est dit *semi-borné* s'il existe une constante réelle a telle que $\ll Tv, v \gg_{L^2} \geq a \ll v, v \gg_{L^2}$ pour tout $v \in H^1(M)$ (on peut supposer $a = 0$ à un décalage près). Un exemple est l'opérateur de Laplace-Beltrami Δ_M portant sur les fonctions ou, plus généralement, un opérateur de Schrödinger $\Delta_M + V$, où V est une fonction sur M.

Le problème que nous voulons aborder est le suivant : quand est-il possible d'établir une comparaison entre les valeurs propres de deux opérateurs agissants sur des espaces de Hilbert bâtis sur deux variétés riemanniennes différentes ?

Précisément, soit $f : (M', g') \to (M, g)$ une application donnée entre variétés riemanniennes, et soient $T' : H^1(M') \to H^{-1}(M')$ et $T : H^1(M) \to H^{-1}(M)$ deux opérateurs autoadjoints et semi-bornés donnés (par exemple $T' = \Delta_{M'} + V'$ et $T = \Delta_M + V$). Nous cherchons à construire une application $\varpi = \varpi_f : H^1(M') \to H^1(M)$, dépendant de f, et cherchons les hypothèses convenables sur f et donc sur ϖ afin de pouvoir comparer le spectre de T' avec celui de T. Si les variétés sont compactes, les spectres considérés sont discrets ; dans le cas contraire, notre méthode établit une comparaison entre les parties discrètes des spectres, c'est-à-dire les valeurs propres inférieures au bas du spectre essentiel.

1.1. DÉFINITION. — Soit $f : (M', g') \to (M, g)$ une application donnée. Pour toutes les fonctions u sur M' pour lesquelles cette définition a un sens, posons en $x \in M$:

$$\varpi u(x) = \left(\int_M (u|_{f^{-1}(x)}(y))^2 dv_{g'_x}(y) \right)^{1/2} \tag{1.2}$$

où g'_x est la métrique induite par la restriction de g' à la fibre $f^{-1}(x)$. Par exemple, si f est une fonction de Morse, ϖu est une fonction définie presque partout sur M. L'application $\varpi : u \mapsto \varpi u$ n'est pas linéaire en général, cependant elle est positivement homogène de degré 1.

Pour pouvoir comparer les spectres de T' et T, il faudrait qu'ils satisfassent deux conditions :

1re CONDITION. — Elle n'implique pas les opérateurs. Nous dirons que f vérifie une *propriété de Fubini généralisée*, s'il existe deux constantes réelles c_1 et c_2, $0 < c_1 \leq c_2$, telle que pour toute fonction u sur M' on a

$$c_1 \|u\|^2_{L^2(M')} \leq \|\varpi u\|^2_{L^2(M)} \leq c_2 \|u\|^2_{L^2(M')}. \tag{1.3}$$

Par exemple, cette condition est satisfaite, en vertu de *la formule de la coaire*, (cf. [B-Z] Théorème 13.4.2 et Corollaire 13.4.6), si f est une application lipschitzienne et si son jacobien horizontal $J_H f$ satisfait $c_1 \leq |J_H f| \leq c_2$ presque partout. Dans ce cas, la différentielle $df(x')$ existe pour presque tout $x' \in M'$ et on peut définir le jacobien horizontal

$J_H f(x')$ comme étant le déterminant de la restriction de $df(x')$ au complément orthogonal de $T_{x'}(f^{-1}(x))$ dans $T_{x'}M'$, où $x = f(x')$. La formule de la coaire donne alors

$$\int_{M'} (u(x'))^2 |J_H f(x')| dv_{g'}(x') = \int_M \Big(\int_{f^{-1}(x)} (u_{|f^{-1}(x)}(y))^2 dv_{g'_x}(y) \Big) dv_g(x).$$

En particulier, si $J_H f = \pm 1$ presque partout, on a la propriété *de Fubini classique*:

$$\|\varpi u\|_{L^2(M)} = \|u\|_{L^2(M')} \tag{1.4}$$

à laquelle nous nous reporterons dans la suite afin de ne pas alourdir les énoncés.

2$^{\mathrm{e}}$ CONDITION. — Il existe une constante $c_3 > 0$ telle que pour tout $u \in H^1(M)$ on a

$$\ll T'u, u \gg_{L^2(M')} \geq c_3 \ll T(\varpi u), \varpi u \gg_{L^2(M)}. \tag{1.5}$$

La régularité exigée pour f dépendra des opérateurs considérés : par exemple, si on a des laplaciens, il faudra au moins la validité du théorème de Sard, c'est-à-dire que $f \in C^k$ avec $k \geq \dim M' - \dim M + 1$, et qu'il soit possible de commuter différentiation et intégration. Dans la réalité, f est toujours supposée de classe C^∞ (voir les exemples suivants) et on a toujours $c_3 = 1$ (sinon, il suffit de remplacer T par $c_3 T$). La seconde hypothèse est donc en fait,

$$\ll T'u, u \gg_{L^2(M')} \geq \ll T(\varpi u), \varpi u \gg_{L^2(M)} \tag{1.6}$$

qu'on appellera *inégalité de Kato*.

2. Exemples

Avant d'énoncer le théorème de comparaison de spectres, nous donnons quelques exemples concrets dans lesquelles les conditions de Fubini et de Kato sont vérifiées.

