

# SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

YVES COLIN DE VERDIÈRE

## Résonances

*Séminaire de Théorie spectrale et géométrie*, tome 3 (1984-1985), exp. n° 3, p. 1-15

[http://www.numdam.org/item?id=TSG\\_1984-1985\\_\\_3\\_\\_A3\\_0](http://www.numdam.org/item?id=TSG_1984-1985__3__A3_0)

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Chambéry-Grenoble), 1984-1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

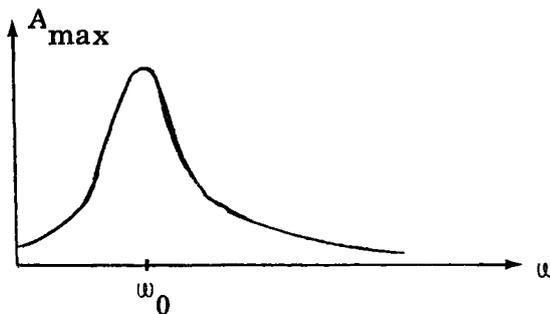
1984-1985

## RESONANCES

par Yves COLIN DE VERDIERE

L'équation des petites oscillations du pendule simple :

$\theta'' + \frac{g}{\ell}\theta = 0$  , exprime la conservation de l'énergie totale (potentielle + cinétique) : elle résulte d'une approximation consistant à considérer le pendule simple comme un système isolé. En réalité, il faut tenir compte d'une interaction avec les molécules d'air (frottement) qui donne une équation du type  $\theta'' + \epsilon\theta' + \frac{g}{\ell}\theta = 0$  ( $\epsilon > 0$ ) ; en présence d'une action extérieure (second membre de l'équation  $Y(t)\sin\omega t$  ), on peut tracer la courbe du maximum des oscillations forcées résultantes :



Cette courbe a un maximum en  $\omega_0$  d'autant plus aigu que  $\epsilon$  est petit. Ce maximum résulte de la présence dans la résolution par transformation de Fourier d'un pôle  $\Omega$  dans le plan complexe donné par :

$$\Omega = \sqrt{\frac{g}{\ell} - \frac{\epsilon^2}{4}} + i\frac{\epsilon}{2} .$$

Notre but est d'étudier le problème analogue pour un système linéaire avec une infinité de degrés de libertés : il apparaît alors un spectre continu.

### III. 2

Nous allons décrire un modèle abstrait suffisamment général pour pouvoir s'appliquer à des situations très diverses :

- approximation du spectre du laplacien d'une surface compacte collée avec une anse fine et longue (à un bout ou aux deux bouts) ;
- théorie spectrale des surfaces de Riemann à courbure  $-1$  et d'aire finie ;
- théorie spectrale de  $-\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$  sur  $\mathbb{R}$  avec  $\text{Supp}(V) \subset ]-\infty, 0]$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} V(x) = +\infty$  ;
- convergence du spectre de surface de Riemann à courbure  $-1$  dont le diamètre tend vers  $l' \infty$  (le genre étant fixé).

#### I. DESCRIPTION DU MODELE

$X$  est une variété riemannienne compacte de laplacien  $\Delta$ . On note  $\mathfrak{H}^s$  les espaces de Sobolev de  $X$  ;  $T$  désigne une forme linéaire continue sur  $\mathfrak{H}^1$ . On construit alors un opérateur autoadjoint  $\Delta_T$  sur l'espace de Hilbert  $H = \mathfrak{H}^0 \oplus L^2([0, +\infty[ , dx)$  ;  $\Delta_T$  est l'extension de Friedrich's de la forme quadratique  $q_T$  dont le domaine est :

$$D(q_T) = \{(f, g) \in \mathfrak{H}^1 \oplus H^1(\mathbb{R}^+) \mid g(0) = T(f)\} ,$$

définie par

$$q_T(f, g) = \int_X |df|^2 + \int_0^{+\infty} |g'|^2 dx .$$

On voit que  $T$  représente un couplage entre la variété compacte  $X$  (analogue du pendule simple isolé) et la demi-droite  $\mathbb{R}^+$  (analogue du milieu ambiant), modèle le plus simple à spectre continu.

