Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

BRUNO COLBOIS

Le spectre du laplacien agissant sur les p-formes différentielles

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 14 (1995-1996), p. 25-37
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1995-1996__14__25_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
1995–1996 (25–37)

LE SPECTRE DU LAPLACIEN AGISSANT SUR LES p-FORMES DIFFÉRENTIELLES

Bruno COLBOIS

L'objet de cet article est de présenter quelques résultats récents sur le spectre du laplacien agissant sur les p-formes différentielles d'une variété riemannienne compacte ainsi qu'un résultat nouveau obtenu en collaboration avec G. Courtois [CC96].

Dans un premier temps on va rappeler quelques théorèmes classiques sur le contrôle du spectre des fonctions afin de mettre en perspective les résultats obtenus dans le cadre des formes différentielles et les nombreuses questions ouvertes.

Dans la suite, (M, g) désignera une variété riemannienne connexe, compacte et orientée.

Les p-formes différentielles C^∞, notées $\Omega^p(M)$, sont munies du produit scalaire standard $\langle \alpha, \beta \rangle = \int_M \alpha \wedge *\beta$ où $\alpha, \beta \in \Omega^p(M)$ et où $*$ désigne l'opérateur de Hodge.

Le laplacien agissant sur les p-formes différentielles est l'opérateur $\Delta = dd^* + d^* d$, où d désigne la différentielle extérieure et d^* la codifférentielle, adjoint de d relativement au produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$. Rappelons la relation $d^* = (-1)^{n(p+1)+1} * d *$, où $n = \dim M$ et où d^* agit sur les p-formes différentielles. Lorsque $p = 0$, on retrouve le laplacien classique agissant sur les fonctions $\Delta = d^* d = -$ divgrad.

Le spectre du laplacien agissant sur les p-formes différentielles sera noté

$$p - \mathrm{spec}(M, g) = \{0 = \lambda_{0,p}(M, g) < \lambda_{1,p}(M, g) \leq \lambda_{2,p}(M, g) \leq \cdots \nearrow \infty\}.$$

Remarquons que l'on impose ici $\lambda_{0,p}(M, g) = 0$. La multiplicité de $\lambda_{0,p}(M, g)$ est en fait un invariant topologique bien connu : le $p^{\text{ième}}$ nombre de Betti de la variété M, noté $b_p(M)$ (théorème de Hodge-De Rham). $b_p(M)$ est également la dimension du $p^{\text{ième}}$ groupe de cohomologie de De Rham, noté $H^p(M, \mathbb{R})$ ([Wa83]). Ainsi, la première valeur propre non nulle sera toujours notée $\lambda_{1,p}(M, g)$. Depuis $\lambda_{1,p}$, on répète les valeurs propres avec la multiplicité s'il y a lieu.

Classification math. : 58G25, 53C21.
Mots clés : Laplacien, formes différentielles, valeurs propres.

1. Le spectre des fonctions

On rappelle ici quelques résultats classiques sur la majoration et sur la minoration de la première valeur propre non nulle $\lambda_{1,0}(M,g)$ du spectre des fonctions. Notons que lorsque M est connexe, on a toujours $b_0(M) = 1$. Ainsi, 0 est de multiplicité 1 dans le spectre des fonctions et correspond à la fonction constante.

Le premier théorème montre l'existence d'un trou dans le spectre entre 0 et $\lambda_{1,0}$ sous des hypothèses assez générales : courbure de Ricci et diamètre minoré. Le théorème 1.1 cité ci-dessous est tiré de [CZ95]. À noter de nombreuses contributions diverses pour ce type de résultat, par exemple [BBG85] et [Gr80].

THÉORÈME 1.1. — *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte connexe de dimension n, dont le diamètre est d et dont la courbure de Ricci satisfait* $\mathrm{Ricci}(M,g) \geq -Lg$, *où L est une constante positive. Alors*
$$\lambda_{1,0}(M,g) \geq \frac{\pi^2}{d^2} e^{-\frac{1}{2}c_n\sqrt{Ld^2}} \text{ où } c_n = \max\{\sqrt{n-1}, \sqrt{2}\}.$$
On en déduit immédiatement le corollaire 1.2 (à comparer avec le théorème 2.8).

COROLLAIRE 1.2. — *Soit $\mathcal{M}(n,a,d)$ (a, d constantes positives) l'ensemble des variétés riemanniennes compactes connexe de dimension n dont la courbure sectionnelle et le diamètre vérifient $|K(M,g)| \leq a$, $\mathrm{diam}(M,g) \leq d$. Il existe alors une constante positive $c(n,a,d)$ (donnée explicitement par le théorème 1.1) telle que, pour toute variété $(M,g) \in \mathcal{M}(n,a,d)$, on a :*
$$\lambda_{1,0}(M,g) \geq c(n,a,d).$$

Remarque 1.3. — Lorsque l'on considère des variétés à courbure de Ricci positive $\mathrm{Ricci}(M,g) \geq (n-1)kg$, la constante du théorème 1.1 est $c(n,k) = nk$ ([Li58]) ($k > 0$).