2.1. Exemple. — Soit Ω un domaine régulier à bord d'une variété riemannienne compacte sans bord (M, g) et soit $f : \Omega \hookrightarrow M$ l'inclusion. Les opérateurs à comparer sont les laplaciens $T' = \Delta_\Omega$, sous conditions de Dirichlet au bord, et $T = \Delta_M$. Pour toute fonction $u \in C_0^\infty(\Omega)$ à support compact inclus dans l'intérieur de Ω, on définit $\varpi u \in C^\infty(M)$ par prolongement nul hors de Ω : on obtient ainsi une *application linéaire* ϖ : $H_0^1(\Omega) \to H^1(M)$, où $H_0^1(\Omega)$ désigne le complété de $C_0^\infty(\Omega)$ par rapport à la norme H^1. Les conditions de Fubini et de Kato sont alors automatiquement satisfaites.

2.2. Exemple. — Soit $f : (\widetilde{M}, \tilde{g}) \to (M, g)$ un revêtement riemannien régulier à ℓ feuillets de variétés riemanniennes compactes sans bord. On considère les opérateurs

$T' = \Delta_{\widetilde{M}} + V'$ et $T = \Delta_M + V$, où V' est une fonction continue sur $\widetilde{M}$ et où, pour $x \in M$, $V(x) = \inf_{x' \in f^{-1}(x)} V'(x')$. Pour tout $u \in C^\infty(\widetilde{M})$, l'application $\varpi : u \mapsto \varpi u \in C^\infty(M)$ est définie par $\varpi u(x) = \Big(\sum_{x' \in f^{-1}(x)} (u(x'))^2\Big)^{1/2}$ et vérifie les propriétés de Fubini et de Kato.

2.3. — Soit $f : (M', g') \to (M, g)$ une submersion riemannienne de variétés compactes sans bord et considérons de nouveau les opérateurs $T' = \Delta_{M'} + V'$ et $T = \Delta_M + V$. Posons, conformément à la définition 1.1,

$$\varpi u = \Big(\int_{f^{-1}(x)} (u|_{f^{-1}(x)}(y))^2 dv_{g'_x}(y)\Big)^{1/2}$$

pour $u \in C^\infty(M')$. La propriété de Fubini est alors vérifiée, tandis que, pour que l'inégalité de Kato soit satisfaite, il faut supposer que les fibres sont des sous-variétés minimales de M'.

2.4. Exemple. — Soit $(E, \langle\, ,\, \rangle, D)$ un fibré vectoriel riemannien de rang r sur (M, g) muni d'une connexion D compatible avec la métrique $\langle\, ,\, \rangle$. On considère l'opérateur $T' = D^*D + R$ portant sur les sections du fibré, où D^* est l'adjoint formel de D par rapport au produit scalaire intégral et où R est un champ d'endomorphismes symétriques des fibres. (L'exemple typique est le fibré des p-formes différentielles avec T' l'opérateur de Hodge-De Rham, c'est-à-dire le laplacien Δ^p agissant sur les p-formes. Dans ce cas, la relation $\Delta^p = D^*D + R$ est donnée par la formule de Weitzenböck, où R s'exprime à l'aide de la courbure de la variété, (cf. [G-M1]). Pour toute section $s \in \Gamma(M, E)$, posons $\overline{\Omega}s(x) = |s|(x) = \langle s(x), s(x)\rangle_x^{1/2}$: la propriété de Fubini est toujours satisfaite. De plus ϖ vérifie la condition (1.6) par rapport aux opérateurs T' et $T = \Delta_M + V$, où $V(x)$ est la plus petite valeur propre de R_x. En effet, grâce à *l'inégalité de Kato classique* nous avons, $\big|d|s|\big| \leq |Ds|$ (cf. [H-S-U]).

On reviendra à l'exemple 2.4, plus en détail, dans la section 5. Cet exemple peut être ramené au cas général en considérant $M' = U(E)$ comme étant le fibré unitaire associé à E et comme application la restriction de la projection f du fibré à $U(E)$. On a une injection isométrique $L^2(M, E) \to L^2(U(E))$ qui applique une section s sur la fonction ψ_s définie par $\psi_s(v) = \sqrt{r}\langle s(f(v)), v\rangle$ pour $v \in U(E)$ (r est le rang du fibré E). Selon la définition 1.1 de ϖ, on a alors

$$(\varpi\psi_s(v))(x) = \Big(\int_{U(E_x)} r\langle v, s(f(v))\rangle_x dv\Big)^{1/2} = |s|(x)$$

où dv est la mesure canonique de masse totale égale à 1 sur la sphère $U(E_x)$.

On remarquera que l'application ϖ est linéaire dans l'exemple 2.1, mais qu'elle ne l'est pas dans les autres exemples.

3. Le théorème de comparaison

Considérons donc une application différentiable $f : (M', g') \to (M, g)$ et deux opérateurs T', T telle que l'application ϖ définie par (1.2) vérifie la propriété de Fubini (1.4) et l'inégalité de Kato (1.6).