Un exemple très simple est de prendre pour  $Y$  une sous-variété compacte de codimension 1 de  $X$  et de définir  $T$  par

$$T(f) = c \int_Y f .$$

Dans le cas des surfaces de Riemann d'aire finie à courbure constante  $-1$ , on prend pour  $Y$  un horocycle et on est dans une théorie très voisine de celle exposée ici ([CV 1]).

Il nous faut maintenant déterminer de façon précise l'opérateur  $\Delta_T$ .

On a le :

**THEOREME.** - Le domaine de  $\Delta_T$  est formé de l'ensemble des  $(f, g)$  de  $D(q_T)$  tels que  $g \in H^2(\mathbb{R}_+)$ ,  $\Delta f - g'(0)T \in \mathfrak{H}^0$  où  $\Delta$  est le laplacien au sens des distributions sur  $X$ . Si  $(f, g)$  est dans le domaine de  $\Delta_T$ , on a :

$$\Delta_T(f, g) = (\Delta f - g'(0)T, -g'') .$$

**Preuve.** - Le domaine de définition de  $\Delta_T$  est l'ensemble des  $(f, g) \in D(q_T)$  tels qu'il existe une constante  $C$  telle que, pour tout  $(\varphi, \psi) \in D(q_T)$ , on ait :

$$\left| \int_X (df | d\varphi) + \int_0^{+\infty} g' \psi' \right| \leq C \left( \|\varphi\|_{\mathfrak{H}^0} + \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \right) .$$

Nous restreignant à  $\varphi \in C^\infty(X)$  et  $\psi \in C_0^\infty([0, +\infty[)$ , on obtient :

$$\left| \langle \Delta f | \varphi \rangle - g'(0)\psi(0) - \int_0^\infty g'' \psi \right| \leq C \left( \|\varphi\|_{\mathfrak{H}^0} + \|\psi\|_{L^2} \right)$$

et utilisant  $\psi(0) = T(\varphi)$ , on a :

$$\left| \langle \Delta f - g'(0)T | \varphi \rangle - \int_0^\infty g'' \psi \right| \leq C \left( \|\varphi\|_{L^2} + \|\psi\|_{L^2} \right) .$$

On en déduit facilement le résultat.

En particulier, les valeurs propres  $k^2$  de  $\Delta_T$  sont de deux types :

$$(*) \begin{cases} (\Delta - k^2)f = ikT \\ T(f) = 1 \quad (\text{Im } k > 0) \end{cases} \qquad (**) \begin{cases} (\Delta - k^2)f = 0 \\ T(f) = 0 \end{cases}$$

### III.4

Evidemment, comme  $\Delta_T \geq 0$ , il ne peut pas y avoir de valeurs propres du type (\*), mais cela peut se produire pour  $\Delta_T + V$  ( $V \leq 0$ ) et aussi dans le cas des surfaces de Riemann d'aire finie où le spectre continu ne commence qu'à  $\frac{1}{4}$  au lieu de 0.

Les fonctions propres du type (\*\*) s'appellent les cusp-formes dans le langage des fonctions automorphes : elles correspondent à des valeurs propres  $< 0$  (ou  $< \frac{1}{4}$ ) ou bien immergées dans le spectre continu.

## II. SERIES D'EISENSTEIN

Nous devons construire les fonctions propres généralisées servant à engendrer le spectre continu.