Remarque 1.4. — L'ensemble $\mathcal{M}(n,a,d)$ est grand, en ce sens que dès que $n \geq 3$, il comporte un nombre infini de variétés deux à deux non difféomorphes (il suffit par exemple de penser aux espaces lenticulaires). Ainsi, avec pour seules informations une borne sur la courbure et le diamètre d'une variété riemannienne compacte, mais sans avoir par exemple une idée précise de sa topologie, on peut déduire l'existence d'un trou dans le spectre, dont on contrôle l'amplitude.

Le résultat suivant montre qu'au contraire, le trou spectral ne peut pas être trop grand, dès lors que l'on contrôle la courbure et le diamètre.

THÉORÈME 1.5 ([Cg75]). — *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte, connexe de dimension n dont la courbure sectionnelle vérifie $K(M,g) \geq -1$ et de diamètre* diam$(M, g) = d$. *Alors*

$$\lambda_{1,0}(M, g) \leq \frac{(n-1)^2}{4} + \frac{c(n)}{d^2}$$

où $c(n)$ est une constante ne dépendant que de la dimension.

Remarque 1.6. — Lorsque la courbure sectionnelle est non négative, on a le résultat plus précis dû à J. Cheeger [Cr68] : il existe une constante $c(n) > 0$ ne dépendant que de la dimension telle que :

$$\lambda_{1,0}(M, g) \leq c(n)/(\mathrm{diam}(M, g))^2.$$

Aux vues de ces différents résultats, une question est donc de savoir si lorsque, à courbure bornée, le diamètre tend vers l'infini, $\lambda_{1,0}$ tend ou non vers 0. Les deux situations peuvent se produire. Cette question a un intérêt particulier lorsqu'on la relie à des problèmes de nature combinatoire (cf. [Br86]). Signalons simplement ici la question difficile suivante :

Question 1.7. — Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte à courbure -1. Existe-t-il une famille $(M_i, g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de revêtements riemanniens de degré fini d_i de (M, g) tel que

(i) $d_i \to \infty$ lorsque $i \to \infty$.

(ii) $\lambda_{1,0}(M_i, g_i) \geq \frac{(n-1)^2}{4}, \forall i \in \mathbb{N}$.

La difficulté de construire une telle famille d'exemples est que lorsque $d_i \to \infty$, diam$(M_i, g_i) \to \infty$ et donc $\lambda_{1,0}(M_i, g_i) \leq \frac{(n-1)^2}{4} + o(1)$ (thm. 1.5). Notons que des exemples existent où $\lambda_{1,0}(M_i, g_i) \geq c > 0$ ou c est indépendante de i ([Br86]).

Inégalité de Cheeger [Cr70], [BGM71].

Définition 1.8. — Soit (M, g) une variété riemannienne compacte. On désigne par h la borne inférieure du rapport $\mathrm{vol}^{n-1} S/\min(\mathrm{vol}\, M_1, \mathrm{vol}\, M_2)$ lorsque S parcourt l'ensemble des sous-variétés fermées de dimension $(n-1)$ de M qui réalisent sur M une partition en deux sous-variétés M_1 et M_2 de dimension n dont S est le bord commun. h s'appelle la constante de Cheeger de la variété (M, g).

Théorème 1.9 [Cr70]. — *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte, connexe. Alors $\lambda_{1,0}(M, g) \geq \frac{h^2(M,g)}{4}$.*

L'intérêt de cette estimation est qu'elle n'impose aucune contrainte *a priori* sur la géométrie (courbure, diamètre, volume) de (M, g).

Sous des hypothèses concernant la courbure de Ricci, la constante de Cheeger permet également de majorer la première valeur propre non nulle.

THÉORÈME 1.10 [Bu82]. — *Soit* (M, g) *une variété riemannienne compacte. Si* $\mathrm{Ricci}(M, g) \geq -(n-1)k^2 g$ *alors* $\lambda_{1,0}(M, g) \leq c(n)(h(M, g)k + h^2(M, g))$ *où* k *est une constante positive et où* $c(n)$ *est une constante ne dépendant que de la dimension.*

Intuitivement, pour construire des petites valeurs propres, il suffit de considérer des métriques de type "haltère", ce qui est toujours possible. (Comparer avec l'exemple 2.1 dans le cas des formes différentielles).

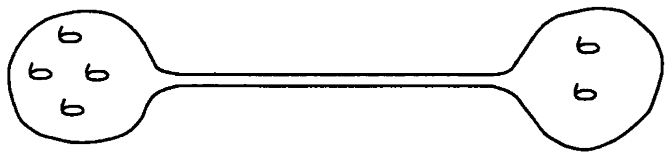


Figure 1 : haltère

Construction de grandes valeurs propres.

La question est ici de savoir si, pour des métriques de volume fixé sur une variété compacte M, la première valeur propre $\lambda_{1,0}$ peut être rendue ou non arbitrairement grande.