3.1. DÉFINITION. — Soit $\mathcal{E}$ un sous-espace vectoriel de $L^2(M')$ constitué de fonctions suffisamment régulières, notons $\mathcal{E}_x$ l'image de $\mathcal{E}$ dans $L^2(f^{-1}(x))$ par la restriction $u \mapsto u|_{f^{-1}(x)}$, qui est définie pour presque tout $x \in M$; posons $\mathcal{E}_x = \{0\}$ quand u n'est pas définie sur $f^{-1}(x)$. On définit le *rang* de $\mathcal{E}$ comme *le supremum essential* des dimensions de $\mathcal{E}_x$, c'est-à-dire

$$\operatorname{rang}(\mathcal{E}) = \inf_{A \in \mathcal{A}} \sup_{x \in M \setminus A} (\dim \mathcal{E}_x)$$

où $\mathcal{A}$ est la classe des sous-ensembles de M de mesure nulle.

3.2. Remarque et exemple. — C'est pas la définition usuelle de rang. Le rang de $\mathcal{E}$ peut être beaucoup plus petit que la dimension de $\mathcal{E}$. Par exemple, un tenseur symétrique S de type $(0, q)$ sur M induit une fonction u_s sur l'espace total $M' = U(M)$ du fibré tangent unitaire, définie par $u_s(v) = S(v, \ldots, v)$. L'espace $\mathcal{E}$ de telles fonctions est de dimension infinie, tandis que $\mathcal{E}_x$ est l'espace des polynômes homogènes symétriques de degré q sur $T_xM \cong \mathbb{R}^n$ et donc le rang de $\mathcal{E}$ est $\binom{n+q-1}{q}$.

On peut maintenant énoncer le théorème principal de comparaison des valeurs propres :

3.3. THÉORÈME. — *Soit $f : (M', g') \to (M, g)$ une application différentiable. Supposons que l'application ϖ induite par f* (cf. *Définition 1.1) vérifie la propriété de Fubini (1.4) et l'inégalité de Kato (1.6) par rapport à deux opérateurs autoadjoints et semi-bornés donnés $T' : H^1(M') \to H^{-1}(M')$ et $T : H^1(M) \to H^{-1}(M)$. Pour tout entier positif N, les valeurs propres de T' et T vérifient les inégalités*

(i) $\lambda_N(T') \geq (1 - C(r))\lambda_1(T) + C(r)\lambda_{k+1}(T)$;

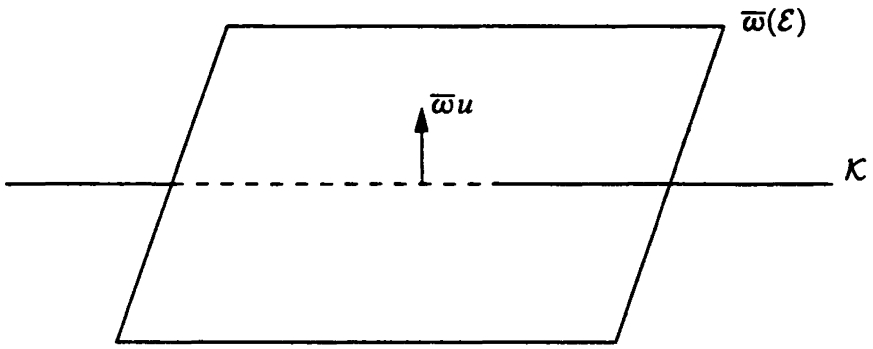
(ii) $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i(T') \geq (N - k)\lambda_1(T) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} \lambda_j(T) + NC(r)\lambda_{k+1}(T)$

où r est le rang du sous-espace engendré par les N premières fonctions propres de T', où $k = \left[\frac{N}{r+1}\right]$ et où $C(r)$ est une constante universelle strictement comprise entre 0 et 1, $C(r) = \frac{1}{8(r+1)^2}$. Si les opérateurs ont des spectres non discrets, les inégalités (i) et (ii) sont valables pour la partie discrète des spectres.

4. Démonstrations

On donne ici une idée de la démonstration de l'inégalité *(i)* du théorème 3.3, en considérant d'abord le cas simple où $\overline{\omega}$ est linéaire. La démonstration de *(ii)* est plus technique et pour cela nous renvoyons à [B].

Preuve de (i) quand $\overline{\omega}$ est linéaire. — Notons $\mathcal{E}$ le sous-espace de $H^1(M')$ engendré par les N premières fonctions propres de T' et $\mathcal{K}$ le sous-espace de $H^1(M)$ engendré par les k premières fonctions propres de T, et supposons $\dim \overline{\omega}(\mathcal{E}) > \dim \mathcal{K}$: il existe alors $u \in \mathcal{E} \setminus \{0\}$, L^2-orthogonale à $\mathcal{K}$.



On a, pour une telle fonction u :

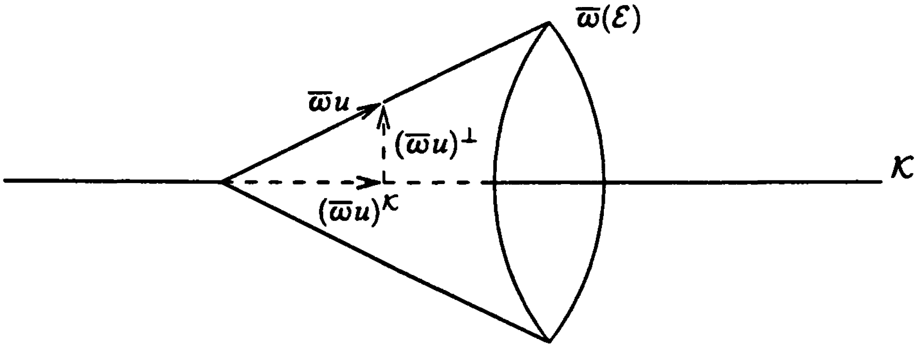
$$\lambda_N(T')\|u\|^2_{L^2(M')} \geq \ll T'u, u \gg_{L^2(M')} \geq \ll T(\overline{\omega}u), \overline{\omega}u \gg_{L^2(M)} \geq$$
$$\geq \lambda_{k+1}(T)\|\overline{\omega}u\|^2_{L^2(M)} = \lambda_{k+1}(T)\|u\|^2_{L^2(M')}$$