Pour  $\text{Im } k > 0$ , il existe une unique fonction  $E(k)$  sur  $X \cup \mathbb{R}^+$  dont nous désignerons par  $E_0(k, x)$  la restriction à  $\mathbb{R}^+$  et  $E_1(k, x)$  la restriction à  $X$ , telle que, si  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$  vérifie  $\varphi \equiv 0$  au voisinage de 0 et  $\varphi \equiv 1$  au voisinage de  $l^\infty$ , on a :

$$\begin{cases} \text{a) } E(k) - \varphi(x)e^{-ikx} \in D(\Delta_T) \\ \text{b) } "(\Delta_T - k^2)E(k) = 0" \text{ , c'est-à-dire :} \\ \quad (\Delta_T - k^2)(E(k) - \varphi e^{-ikx}) = \Phi(x, k) \end{cases}$$

avec  $\Phi(x, k) = \left( \frac{d^2}{dx^2} + k^2 \right) (\varphi e^{-ikx})$  ;

on note que  $\Phi(x, k) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$  et dépend holomorphiquement de  $k$  dans  $\mathbb{C}$ .

a) Construction de  $E(k)$  : on a nécessairement :

$$E(k) = \varphi(x)e^{-ikx} + (\Delta_T - k^2)^{-1}(\Phi(x, k)) ,$$

ce qui est bien défini puisque  $(\text{Im } k > 0) \Rightarrow (k^2 \notin \text{Spectre}(\Delta_T))$ .

On désigne usuellement par "feuillet physique" la région  $\text{Im } k > 0$ , qui correspond à l'une des deux nappes de la surface de Riemann  $k \mapsto \lambda = k^2$  étalée au-dessus de  $\mathbb{C}$ . La région  $\text{Im } k < 0$  s'appelle "feuillet non physique".

Coefficient de réflexion : on a évidemment

$$E_0(x, k) = e^{-ikx} + r(k)e^{ikx}, \quad r(k) \text{ s'appelle le coefficient de réflexion.}$$

Nous allons déjà établir une propriété importante :

PROPOSITION. - Dans  $\text{Im } k > 0$ , le coefficient de réflexion

$r(k)$  vérifie pour tout  $\epsilon > 0$  une majoration

$$r(k) = o(|k|^{-1} e^{\epsilon \text{Im } k}). \text{ En particulier,}$$

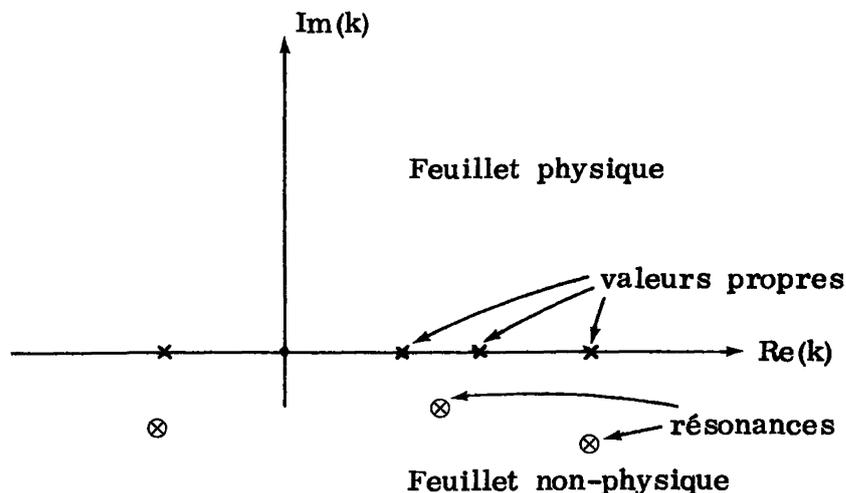
$$r(k)e^{iak} = o(|k|^{-1}) \text{ pour tout } a > 0.$$

Preuve. - Choisissons  $\varphi$  telle que  $\text{Support}(\varphi') \subset ]0, \frac{\epsilon}{2}[$  et écrivons  $E = \varphi e^{-ikx} + (\Delta_T - k^2)^{-1}(\varphi)$ , on a alors :

$$\|\varphi\|_{L^2} = o(|k| e^{\epsilon \text{Im } k}),$$

on utilise alors la relation  $E_1(k, 0) = 1 + r(k)$ , ce qui permet de conclure facilement.

b) Prolongement méromorphe : la fonction  $E(k)$  admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe. Les pôles de  $E(k)$ , tous situés dans le "feuillet non-physique"  $\text{Im } k < 0$ , s'appellent des résonances.