THÉORÈME 1.11 ([He70], [YY80]). — *Soit* (S, g) *une surface compacte de genre* γ *et telle que volume* $(S, g) = 1$. *Alors* $\lambda_{1,0}(S, g) \leq 8\pi(\gamma + 1)$.

Remarque. — Le résultat fut d'abord démontré par Hersch ([He70]) pour la sphère S^2 puis généralisé par Yang et Yau [YY80].

En dimension supérieure à 2, il a été montré que le résultat était faux dans des cas particuliers, [Ur79], [Mu80] avant d'avoir une preuve générale de ce fait.

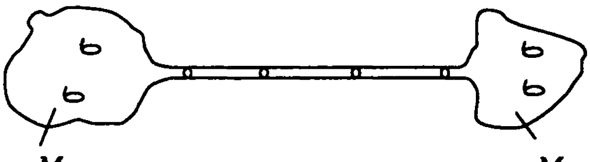
THÉORÈME 1.12 ([CD94]). — *Soient* M *une variété compacte de dimension* $n \geq 3$, *et* N *un nombre positif donné. Alors il existe une métrique* g *sur* M *telle que* $\mathrm{vol}(M, g) = 1$ *et* $\lambda_{1,0}(M, g) = N$.

Remarque. — Ce résultat a été récemment généralisé par Lohkamp ([Lo95]).

2. Le cas des p-formes différentielles

On donne d'abord quelques exemples montrant que l'intuition que l'on s'est faite dans le cadre des fonctions n'est pas valable sans autre dans le cas des formes différentielles.

Exemple 2.1. Métriques de type "haltère". — Voir le détail des constructions dans [AC95]. On relie deux variétés M_1 et M_2 par une anse fine L_ε isométrique à $[0, L] \times S_\varepsilon^{n-1}$, où S_ε^{n-1} est la sphère standard de rayon ε, et on appelle M_ε cette réunion.



Lorsque $1 < p < n-1 (n = \dim M_\varepsilon)$, $H^p(M_\varepsilon) = H^p(M_1) + H^p(M_2)$. Pour $1 < p < n-1$, le p-spectre de M_ε converge vers la réunion du p-spectre de M_1 et du p-spectre de M_2 lorsque $\varepsilon \to 0$ (cf. [AC95], Thm. B). Cela signifie que, contrairement au cas des fonctions, il n'y a pas apparition de petites valeurs propres lorsque $\varepsilon \to 0$. Intuitivement, cela vient du fait qu'il n'y a pas de formes harmoniques de degré p, $1 \leq p \leq n-2$ sur S^{n-1}. Une p-forme propre sur $]0, L[\times S_\varepsilon^{n-1}$ doit avoir une énergie très grande (si $1 < p < n-1$) et tend à s'annuler sur l'anse. On est donc ramené à la réunion des p-spectres de M_1 et M_2.

Exemple 2.2. — Considérons le produit $S_L^1 \times S_\varepsilon^{n-1}$ du cercle de longueur L avec la sphère de rayon ε. À cause de la formule de Künneth ($\Delta(\alpha \wedge \beta) = \Delta\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \Delta\beta$ où $\alpha \in \Lambda^p S_L^1$ et $\beta \in \Lambda^q S_\varepsilon^{n-1}$), on déduit facilement le spectre de $S_L^1 \times S_\varepsilon^{n-1}$ en fonction de celui de S_L^1 et de celui de S_ε^{n-1}. Ainsi, si $n \geq 3$ et si $2 \leq p \leq n-2$, on a :

$$\lambda_{1,p}(S_L^1 \times S_\varepsilon^{n-1}) = \min(\lambda_{1,p}(S_\varepsilon^{n-1}), \lambda_{1,p-1}(S_\varepsilon^{n-1})).$$

$\lambda_{1,p}(S_L^1 \times S_\varepsilon^{n-1})$ tend donc vers infini lorsque $\varepsilon \to 0$. Par ailleurs, $K(S_L^1 \times S_\varepsilon^{n-1}) \geq 0$. On constate que ni le théorème de Cheng (Thm. 1.5) ni celui de Cheeger (Thm. 1.6) ne sont valables dans le cas des formes différentielles.

Question 2.3. — A-t-on pour les formes différentielles un théorème du type "Cheng" pour $0 \leq K \leq 1$ ou $-1 \leq K \leq 1$, où K désigne la courbure sectionnelle?

Exemple 2.4. Les sphères de Berger. — On considère le fibré de Hopf $S^1 \hookrightarrow (S^{2n+1}, g) \xrightarrow{\pi} (\mathbb{C}P^n, h)$ où (S^{2n+1}, g) est la sphère de dimension $2n+1$ munie de sa métrique canonique, et $\mathbb{C}P^n$ l'espace projectif complexe muni de la métrique de Study-Fubini.