où la première inégalité découle du principe du min-max, la deuxième de l'inégalité de Kato, la troisième du max-min et l'égalité finale est la propriété de Fubini. On en déduit $\lambda_N(T') \geq \lambda_{k+1}(T)$, qui est mieux que *(i)*. ■

Par exemple, si Ω est un domaine régulier de M compact et si ω est le prolongement naturel (cf. Exemple 2.1), en comparant le spectre de Dirichlet de Ω et le spectre de M, *(i)* donne le résultat trivial $\lambda_N^D(\Omega) \geq \lambda_N(M)$. Bien que la démonstration soit simple dans le cas linéaire, l'inégalité *(i)* est à la base de nombreux théorèmes de comparaison de spectres (rappelons, par exemple, les résultats de S. Y. Cheng, S. Gallot, M. Gromov, P. Li et S.T. Yau).

Idée de la preuve de (i) dans le cas où $\overline{\omega}$ n'est pas linéaire. — Dans ce cas, $\overline{\omega}(\mathcal{E})$ est un demi-cône. Pour $u \in \mathcal{E}$, notons $(\overline{\omega}u)^k$ et $(\overline{\omega}u)^{\perp}$ la projection orthogonale de $\overline{\omega}u$

sur $\mathcal{K}$ et la composante orthogonale à $\mathcal{K}$.



La décomposition $\overline{\omega}u = (\overline{\omega}u)^{\mathcal{K}} + (\overline{\omega}u)^{\perp}$ est à la fois L^2-orthogonale et orthogonale par rapport à la forme quadratique associée à l'opérateur T. Alors, la même suite d'inégalités que celles utilisées lorsque $\overline{\omega}$ est linéaire (à savoir min-max, inégalité de Kato, max-min et min-max, propriété de Fubini) donne

$$\begin{aligned} \lambda_N(T')\|u\|^2 &\geq \ll T'u, u \gg \geq \ll T(\overline{\omega}u), \overline{\omega}u \gg \\ &= \ll T(\overline{\omega}u)^{\perp}, (\overline{\omega}u)^{\perp} \gg + \ll T(\overline{\omega}u)^{\mathcal{K}}, (\overline{\omega}u)^{\mathcal{K}} \gg \\ &\geq \lambda_{k+1}(T)\|(\overline{\omega}u)^{\perp}\|^2 + \lambda_1(T)\|(\overline{\omega}u)^{\mathcal{K}}\|^2 \\ &= \Big(\lambda_1(T) + \big(\lambda_{k+1}(T) - \lambda_1(T)\big)\frac{\|(\overline{\omega}u)^{\perp}\|^2}{\|\overline{\omega}u\|^2}\Big)\|u\|^2. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Maintenant, si le cône est trop concentré autour de $\mathcal{K}$, le rapport $\frac{\|(\overline{\omega}u)^{\perp}\|^2}{\|\overline{\omega}u\|^2}$ est très petit. Pour avoir une borne $\frac{\|(\overline{\omega}u)^{\perp}\|^2}{\|\overline{\omega}u\|^2} \geq C > 0$ il faut donc avoir la possibilité de s'écarter suffisamment de $\mathcal{K}$. Ceci est possible grâce au lemme technique suivant (cf. [G-M2], [B]) :

4.2. Lemme hilbertien. — *Sous les mêmes hypothèses que celles du théorème 3.3, pour tout couple de sous-espaces vectoriels $\mathcal{E} \subset H^1(M')$ et $\mathcal{K} \subset H^1(M)$ tel que $\dim \mathcal{K} < \frac{\dim \mathcal{E}}{\operatorname{rang} \mathcal{E}}$, il existe une constante universelle $C = C(\dim \mathcal{E}, \dim \mathcal{K})$, $0 < C < 1$, telle que*

$$\underset{u\in\mathcal{E},\|u\|=1}{\text{moyenne}} \|(\overline{\omega}u)^{\perp}\|^2 \geq C \underset{u\in\mathcal{E},\|u\|=1}{\text{moyenne}} \|\overline{\omega}u\|^2$$

Par conséquent, il existe au moins une fonction $u \in \mathcal{E} \setminus \{0\}$ telle que $\frac{\|(\overline{\omega}u)^{\perp}\|^2}{\|\overline{\omega}u\|^2} \geq C$. En insérant cette dernière inégalité dans (4.1), on achève la démonstration de (i).

La valeur de la constante C est calculée dans les papiers susdits. Le lemme hilbertien, dont l'énoncé préliminaire partiel est dû à D. Meyer, admet une version L^p (cf. [G-M2]). Le calcul de la constante C est optimal lorsque $\dim \mathcal{K} = 1$: il s'agit alors d'une amélioration de l'inégalité de Hölder (de Cauchy-Schwarz pour $p = 1$).