Preuve du prolongement méromorphe ([CV 1]).

On introduit un opérateur auxiliaire  $\Delta_{T,a}$  ( $a > 0$ ), sur  $L^2(X) \oplus L^2([0,a], dx)$  en mettant en  $a$  des conditions aux limites de Dirichlet. On choisit  $\varphi$  comme plus haut avec  $\text{Support}(\varphi') \subset ]0,a[$  et on pose :

$$F(k) = \varphi e^{-ikx} + (\Delta_{T,a} - k^2)^{-1}(\varphi(x,k)) ;$$

comme  $\Delta_{T,a}$  est à résolvante compacte, sa résolvante est méromorphe en  $k$  et on a donc ainsi une fonction  $F(k)$  méromorphe sur  $\mathbb{C}$ . Sur  $[0,a]$ , on a :

$$F(k, x) = A(k)e^{ikx} + B(k)e^{-ikx}$$

avec  $A(k)e^{ika} + B(k)e^{-ika} = e^{-ika}$ . On en déduit facilement que, sur  $X \cup [0,a]$ ,  $F(k, x)$  coïncide, pour  $\text{Im } k > 0$  avec  $B(k)E(k)$ , alors que pour  $\text{Im } k < 0$ , on a  $F(k) = A(k)E(-k)$ ;  $B$  n'étant pas identiquement nul, sinon  $F(k, x) = e^{-2ika}e^{ikx}$  et  $\Delta_T$  aurait  $k^2$  comme valeur propre pour tout  $\text{Im } k > 0$ . On a donc :

$$E(k) = \frac{F(k)}{B(k)} \quad \text{qui est méromorphe sur } \mathbb{C}.$$

Puis l'équation fonctionnelle :

$$E(-k) = \frac{B(k)}{A(k)} E(k) = \frac{1}{r(k)} E(k).$$

On en déduit en particulier :  $r(k)r(-k) \equiv 1$ , et comme il est facile de voir que  $r(-\bar{k}) = \overline{r(k)}$ , on en déduit que, si  $k \in \mathbb{R}$ ,  $|r(k)| = 1$  :  $r(k)$  n'a pas de pôles sur la droite réelle.

On pose, pour  $k \in \mathbb{R}$ ,  $r(k) = e^{i\alpha(k)}$  avec  $\alpha(0) = 0$  ou  $\pi$  selon que  $r(0) = 1$  ou  $-1$ . Utilisant la propriété  $r(k)e^{iak} = o\left(\frac{1}{|\text{Im } k|}\right)$ , on en déduit facilement que  $\alpha(k) + ak$  est une fonction croissante pour tout  $a > 0$  et donc  $\alpha' \geq 0$  partout sur  $\mathbb{R}$ .

En effet, la fonction holomorphe  $r(k)e^{iak}$  est de module 1 sur  $\mathbb{R}$ , bornée sur les cônes  $\text{Im } k \geq C|k|$  et à croissance modérée

près de l'axe réel ; donc, partout d'après le principe du maximum, on a :

$$(r(k)e^{iak}) \leq 1 \quad \text{dans} \quad \text{Im} k \geq 0 .$$

On en déduit par les relations de Cauchy la monotonie de  $\alpha(k) + ak$  .

c) Equation vérifiée pour les résonances.

PROPOSITION. - Soit  $a_n$  les coefficients de Fourier de  $T$  relativement au laplacien de  $X$  :  $a_n = T(\varphi_n)$  . Les résonances sont les solutions de :

$$(R) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_n)^2}{\lambda_n - k^2} = \frac{1}{ik} .$$

En effet, soit  $E_k \sim \frac{R_{k_j}}{(k-k_j)^n}$  près d'une résonance  $k_j$  .

Il est clair que " $(\Delta_T - k_j^2)R_{k_j} = 0$ " et  $R_{k_j} \sim Ce^{ik_j x}$  ( $C \neq 0$ ) sur  $\mathbb{R}^+$  .  
On a donc, en posant  $k = k_j$  et  $f = R_{k_j} \upharpoonright X$  et en divisant par  $C$

$$\begin{cases} (\Delta - k^2)f = ikT \\ T(f) = 1 \end{cases}$$

c'est-à-dire  $T((\Delta - k^2)^{-1}(T)) = \frac{1}{ik}$  , ce qui donne tout de suite l'équation cherchée.