$\mathbb{C}P^n$ est le quotient de S^{2n+1} par l'action isométrique de S^1 :

$$\zeta : S^1 \times S^{2n+1} \longrightarrow S^{2n+1}, \quad \zeta(\theta, z_1, \ldots, z_{n+1}) = (e^{i\theta} z_1, \ldots, e^{i\theta} z_{n+1}).$$

Les orbites de l'action sont des grands cercles de la sphère. Notons X le champ de vecteur unité tangent à l'action de S^1. H_q désigne l'espace tangent horizontal de la fibration ($i.e.$ $H_q = (X(q))^{\perp}$).

On construit à partir de la métrique g une famille g_t $0 < t < \infty$ de métriques sur S^{2n+1} obtenue en multipliant la métrique g par t en direction de la fibre (figure 2). Soit $v \in T_q S^{2n+1}$. On pose

$$g_t(q)(v,v) = \begin{cases} g(q)(v,v) & \text{si } v \in H_q \\ t^2 g(q)(v,v) & \text{si } v = \lambda X(q) \end{cases}$$

de plus, si $v \in H_q$, $g_t(q)(v,X) = 0$.

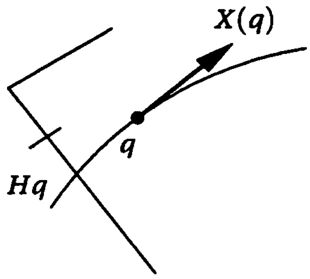


Figure 2

Pour $0 < t \leq 1$, il existe une constante c, indépendante de t, telle que

$$|K(S^{2n+1}, g_t)| \leq c$$

([FU90], [CE75]). De plus, $\mathrm{diam}(S^{2n+1}, g_t) \leq \mathrm{diam}(S^{2n+1}, g)$, $0<r\leq 1$. Ainsi, $(S^{2n+1}, g_t) \in \mathcal{M}(2n+1, c, \pi)$.

On va montrer qu'en contraste avec ce qui se passe pour les fonctions (cor. 1.2), $\lambda_{1,p}(S^{2n+1}, g_t) \to 0$ lorsque $t \to 0$ pour $1 \leq p \leq 2n$.

Intuitivement, lorsque $t \to 0$, la longueur de la fibre du fibré de Hopf tend vers 0. Dans un sens, la sphère (S^{2n+1}, g_t) s'approche de $(\mathbb{C}P^n, h)$ lorsque $t \to 0$ (cela peut être formalisé précisément avec la notion de convergence de Hausdorff-Gromov (GLP80]). On sait qu'en degré pair, $\mathbb{C}P^n$ possède des formes harmoniques. Lorsque l'on relève ces formes à la sphère, elles ne peuvent plus être harmoniques (sauf en degré 0) mais elles le sont presque, au sens où elles correspondent à une petite valeur propre lorsque $t \to 0$.

Soit $\omega = X^{\#}$ la forme de connexion du S^1-fibré. On sait que $d\omega = t\pi^*(\Omega)$ où Ω est la forme de Kähler de $(\mathbb{C}P^n, h)$ et t correspond à la métrique g_t (et à la longueur de la fibre) ([BT86]p. 70).

On sait que $H^{2p}(\mathbb{C}P^n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$, où la cohomologie en degré $2p$ est engendrée par $\Omega \wedge \cdots \wedge \Omega$ (p-fois) $0 \leq p \leq n$.

Considérons $\psi = \Omega \wedge \cdots \wedge \Omega$. $\pi^*(\psi) = \pi^*(\Omega) \wedge \cdots \wedge \pi^*(\Omega)$. On a : $d\pi^*(\Omega) = \pi^*(d\Omega) = 0$ car Ω est harmonique.

$$\begin{aligned} d^*\pi^*(\Omega) &= *d*\pi^*(\Omega) = *d(\omega \wedge \pi^*(*\Omega))t \\ &= t*(\pi^*(\Omega) \wedge \pi^*(*\Omega) - \omega \wedge \pi^*(d*\Omega)) = t*(\pi^*(\Omega \wedge *\Omega)) = t\omega. \end{aligned}$$

Ainsi, $d\psi = 0$ et $d^*\psi = t\omega \wedge \underbrace{\Omega \wedge \cdots \wedge \Omega}_{(p-1)-\text{fois}} \Rightarrow \Delta\psi = t^2\psi$. On peut vérifier la même relation pour $\psi = \omega \wedge \Omega \wedge \cdots \wedge \Omega$. Ainsi, on obtient pour chaque p ; $0 < p < 2n+1$:

$$\lambda_{1,p}(S^{2n+1}, g_t) = t^2.$$

Remarque 2.5. — Cet exemple montre que le théorème 1.1 et le corollaire 1.2 ne sont plus vrais dans le cas des formes différentielles. De même, la constante de Cheeger de (S^{2n+1}, g_t) est minorée par une constante indépendante de t. On constate que la constante de Cheeger ne permet pas de contrôler le spectre des formes différentielles.