4.3. Remarque et exemple. — L'hypothèse sur la dimension dans le Lemme hilbertien et donc dans le théorème principal est optimale. Par exemple, considérons le fibré trivial $M \times \mathbb{R}^r \to M$ de rang r, et l'application $\overline{\omega}s = |s|$, norme d'une section (cf.

Exemple 2.4). Soient $s_1, \dots, s_r$, r sections constantes indépendantes et soient $f_1, \dots, f_k$, k fonctions indépendantes sur M, dont le sous-espace engendré est noté $\mathcal{K}$. Les produits $f_i s_j$ engendrent un sous-espace de sections $\mathcal{E}$ de dimension kr et de rang r et, pour tout $u \in \mathcal{E}$, on a $(\overline{\omega} u)^{\mathcal{K}} = \overline{\omega} u$.

5. Applications : principe général

Parmi les applications possibles du théorème de comparaison 3.3, nous développerons ici le cas d'une variété riemannienne compacte sans bord (M, g), sur laquelle on considère un fibré vectoriel réel E de rang r ; $f : E \to M$ est la projection du fibré (cf. Exemple 2.4). Supposons le *fibré riemannien*, c'est-à-dire muni d'un produit scalaire $\langle\, ,\, \rangle_x$ sur chaque fibre $E_x = f^{-1}(x)$, qui varie continûment quand x varie dans M. Supposons de plus que le fibré est muni d'une *connexion* D, portant sur les sections du fibré, *compatible avec la métrique* $\langle\, ,\, \rangle_x$. Pour toute section différentiable $s \in \Gamma(M, E)$ on définit sur M la fonction *norme ponctuelle* de s, $|s|(x) = \langle s(x), s(x)\rangle_x^{1/2}$. Notons $L^2(M, E)$ l'espace de Hilbert des sections telle que $|s| \in L^2(M)$, c'est-à-dire telle que $|s|$ est mesurable sur M et $\|s\|_{L^2(M,E)} = \left(\int_M (|s|(x))^2 dv_g(x)\right)^{1/2} < +\infty$, et notons $H^1(M, E)$ l'espace des sections L^2 telle que $|Ds| \in L^2(M)$. L'application $\overline{\omega}$, définie sur les sections différentiables par $\overline{\omega} s = |s|$, se prolonge à $H^1(M, E)$ et la propriété de Fubini (1.4) est automatiquement satisfaite.

5.1. Définition. — On appellera *laplacien brut* l'opérateur $D^* D$ portant sur les sections du fibré, où D^* est l'adjoint formel de D par rapport au produit scalaire intégral de sections, et *laplacien naturel*, dans le sens de J.-P. Bourguignon, l'opérateur $T' = D^* D + R$, où R est un champ d'endomorphismes symétriques agissant sur les fibres : T' est un opérateur différentiel d'ordre deux avec des propriétés similaires à celles du laplacien ; la formule $T' = D^* D + R$ s'appelle *formule de Weitzenböck*. L'*opérateur de Dirac* $\mathcal{D}$ associé à T est (*quand il existe*) un opérateur autoadjoint d'ordre 1, portant sur les sections du fibré, tel que $\mathcal{D}^2 = T' = D^* D + R$.

Notre but est de comparer le spectre de T' avec le spectre d'un opérateur de Schrödinger $T = \Delta_M + V$ portant sur les fonctions, où $V(x)$ est une fonction donnée. L'inégalité (1.6) découle de l'*inégalité de Kato classique* $\big|d|s|\big| \leq |Ds|$ (qui est naturelle, car Ds contient la composante $d|s|$, qui est la dérivée de la longueur de s, ainsi que la composante orthogonale, qui est la « dérivée de la rotation de s » ; (cf. [H-S-U] pour une preuve rigoureuse) ; on suppose de plus que $\langle R_x s(x), s(x)\rangle_x \geq V(x)\langle s(x), s(x)\rangle_x$ pour tout $x \in M$ et pour toute section s. En particulier, nous prendrons $V(x) = R_{\min}(x) =$ plus petite valeur propre de R_x.

Dans cette situation, quel que soit le sous-espace $\mathcal{E}$ de sections, le rang de $\mathcal{E}$ est majoré par le rang du fibré E. Le théorème 3.3 donne alors la comparaison entre les valeurs propres de T' et celles de T, c'est-à-dire entre les carrés des valeurs propres de l'opérateur de Dirac $\mathcal{D}$ et les valeurs propres de l'opérateur de Schrödinger $\Delta_M + V$:

5.2. Théorème. — *Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle, D)$ un fibré vectoriel riemannien de rang r sur la variété riemannienne compacte sans bord (M, g), muni d'une connexion D compatible avec la métrique. Soit R un champ d'endomorphismes symétriques agissant sur les fibres, et notons $R_{\min}(x)$ la plus petite valeur propre de R au point $x \in M$. Pour tout entier N on a :*

(i) $\lambda_N(D^*D + R) \geq (1 - C(r))\lambda_1(\Delta_M + R_{\min}) + C(r)\lambda_{k+1}(\Delta_M + R_{\min})$;

(ii) $$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i(D^*D + R) \geq (N - k)\lambda_1(\Delta_M + R_{\min}) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k} \lambda_j(\Delta_M + R_{\min}) + NC(r)\lambda_{k+1}(\Delta_M + R_{\min}).$$

où $K = [\frac{N}{r+1}]$ *et* $C(r) = \frac{1}{8(r+1)^2}$.