La réciproque est évidente, par différence avec la partie principale, on montrerait que la résonance est aussi une valeur propre.

d) Une autre caractérisation des résonances.

La résolvante  $R(k) = (\Delta_T - k^2)^{-1}$  définie pour  $\text{Im} k > 0$  peut s'écrire comme une matrice  $(R_{ij}(k))_{1 \leq i < j \leq 2}$  , où les  $R_{ij}(k)$  admettent des noyaux  $[R_{ij}(k)]$  avec :

$$[R_{11}(k)] \in \mathcal{D}'(X \times X) ,$$

$$[R_{22}(k)] \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+) ,$$

### III. 8

$[R_{12}(k)]$  et  $[R_{21}(k)] \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^+ \times X)$ .

Ces noyaux admettent des prolongements méromorphes à  $\mathbb{C}$  dont les pôles sont les valeurs propres et les résonances.

On peut écrire  $[R_{11}(k)]$  à l'aide des séries d'Eisenstein :

$$[R_{11}(k)](x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2ik} E(y, k) e^{ikx} & \text{si } x > y \\ \frac{1}{2ik} E(x, k) e^{iky} & \text{si } y > x . \end{cases}$$

Cela résulte de la symétrie  $[R_{11}(k)](x, y) = [R_{11}(k)](y, x)$  et du fait que  $\left(-\frac{d^2}{dx^2} - k^2\right)[R_{11}(k)](x, y) = \delta(x-y)$ , ce qui oblige une singularité équivalente à  $\frac{1}{2}|x-y|$  au voisinage de  $x = y$ .

Remarque. - On a équivalence entre les 4 propriétés suivantes :

- a)  $r(0) = 1$ ,
- b) la résolvante admet un pôle en  $k = 0$ ,
- c)  $T(1) \neq 0$ ,
- d)  $E(x, 0) \upharpoonright_{\mathbb{R}^+} \equiv 2$ .

Preuve laissée en exercice.

### III. ASYMPTOTIQUE DES SPECTRES DISCRETS

Il est intéressant d'utiliser les résultats précédents dans l'étude de certains spectres discrets.

Etudions, par exemple, le comportement asymptotique quand  $a \rightarrow +\infty$  du spectre de  $\Delta_{T, a}$  noté ici  $\Delta_a$  ( $T$  est fixé dans ce §).

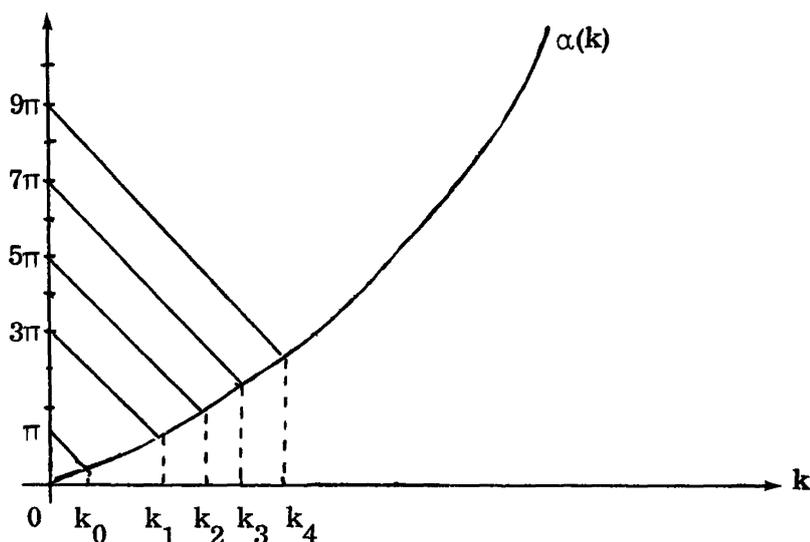
Ce spectre est constitué :

- (i) des valeurs propres de  $\Delta$  (laplacien de  $X$ ) associées à des fonctions propres  $\varphi$  telles que  $T(\varphi) = 0$ ,
- (ii) des valeurs  $k^2$  telles que  $e^{-ika} + r(k)e^{ika} = 0$ , c'est-à-dire en reprenant la notation  $r(k) = e^{i\alpha(k)}$ ,  
 $\alpha(k) + 2ak = \pi \pmod{2\pi}$ .