Remarque 2.6. — On peut faire la même construction qu'à l'exemple 2.4 pour tout S^1-fibré. En général, cependant, le relevé d'une forme harmonique de la base à l'espace total ne donne pas une forme propre, mais possède un petit quotient de Rayleigh, ce qui implique parfois l'existence d'une petite valeur propre non nulle (voir § 3).

Exemple 2.7. — Comme pour les fonctions, il est souvent possible de construire des métriques à volume 1 et à première valeur propre non nulle arbitrairement grande. Plus précisément on a [GP95] :

Soit M une variété compacte de dimension $n \geq 4$. Pour tout $N > 0$ (N assez grand) il existe une métrique g sur M telle que $\mathrm{vol}(M, g) = 1$ et $\lambda_{1,p}(M, g) \geq N \quad \forall 2 \leq p \leq n-2$.

Remarque. — Le problème reste ouvert dans le cas des 1-formes différentielles.

Dans le reste de ce paragraphe, on va exposer une petite extension du théorème 1.1 au cas des formes différentielles. Comme corollaire, on notera le rôle de la topologie, qui devient important, pour contrôler le bas du spectre des formes différentielles.

Théorème 2.8 [CC90]. — *Soit* $\mathcal{M}(n, a, d, r) = \{(M, g), \dim M = n, |K(M, g)| \leq a, \mathrm{diam}(M, g) \leq d, \mathrm{injrad}(M, g) \geq r\}$ *où* a, d, r *sont des constantes positives, et* injrad *désigne le rayon d'injectivité. Il existe une constante positive* $C(n, a, d, r)$ *telle que,* $\forall (M, g) \in \mathcal{M}(n, a, d, r), 0 \leq p \leq n, \lambda_{1,p}(M, g) \geq C(n, a, d, r)$.

Remarque 2.9. — La constante $C(n, a, d, r)$ n'est hélas pas explicite. Cela est dû à l'utilisation dans la preuve du théorème 2.8 du théorème de finitude de Cheeger et du théorème de précompacité de Gromov.

Remarque 2.10. — $\mathcal{M}(n, a, d, r)$ est beaucoup plus petit que l'ensemble $\mathcal{M}(n, a, d)$ introduit au corollaire 1.2, en ce sens qu'il n'y a qu'un nombre fini de type de difféomorphisme dans $\mathcal{M}(n, a, d, r)$ (c'est justement le théorème de finitude de Cheeger) (figure 3).

Remarque 2.11. — On constate que $\lambda_{1,p}$ est minorée sur $\mathcal{M}(n, a, d, r)$ mais pas sur $\mathcal{M}(n, a, d)$.

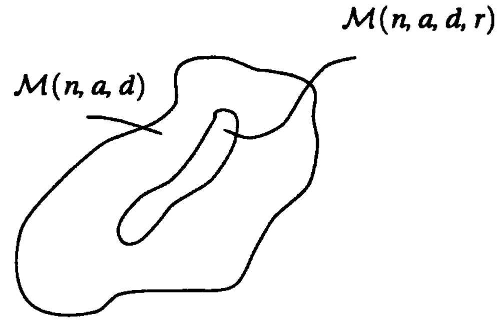


Figure 3

COROLLAIRE 2.12. — *Soit M une variété compacte de dimension n, connexe, orientée. S'il existe une suite de métriques $(M, g_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sur M et un p, $1 \leq p \leq n-1$ telle que*

(i) $(M, g_i) \in \mathcal{M}(n, a, d) \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad$ *(a, d fixés).*

(ii) $\lim_{i \to \infty} \lambda_{1,p}(M, g_i) = 0$. *Alors* $\lim_{i \to \infty} \operatorname{injrad}(M, g_i) = 0$.

Remarque 2.13. — Comme le diamètre est uniformément borné, le fait que le rayon d'injectivité en un point soit petit est équivalent au fait qu'il soit petit partout (cf. [HK78]).

Le corollaire 2.12 peut donc se lire ainsi : si à courbure et diamètre bornés une variété M admet une suite de métriques comme dans l'énoncé de 2.12, alors M admet un effondrement. (On dit précisément que M s'effondre lorsqu'elle admet une famille de métriques comme dans 2.12, telle que $\operatorname{injrad}(M, g_i) \to 0$). Or toute variété M n'admet pas d'effondrement. Le fait de pouvoir s'effondrer a une signification topologique ([Pa83]). Par exemple, si M s'effondre à diamètre borné, son volume minimal est nul, ses nombres caractéristiques sont nuls. L'exemple type de variétés qui s'effondre est un S^1-fibré. Pour une description détaillée, voir ([Fu87], [Fu90], [Fu89]).

Question 2.14. — Estimer la constante $C(n, a, d, r)$ du théorème 2.8.

Remarque 2.15. — Lorsqu'une variété s'effondre, il n'est pas clair de déterminer si le bas du spectre tend vers 0.