6. Digression : pourquoi comparer des spectres ?

L'utilisation principale des comparaisons de valeurs propres d'opérateurs repose sur la *méthode de Bochner* qui sert à estimer les invariants topologiques ou géométriques d'une variété (M, g) qui s'écrivent comme dimension du noyau d'un laplacien naturel agissant sur les sections d'un certain fibré. Plus précisément, notons τ l'invariant à estimer. On bâtit un fibré vectoriel riemannien muni d'une connexion compatible $(E, \langle\ ,\ \rangle, D)$ sur M et un opérateur elliptique T' défini sur les sections du fibré de façon que la dimension de son noyau (finie car T' est elliptique) soit égal à τ. On calcule la différence R entre T' et le laplacien brut D^*D, c'est-à-dire une formule de Weitzenböck : R est un champ d'endomorphismes symétriques agissant sur les fibres. Si $R_{\min}(x)$ désigne la plus petite valeur propre de R_x, on obtient les résultats suivants :

1) $R_{\min} > 0 \Longrightarrow \dim(\operatorname{Ker} T') = 0$

(en fait, il suffit que $R_{\min} \geq 0$ et qu'il existe au moins x_0 tel que $R_{\min}(x_0) > 0$) ;

2) $R_{\min} \geq 0 \Longrightarrow \dim(\operatorname{Ker} T') \leq \operatorname{rang} E$.

Preuve. — Pour tout $s \in \operatorname{Ker} T'$, $s \neq 0$, on a

$$0 = \langle\!\langle T's, s \rangle\!\rangle = \int_M |Ds|^2 + \int_M \langle Rs, s\rangle \geq \int_M |Ds|^2 + \int_M R_{\min}|s|^2.$$

$R_{\min} > 0$ implique alors que $\int_M |Ds|^2 < 0$ ce qui est absurde et donc que Ker $T' = \{0\}$, tandis que $R_{\min} \geq 0$ implique $\int_M |Ds|^2 \leq 0$ et donc que $Ds = 0$, c'est-à-dire que Ker T' coïncide avec l'espace des sections parallèles de E qui est de dimension $\leq$ rang E. ∎

6.1. Exemple. — Soit (M, g) une variété riemannienne compacte sans bord de dimension n, considérons le fibré ΛM des formes différentielles, muni de la métrique riemannienne induite par g et de la connexion de Levi-Civita D, qui est compatible avec la métrique. L'opérateur de Dirac est, dans ce cas, $\mathcal{D} = d + \delta$, somme de la différentielle d et de la codifférentielle δ, et son carré est le laplacien de Hodge-De Rham $T' = \mathcal{D}^2 = d\delta + \delta d$, qui agit sur les p-formes, $\Delta^{(p)} : \Lambda^p M \to \Lambda^p M$. La formule de Weitzenböck classique est $\Delta^{(p)} = D^* D + R$, où R est un champ d'endomorphismes symétriques agissant sur les fibres qui se calcule en terme de la courbure de la variété : par exemple pour $p = 1$, R est la courbure de Ricci (cf. [G-M1]). L'opérateur de Schrödinger à comparer avec T' est $T = \Delta_M + R_{\min}$. Le théorème principal 3.3 (où le théorème 5.2) donne les estimées *(i)*, *(ii)* avec $r = \binom{n+1}{p}$ = rang du fibré des p-formes. L'invariant topologique que la méthode de Bochner permet d'estimer est le p-ième nombre de Betti $b_p(M)$ de la variété. Le résultat original de Bochner concernait le premier nombre de Betti, à savoir :

1) $\mathrm{Ricci}_{\min}(M, g) > 0 \Longrightarrow b_1(M) = 0$;

2) $\mathrm{Ricci}_{\min}(M, g) \geq 0 \Longrightarrow b_1(M) \leq n + 1$.

Notre théorème donne donc une extension dans le cas de courbure négative.

7. Applications à l'opérateur de Dirac classique

Supposons que (M, g) soit une variété riemannienne compacte n-dimensionnelle sans bord orientée et qui admet une structure spinorielle (rappelons au passage que ces deux dernières hypothèses sont équivalentes à l'annulation des deux premières classes de Stiefel-Whitney de M). Considérons le fibré des spineurs $S \to M$, qui est un fibré vectoriel de rang $2^{[\frac{n}{2}]}$: il est bien connu que sur ce fibré il existe une métrique $\langle\, ,\, \rangle$ Spin_n-invariante, c'est-à-dire tel que, pour tout vecteur tangent $X \in \Gamma(TM)$ et pour tout spineur $s \in \Gamma(S)$, on a

$$\langle X \cdot \varphi, X \cdot \varphi \rangle = g(X, X) \langle \varphi, \varphi \rangle$$

où $\cdot$ désigne la multiplication de Clifford. De plus, la connexion D induite par la connexion de Levi-Civita est compatible avec cette métrique (cf. [L-M]).