Soit  $\alpha(k) = \pi - 2ka + 2m\pi$ ; notons

$$k_0(a) < k_1(a) < \dots < k_m(a) < \dots,$$

les solutions de cette équation, obtenue graphiquement, dans le cas  $r(0) = 1$ , comme ci-dessous :



Désignons par  $N_{a,c}(\lambda)$  la fonction de comptage définie par  $N_{a,c}(\lambda) = \#\{k_i(a) \leq \lambda\}$ , on a alors  $N_{a,c}(\lambda) = \frac{\lambda a}{\pi} + \frac{\alpha(\lambda)}{2\pi} + \frac{1}{2} + \epsilon_\lambda$  avec  $0 \leq \epsilon_\lambda < 1$ . La fonction de comptage du spectre de  $\Delta_a$  est donc :

$$N_a(\lambda) = N_{a,c}(\lambda) + \text{Card}\{\lambda_n \leq \lambda^2 \mid \text{valeur propre de } \Delta \text{ telle que } T(\varphi_n) = 0\}.$$

Nous introduisons la densité régularisée  $N_a(\lambda) - \frac{\lambda a}{\pi} = \tilde{N}_a(\lambda)$ ,

$$\tilde{N}_a(\lambda) = \frac{\alpha(\lambda)}{2\pi} + \text{Card}\{\lambda_n \leq \lambda^2 \mid T(\varphi_n) = 0\} + \epsilon_\lambda,$$

le premier terme représente la contribution du spectre continu de  $\Delta_T$ , le second terme celle du spectre discret de  $\Delta_T$ .

Formule de trace

Une autre manière de régulariser la densité des valeurs propres  $k_i$  du spectre mobile de  $\Delta_{a,T}$  est de considérer des sommes du type  $\sum_{i=0}^{\infty} \rho(k_i)$ .

On se donne une fonction  $\rho$  paire telle que  $\hat{\rho} \in C_0^\infty(-R, +R[)$  où  $\hat{\rho}$  est la transformée de Fourier de  $\rho$ . On a alors pour tout  $a > R/2$ , la formule de trace suivante [cas  $\alpha(0)=0$ ,  $r(0)=1$ ] :

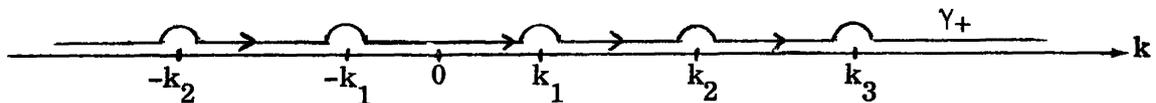
$$(T) \quad \sum_{k_i > 0} \rho(k_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \rho(t)(\alpha'(t)+2a)dt .$$

Cette formule est analogue à celle issue de Krein (cf. [G]), sauf qu'elle est valable pour  $\Delta_a$  pour  $a$  assez grand ("assez" dépendant du support de  $\rho$ ). Elle peut en fait se montrer directement pour un argument de vitesse finie de propagation pour l'équation des ondes.

Preuve de (T) . - Les  $k_i$  sont (répétés deux fois) les solutions de  $F(k) = 0$  où  $F(k) = 1 + e^{-i(\alpha(k)+2ak)}$  ; on peut donc pour la formule de Cauchy, écrire :

$$2 \sum_{i=0}^{\infty} \rho(k_i) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \rho(k) \frac{F'(k)}{F(k)} dk$$

où  $\gamma$  est un chemin du type suivant :  $\gamma = \gamma_+ - \gamma_-$ ,  $\gamma_- = \overline{\gamma_+}$ .