L'objet du paragraphe 3 sera précisément d'examiner les questions 2.14, 2.15 dans le cadre des S^1-fibrés, qui sont les exemples les plus simples d'effondrements.

Enfin terminons ce paragraphe par la question classique :

Question 2.16. — Existe-t-il "une constante de Cheeger" permettant de contrôler le spectre des p-formes différentielles?

Notons le rôle particulier de l'inégalité de Cheeger dans le cas des fonctions : il n'y a aucune présupposition sur la géométrie de la variété.

3. Le cas des S^1-fibrés

Dans ce paragraphe on va considérer un S^1-fibré riemannien $S^1 \hookrightarrow (M, g) \xrightarrow{\pi} (N, h)$ dont la longueur de la fibre approche zéro. On cherche à répondre à deux questions concernant le p-spectre de (M, g).

Question 3.1. — Combien de valeurs propres non nulles tendent-elles vers 0?

Question 3.2. — Peut-on estimer ces valeurs propres par rapport à la longueur de la fibre, qui correspond à peu près au rayon d'injectivité r de (M, g)?

On commence par donner trois exemples montrant que les choses sont assez compliquées.

Exemple 3.3. — Rappelons brièvement le cas du fibré de Hopf, déjà traité en 2.4 : $S^1 \hookrightarrow (S^{2n+1}, g) \rightarrow (\mathbb{C}P^n, n)$. On considère la métrique g_t sur S^{2n+1}.

$$\mathrm{injrad}(S^{2n+1}, g_t) = \pi t$$
$$\lambda_{1,p}(S^{2n+1}, g_t) = t^2.$$

On peut montrer que lorsque $t \rightarrow 0$, il y a par chaque p, $1 \leq p \leq 2n$, exactement une valeur propre du p-spectre de (S^{2n+1}, g_t) qui converge vers 0, et qu'elle est de l'ordre de $(\mathrm{injrad}(S^{2n+1}, g_t))^2$.

Exemple 3.4. — On considère une variété riemannienne compacte (N, h) et on pose $(M, g_t) = (N, h) \times S^1_t$ ou S^1_t est le cercle de rayon t.

Dans ce cas, la formule de Künneth montre que :

$$\lambda_{1,p}(M, g_t) = \min(\lambda_{1,p-1}(N, h), \lambda_{1,p}(N, h))$$

lorsque $t \rightarrow 0$. Ainsi, il n'y a pas de petites valeurs propres non nulles lorsque $t \rightarrow 0$.

Exemple 3.5. — On considère l'espace lenticulaire L_k, obtenu en quotientant la sphère S^{2n+1} par le groupe discret Z_k des racines $k^{\text{ième}}$ de l'unité (vu comme sous-groupe du groupe S^1 qui agit par isométries sur S^{2n+1}). On considère sur L_k la métrique induite par celle de S^{2n+1}.

Lorsque l'on considère la sphère standard, L_k a une métrique à courbure 1. Son rayon d'injectivité est $\frac{\pi}{k}$. L_k est également un S^1-fibré sur $(\mathbb{C}P^n, h)$. Lorsque k tend vers l'infini, on est dans une situation qui ressemble donc un peu à l'exemple 3.3 des sphères de Berger : S^1-fibré sur $\mathbb{C}P^n$, courbure bornée, rayon d'injectivité tendant vers 0. La seule différence est que la topologie de L_k change avec k.

Si ψ est une forme propre sur L_k, on peut toujours la relever à la sphère S^{2n+1}. Comme les variétés sont localement isométriques, le relevé $\tilde{\psi}$ de ψ est propre, pour la même valeur propre que ψ. On en déduit :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \lambda_{1,p}(L_k) \geq \lambda_{1,p}(S^{2n+1}, g).$$

Ainsi, bien que $\mathrm{injrad}(L_k) \to 0$ lorsque $k \to \infty$, L_k n'admet aucune petite valeur propre.

Au lieu de considérer sur L_k la métrique induite par la métrique standard de L_k, on peut considérer la métrique induite par g_t, construite en 3.3 et 2.4. Alors $|K(L_k, g_t)| \leq C$ lorsque $t \to 0$ (C constante indépendante de t)

$$\mathrm{inj}(L_k, g_t) \cong \frac{\pi t}{k}.$$

On peut montrer que $\lambda_{1,p}(L_k, g_t) \cong t^2$ lorsque $t \to 0$. Ainsi, on constate que "petit rayon d'injectivité" ne suffit pas à décider de la présence ou non de petites valeurs propres. Quant au rapport entre $\lambda_{1,p}$ et le rayon d'injectivité, l'exemple 3.5 montre qu'il dépend beaucoup de la topologie.

Dans [CC96], nous nous sommes attachés à comprendre le cas des S^1-fibrés. En fait, on fixe une variété compacte (N^n, h) et on cherche à décrire le spectre d'une variété riemannienne (M^{n+1}, g), ε-proche de (N, h) au sens de Hausdorff, lorsque ε est petit. À cause d'un théorème de Fukaya [FU87], cela revient à considérer un S^1-fibré. On peut même se ramener à une situation géométrique plus simple, mais, comme cela est assez technique et n'apporte pas grand chose sur le plan conceptuel, on se bornera ici à décrire le cas géométriquement simple.