L'opérateur de Dirac classique agissant sur les spineurs, $\mathcal{D} : \Gamma(S) \to \Gamma(S)$, est défini au point $x \in M$ par

$$(7.1) \qquad (\mathcal{D}\varphi)_x = \sum_{i=1}^{n} (e_i \cdot D_{e_i}\varphi)_x$$

où $(e_1, \dots, e_n)$ est un repère orthonormé orienté de l'espace tangent T_xM. La formule de Weitzenböck correspondant à $\mathcal{D}^2$ est la *formule de Lichnerowicz* [L] :

$$(7.2) \qquad \mathcal{D}^2\varphi = (D^*D + \frac{1}{4}(\text{scal})\ \text{Id})\varphi$$

où scal est la courbure scalaire de (M, g).

Le théorème principal 3.3, appliqué aux opérateurs $T' = \mathcal{D}^2$ et $T = \Delta_M + \frac{1}{4}$ scal, donne :

7.3. Proposition. — *(Comparaison du spectre de l'opérateur de Dirac $\mathcal{D}$ avec le spectre du laplacien Δ_M). Soit (M^n, g) une variété spinorielle compacte sans bord. Pour tout ensemble $\{\lambda_i(D)\}_{i \in I}$ de valeurs propres de l'opérateur de Dirac on a*

(i) $\sup_{i \in I} \lambda_i(\mathcal{D})^2 \geq (1 - C(r))\lambda_1(\Delta_M + \frac{1}{4}\text{ scal}) + C(r)\lambda_{k+1}(\Delta_M + \frac{1}{4}\text{ scal})$;

(ii) $\sum_{i \in I} \lambda_i(\mathcal{D})^2 \geq (\#I - k)\lambda_1(\Delta_M + \frac{1}{4}\text{ scal}) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k} \lambda_j(\Delta_M + \frac{1}{4}\text{ scal}) +$
$+ (\#I)C(r)\lambda_{k+1}(\Delta_M + \frac{1}{4}\text{ scal})$

où $r = 2^{[\frac{n}{2}]}$, $k = [\frac{\#I}{r+1}]$, $C(r) = \frac{1}{8(r+1)^2}$.

Afin de mieux comprendre le type de résultat que nous avons obtenu, considérons le cas $I = \{1\}$: *(i)* et *(ii)* donnent alors *l'inégalité de Lichnerowicz sur la première valeur propre* :

$$(7.4) \qquad \lambda_1(\mathcal{D})^2 \geq \lambda_1\big(\Delta_M + \frac{1}{4}\text{ scal}\big) \geq \frac{1}{4}\min_{x \in M} \text{scal}(x) = \frac{s_0}{4}.$$

Ici et par la suite, on notera toujours $s_0 = \min_{x \in M} \text{scal}(x)$. Naturellement, l'inégalité (7.4) n'est intéressante que pour $s_0 > 0$, mais la valeur minimale $\frac{s_0}{4}$ ne peut pas être atteinte. En effet l'inégalité optimale est *l'inégalité de Friedrich* [F] :

$$(7.5) \qquad \lambda_1(\mathcal{D})^2 \geq \frac{n}{n-1}\,\frac{s_0}{4}$$

et il est connu que, si le minimum est atteint, alors (M, g) est une variété d'Einstein, mais qui n'est pas kählerienne. (Rappelons que si (M, g) est une variété compacte sans bord de dimension paire $2m$, qui admet à la fois des structures spinorielles et kähleriennes, K. D. Kirchberg [K] a démontré que $\lambda_1(\mathcal{D})^2 \geq \frac{m+1}{m} \cdot \frac{s_0}{4}$ pour m pair, $\lambda_1(\mathcal{D})^2 \geq \frac{m}{m-1} \cdot \frac{s_0}{4}$ pour m impair ; les cas d'égalité ont été récemment classifiés récemment par A. Moroianu).

Dans le but d'obtenir des inégalités de type *(i)*, *(ii)* qui, pour la première valeur propre, donnent le résultat optimal de Friedrich, il faut considérer un autre opérateur T', bâti à l'aide d'une connexion modifiée.

7.6. Proposition. — *Sous les hypothèses et avec les notations de la proposition 7.3, on a*

(i) $\sup_{i\in I}\lambda_i(\mathcal{D})^2 \geq \frac{n}{n-1}\Big((1-C(r))\lambda_1(\Delta_M+\frac{1}{4}\,\mathrm{scal})+C(r)\lambda_{k+1}(\Delta_M+\frac{1}{4}\,\mathrm{scal})\Big)$;

(ii) $\sum_{i\in I}\lambda_i(\mathcal{D})^2 \geq \frac{n}{n-1}\Big((\#I-k)\lambda_1(\Delta_M+\frac{1}{4}\,\mathrm{scal})+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(\Delta_M+\frac{1}{4}\,\mathrm{scal})+$

$$+(\#I)C(r)\lambda_{k+1}(\Delta_M+\tfrac{1}{4}\,\mathrm{scal})\Big).$$

Preuve. — Considérons la connexion ∇, déjà introduite par T. Friedrich et utilisée de façon intensive par O. Hijazi dans ses travaux, citons en particulier [H], définie par

$$\nabla_X\varphi = D_X\varphi + \frac{\lambda}{n}X\cdot\varphi.$$

La construction de ∇ est telle que tout spineur φ parallèle pour ∇ est un spineur propre relatif à la valeur propre λ (φ est alors appelé un *spineur de Killing*). Un calcul direct donne $|D\varphi|^2 = |\nabla\varphi|^2 - \frac{\lambda^2}{n}\langle D\varphi,\varphi\rangle$. En appliquant la formule de Lichnerowicz (7.2) et en intégrant sur M, on a