Ou encore :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \rho(k_i) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int_{\gamma_+} \frac{\alpha'(k)+2a}{1+e^{i(\alpha(k)+2ak)}} \rho(k) dk ,$$

on peut encore écrire cela :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \rho(k_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (\alpha'(t)+2a)\rho(t)dt - \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int_{\gamma_+} \frac{G'(k)}{G(k)} \rho(k) dk ,$$

avec  $G(k) = 1 + e^{i(\alpha(k)+2ak)}$ , il s'agit de prouver que l'intégrale sur

$\gamma_+$  est nulle ; soit  $N$  et  $A \in ]k_N, k_{N+1}[$  tel que  $G(A) = 2$  (valeurs intermédiaires), soit  $\Gamma_N^+$  le  $\frac{1}{2}$  arc de cercle du feuillet physique de diamètre  $[-A, A]$  , on a :

$$\int_{\gamma_+} = \int_{\Gamma_N^+} + \int_{\gamma_N^+} \quad \text{où } \gamma_N^+ = \gamma^+ \cap \{|k| \geq A\} ;$$

lorsque  $N \rightarrow \infty$  ,  $\int_{\gamma_N^+} \rightarrow 0$  , pour contrôler l'autre intégrale on introduit la détermination de  $\text{Log}(G(k))$  dans  $\text{Im } k > 0$  d'argument dans  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  et on intègre par parties :

$$\int_{\Gamma_N^+} \frac{G'}{G} \rho dk = [\text{Log}(G)\rho]_{-A}^A - \int_{\Gamma_N^+} \text{Log}(G) \cdot \rho' ,$$

le premier morceau tend vers 0 lorsque  $N \rightarrow \infty$  , car

$\text{Log } G(A) = \text{Log } G(-A) = \text{Log } 2$  . Quand au second, on utilise la majoration valable pour  $|u| < 1$  ,

$$|\text{Log}(1+u)| \leq C|u| |\text{Log}(1-|u|)| ,$$

ici  $u = e^{i(\alpha(k)+2ak)}$  et donc  $|u| \leq e^{-(2a-\epsilon)\text{Im } k}$  . On a ainsi :

$$|\text{Log } G| \leq C e^{-(2a-\epsilon)\text{Im } k} |\text{Log}(\text{Im } k)| ,$$

et la majoration  $|\rho(k)| \leq C e^{R\text{Im } k} / |k|^N$  fait le reste.

On peut écrire la formule de trace sous la forme plus frappante lorsque  $\int \rho = 1$  :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \rho(k_i) - \frac{a}{\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \rho(t) \alpha'(t) dt .$$

La densité régularisée des valeurs propres est donc bien égale à  $\alpha'(t)$  , on y sent bien l'influence des résonances proches du réel :

$$\text{si } r(k) \sim C \frac{k - \omega_0 - i\epsilon}{k - \omega_0 + i\epsilon} \quad (\epsilon > 0) , \text{ on a :}$$

$$\alpha'(k) \sim \frac{2\epsilon}{(k - \omega_0)^2 + \epsilon^2} ,$$

qui présente, pour  $\epsilon > 0$  , la forme caractéristique évoquée dans l'introduction des courbes de résonance.

IV. PERTURBATIONS

Soit  $\lambda_0$  une valeur propre immergée dans le spectre continu,  $\lambda_0 > 0$  et associée à une fonction propre  $\varphi_0$  (telle que  $T(\varphi_0) = 0$ ). Supposons en outre  $\lambda_0$  de multiplicité 1.