Soit (N, h) une variété riemannienne de dimension n, connexe, compacte, orientée et $(M, g) \in \mathcal{M}(n+1, a, d)$ (où a et d sont des constantes positives fixées) tel que $(M, g) \xrightarrow{\pi} (N, h)$ soit un S^1-fibré riemannien de fibre géodésique de longueur ε vérifiant en outre :

(i) S^1 agit par isométries sur (M, g).

(ii) Soit ω la 1-forme horizontale du fibre, normée de sorte que $|\omega(q)| = 1 \quad \forall q \in (M, g)$. Soit $[e]$ la classe d'Euler du fibré $[e] \in H^2(N, \mathbb{R})$. Soit e l'unique représentant harmonique de $[e]$. Alors $d\omega = \varepsilon\pi^*(e)$.

Remarque. — Cette dernière hypothèse, en apparence assez lourde, permet d'énoncer les résultats plus simplement.

Soit $\Lambda p = b_p(N) + b_{p-1}(N) - b_p(M)$ (b_p $p^{\text{ième}}$ nombre de Betti).

THÉORÈME 3.6 [CC96]. — *Il existe des constantes positives $C(n,a,d)$, $C_1(n,a,d)$, $C_2(N,h)$, $C_3(N,h)$ telle que si $(\varepsilon\|e\|)^2 \leq C_2(N,h)$ ($\|\cdot\|$ norme sur (N,h)) alors $\forall 1 \leq k \leq \Lambda_p$ on a :*

(i) $\lambda_{k,p}(M,g) \leq C(n,a,d)C_3(N,h)(\varepsilon\|e\|)^2$.

(ii) $\lambda_{\Lambda_p+1,p}(M,g) \geq \min(C_1(n,a,d), C_2(N,h))$.

(iii) Lorsque $p=1$, si $\Lambda_1 \neq 0$, alors $\Lambda_1 = 1$ et $\lambda_{1,1}(M,g)$ est équivalent à $(\varepsilon\|e\|)^2$ en ce sens qu'il existe $\overline{C}(n,a,d)$, $\overline{C}_3(N,a,d)$ constantes positives telles que :

$$\overline{C}_3(N,h)\overline{C}(n,a,d) \leq \frac{\lambda_{1,1}(M,g)}{(\varepsilon\|e\|)^2} \leq C_3(N,h)C(n,a,d).$$

(iv) Si $\dim H^2(N,h) = 1$, alors on a toujours équivalence entre $\lambda_{k,p}(M,g)$ et $(\varepsilon\|e\|)^2$ pour $1 \leq k \leq \Lambda p$: il existe $\overline{C}_3(N,h)$, $\overline{C}(n,a,d)$ constantes positives telles que :

$$\overline{C}_3(N,h)\overline{C}(n,a,d) \leq \frac{\lambda_{k,p}(M,g)}{(\varepsilon\|e\|)^2} \leq C(N,h)C(n,a,d)$$

$\forall 1 \leq k \leq \Lambda p$.

Remarque 3.7. — On constate que lorsque $\varepsilon \to 0$, le nombre de valeurs propres tendant vers 0 est donné par la topologie du fibré, en fait par son défaut à être trivial. Ce résultat était déjà connu dans un cadre plus général (cf. par exemple [Fo95]).

Remarque 3.8. — On voit qu'il faut tenir compte de la norme de la classe d'Euler du fibré pour estimer $\lambda_{1,p}$. La partie *(iv)* du théorème 3.6 permet de bien comprendre ce qui se passe à l'exemple 3.5 : $\dim H^2(\mathbb{C}P^n, \mathbb{R}) = 1$. La classe d'Euler de L_k est $k \cdot e$, où e est la classe d'Euler du fibré de Hopf. Sa norme au carré est de l'ordre de k^2. Il faut donc une fibre de longueur petite par rapport à $1/k$ pour obtenir une petite valeur propre.

Remarque 3.9. — Si M est fixée et que la longueur de la fibre tend vers 0, $\lambda_{k,p}(M,g)$ est proportionnelle à la longueur de la fibre au carré, mais on contrôle mal le facteur de proportionnalité pour $1 \leq k \leq \Lambda p$.

Remarque 3.10. — En général, $\lambda_{k,p}(M,g)$ $(1 \leq k \leq p)$ n'est pas équivalent à $(\varepsilon\|e\|)^2$. Un contre-exemple est donné dans [CC96].

Remarque 3.11. — Les constantes du type $C(N,h)$ peuvent être obtenues explicitement, alors que celles du type $C(n,a,d)$ ne sont pas données explicitement par la preuve du théorème. En fait, le théorème 3.6 permet d'expliciter le rôle du rayon d'injectivité r dans la constante $C(n, a, d, r)$ du théorème 2.8.