$$\int_M\langle\mathcal{D}^2\varphi,\varphi\rangle - 2\frac{\lambda}{n}\langle\mathcal{D}\varphi,\varphi\rangle + \frac{\lambda^2}{n}|\varphi|^2 = \int_M\langle(\nabla^*\nabla+\frac{1}{4}(\mathrm{scal})\ \mathrm{Id})\varphi,\varphi\rangle$$

les opérateurs $\mathcal{D}^2-\frac{2\lambda}{n}\mathcal{D}+\frac{\lambda^2}{n}\,\mathrm{Id}$ et $\nabla^*\nabla+\frac{1}{4}(\mathrm{scal})\,\mathrm{Id}$ ont les mêmes formes quadratiques et donc les mêmes valeurs propres. On vérifie aisément que $\mathcal{D}\varphi=\lambda\varphi$ implique que $\frac{n-1}{n}\lambda^2$ est une valeur propre des opérateurs ci-dessus. Il suffit alors d'appliquer le théorème 3.3 aux opérateurs $T'=\nabla^*\nabla+\frac{1}{4}(\mathrm{scal})\ \mathrm{Id}$ et $T=\Delta_M+\frac{1}{4}\,\mathrm{scal}$ pour achever la démonstration. En particulier, pour $\lambda=\lambda_1(\mathcal{D})$ on a l'inégalité de Friedrich (7.5). ∎

7.7. *Remarque.* — Les estimées obtenues sont optimales. En effet, une conséquence de la proposition 7.6 est qu'il existe au plus $2^{[\frac{n}{2}]}$ (= dimension de la fibre S_x) valeurs propres de $\mathcal{D}^2$ telles que $\frac{n}{n-1}\cdot\frac{s_0}{4}\leq\lambda(\mathcal{D})^2\leq(\frac{n}{n-1})\frac{s_0}{4}+\frac{n}{n-1}\lambda_2(\Delta_M)$ et pour le *tore plat* il y a précisément $2^{[\frac{n}{2}]}$ valeurs propres égales à $(\frac{n}{n-1})\frac{s_0}{4}=0$.

Pour finir, donnons une relation entre topologie et spectre. Le $\widehat{A}$-genre, $\widehat{A}(M)$, est un invariant topologique qui est égal à l'index de l'opérateur de Dirac $\mathcal{D}$ et qui est donc majoré par la dimension du noyau de $\mathcal{D}$:

$$\widehat{A}(M)=\dim(\mathrm{Ker}\,\mathcal{D})-\dim(\mathrm{coKer}\,\mathcal{D})\leq\dim(\mathrm{Ker}\,\mathcal{D}).$$

7.8. Corollaire. — *Pour toute variété spinorielle (M^n,g) dont le $\widehat{A}$-genre est non nul, le spectre du laplacien vérifie*

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(\Delta_M)+C(r)\widehat{A}(M)\lambda_{k+1}(\Delta_M)\leq-\widehat{A}(M)\frac{s}{4}$$

où $r = 2^{[\frac{n}{2}]}$, $k = [\frac{\widehat{A}(M)}{r+1}]$, $C(r) = \frac{1}{8(r+1)^2}$. *On a donc que* $\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(\Delta_M) \leq -\frac{s_0}{4}$, *où* k *est de l'ordre de* $\widehat{A}(M)$.

Bibliographie

[B] Bordoni M. — *Spectral estimates for Schrödinger and Dirac-type operators on Riemannian manifolds*, Math. Ann. 298 (1994), 693–718.

[B-Z] Burago Yu. D., Zalgaller V. A. — *Geometric inequalities*, Grundlehren der math. Wiss., Springer Verlag, 285, 1988.

[F] Friedrich T. — *Der erste Eigenwert des Dirac Operators einer kompakten Riemannschen Manigfaltigkeit nichtnegativer Skalar-Krümmung*, Math. Nachr. 97 (1980), 117–146.

[G-M1] Gallot S., Meyer D. — *Opérateur de courbure et laplaciens des formes différentielles d'une variété riemannienne*, J. Math. Pures Appl. 54 (1975), 259–284.

[G-M2] Gallot S., Meyer D. — *D'un résultat hilbertien à un principe de comparaison entre spectres-applications*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup., IV série 21 (1988), 561–591.

[H-S-U] Hess H., Schrader R., Uhlenbrock D. A. — *Kato's inequality and the spectral distribution of Laplacian on compact Riemannian manifolds*, J. Diff. Geom. 15 (1980), 27–38.

[H] Hijazi O. — *A conformal lower bound for the smallest eigenvalue of the Dirac operator and Killing spinors*, Commun. Math. Phys. 104 (1986), 151–162.

[K] Kirchberg K. D. — *An estimation for the first eigenvalue of the Dirac operator on closed Kähler manifolds with positive scalar curvature*, Ann. Glob. Anal. Geom. 4 (1986), 291–326.

[L-M] Lawson H. B., Michelson M. L. — *Spin Geometry*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1989.

[L] Lichnerowicz A. — *Spineurs harmoniques*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 257 (1963), 7–9.

Manlio BORDONI
Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo"
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Ple Aldo Moro, 2
00185 ROMA
(Italia)
e-mail : bordoni@axrma.uniroma1.it