La preuve du théorème 3.6 est donnée dans [CC96].

Références

[AC95] Anné C., Colbois B. — *Spectre du laplacien agissant sur les p-formes différentielles et écrasement d'anses*, Math. Ann. 303 (1995), 545–573.

[BBG85] Bérard P., Besson G., Gallot S. — *Sur une inégalité isopérimétrique qui généralise celle de Paul Lévy-Gromov*, Invent. Math. 80 (1985), 295–308.

[BGM71] Berger M., Gauduchon P., Mazet E. — *Le spectre d'une variété riemannienne*, Springer-Verlag, 1971.

[Br86] Brooks R. — *The spectral geometry of a tower of covering*, J. Differential Geom. 23 (1986), 97–107.

[BT86] Bott R., Tu L. — *Differential forms in algebraic topology*, Springer-Verlag, 1986.

[Bu82] Buser P. — *A note on the isoperimetric constant*, Ann. Sci. École Norm. Sup.Paris 15 (1982), 213–230.

[CC96] Colbois B., Courtois G. — *En préparation*,1996.

[CC90] Colbois B., Courtois G. — *A note on the first non-zero eigenvalue of the Laplacien acting on p-forms*, Manuscripts Math. (1990), 143–160.

[CD94] Colbois B., Dodziuk J. — *Riemannian metrics with large λ_1*, Proc. Amer. Math. Soc. 122 n^o 3 (1994), 905–906.

[Cg75] Cheng S.Y. — *Eigenvalues comparison theorems and its geometric application*, Math. Z. 143 (1975), 289–297.

[Cr68] Cheeger J. — *The relation between the Laplacian and the diameter for manifolds of non-negative curvature*, Archiv. der Math. XIX (1968), 558–560.

[Cr70] Cheeger J. — *A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian*, "Problem in Analysis" Princeton Univ. Press (1970), 195–199.

[CE75] Cheeger J., Ebin D. — *Comparison theorem in Riemannian geometry*, "North-Holland" Publ. Amsterdam, 1975.

[CZ95] Cheng X., Zhou D. — *First eigenvalue estimate on Riemannian manifolds*, Hokkaïdo Mathematical Journal 24 (1995), 453–472.

[Fo95] Forman R. — *Spectral sequences and adiabatic limits*, Commun Math. Phys. 168 (1995), 57–116.

[Fu90] Fukaya K. — *Hausdorff convergence of Riemannian manifolds and its applications, recent topics in differential and analytic geometry*, (T. Ochiai ed.) Adv. Stud. Pure Math., Kinohuniya, Tokyo 18 (1990), .

[Fu87] Fukaya K. — *Collapsing Riemannian manifolds to one of lower dimension*, J. Differential Geom. 25 (1987), 517–547.

[Fu89] Fukaya K. — *Collapsing Riemannian manifolds to one of lower dimension II*, J. Math. Soc. Japan 41 (1989), 333–356.

[Gr80] Gromov M. — *Paul Lévy's isoperimetric inequality*, Prépublication IHES, 1980.

[GLP80] Gromov M., Lafontaine J., Pansu P. — *Structure métrique pour les variétés riemanniennes*, Cedic-Fernand Nathan, 1980.

[GP95] Gentile G., Pagliara V. — *Riemannian metrics with large first eigenvalue on forms of degree p*, Proc. Amer. Math. Soc. 123 (1995), 3855–3856.

[He70] Hersch J. — *Quatre propriétés isopérimétriques des membranes sphériques*, C. R. Acad. Sci. Paris (1970), 1645–1648.

[HK78] HEINTZE E., KARCHER H. — *A general comparison theorem with applications to volume estimates for submanifolds*, Ann. Sci. École Norm. Sup.Paris 11 (1978), 451–470.

[Li58] LICHNEROWICZ A. — *Géométrie des groupes de transformations*, Dunod, 1958.

[Lo95] LOHKAMP J. — *Discontinuity of geometric expansions*, Preprint, 1995.

[Mu80] MUTO H. — *The first eigenvalue of the Laplacian on even dimensional spheres*, Tohoku Math. Journal **32** (1980), 427–432.

[Pa83] PANSU P. — *Effondrement des variétés riemanniennes*, Sem. Bourbaki, **618**, 1983–84.

[Ur79] URAKAWA H. — *On the least eigenvalue of the Laplacian for compact group manifolds*, J. Math. Soc. Japan **31** (1979), 209–226.

[Wa83] WARNER F. — *Foundation of differentiable manifolds and Lie groups*, Springer-Verlag, 1983.

[YY80] YANG P., YAU S.T. — *Eigenvalues of the Laplacian of compact Riemann surfaces and minimal submanifolds*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **7** (1980), 55–63.

Bruno COLBOIS
Université de Savoie
Laboratoire de Mathématiques
Campus Scientifique
73376 LE BOURGET DU LAC Cedex (France)
colbois@univ-savoie.fr