$$\text{Soit} \\ F(k) = \sum_{\lambda_n \neq \lambda_0} \frac{|a_n|^2}{\lambda_n - k^2} \quad \text{avec} \quad a_n = T(\varphi_n),$$

on peut écrire l'équation (R) aux résonances sous la forme

$$(k^2 - \lambda_0) \left( F(k) - \frac{1}{ik} \right) = |a_0|^2 \quad \text{avec} \quad a_0 = T(\varphi_{n_0});$$

cette équation est aussi vérifiée par  $k = \sqrt{\lambda_0} = k_0$  car  $a_0 = 0$ . On peut donc essayer de lui appliquer les fonctions implicites, pour cela il faut se placer dans un cadre de perturbation où  $\lambda_0$ ,  $F$  et  $a_0$  dépendent différentiablement d'un paramètre  $\epsilon$ . C'est le cas pour une perturbation  $\Delta_\epsilon = \Delta + \epsilon \dot{\Delta}$  du laplacien sur  $X$  ou d'une perturbation  $T_\epsilon = T_0 + \epsilon U + \dots$  de  $T$  (ou les 2 à la fois).

On peut appliquer les fonctions implicites car l'équation précédente est du type  $\mathfrak{f}(k, \epsilon) = 0$  avec  $\mathfrak{f}(k_0, 0) = 0$  et  $\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial k_0}(k_0, 0) = 2k_0 \left( F(k_0) - \frac{1}{ik_0} \right) \neq 0$  : en fait, la partie imaginaire de ce nombre est  $2 > 0$ .

Dans le cas d'une perturbation  $\Delta_\epsilon$  du laplacien sur  $X$ , la condition pour que l'on obtienne une résonance, i.e. que  $\text{Im } k_0(\epsilon) < 0$  pour  $\epsilon \neq 0$ , s'écrit  $\dot{a}_0 \neq 0$ .

**PROPOSITION.** - Soit  $\Delta_\epsilon = \Delta_X + \epsilon \dot{\Delta} + \dots$ , la C.N.S. du premier ordre pour que lorsque  $\epsilon \neq 0$  petit,  $k_0(\epsilon)$  soit une résonance et donc que  $\Delta_T$  n'ait aucune valeur propre dans un petit intervalle centré en  $\lambda_{n_0}$ , est :  $\langle \dot{\Delta} \varphi_0 | E_1(k_0) \rangle \neq 0$  où  $\langle \rangle$  désigne le produit scalaire de  $L^2(X)$ .

Preuve. -

LEMME 1. - forall  $k$  , on a  $\langle \varphi_0 | E_1(k) \rangle = 0$  .

En effet,  $\langle (\Delta_X - \bar{k}^2) \varphi_0 | E_1(k) \rangle = \langle (\lambda_0 - \bar{k}^2) \varphi_0 | E_1(k) \rangle$  , peut aussi s'écrire  $\langle \varphi_0 | (\Delta_X - k^2) E_1(k) \rangle$  et  $(\Delta_X - k^2) E_1(k) = ik(1-r(k))T$  , donc la nullité de  $\langle (\lambda_0 - \bar{k}^2) \varphi_0 | E_1(k) \rangle$  résulte de celle de  $T(\varphi_0)$  , cela vaut pour  $\lambda_0 - \bar{k}^2 \neq 0$  et par continuité pour tout  $k \in \mathbb{C}$  .

LEMME 2. - On a  $r(k_0) \neq 1$  .

En effet, si  $r(k_0) = 1$  , on a  $\frac{d}{dx} E_0(k_0) |_{x=0} = 0$  et donc  $(\Delta - k_0^2) E_1(k_0) = 0$  et  $T(E_1(k_0)) = 2$  ,

donc  $E_1(k_0)$  est une fonction propre de  $\Delta_X$  de valeur propre  $k_0^2$  et non colinéaire à  $\varphi_0$  , ce qui est contraire à l'hypothèse.

On a alors par un calcul classique :

$$(\Delta_X - \lambda_0) \dot{\varphi}_0 + (\dot{\Delta} - \dot{\lambda}_0) \varphi_0 = 0 ,$$

puis par produit scalaire  $\langle \quad \rangle$  avec  $E_1(k_0)$  :

$$\langle \dot{\varphi}_0 | (\Delta_X - \lambda_0) E_1(k_0) \rangle + \langle \dot{\Delta} \varphi_0 | E_1(k_0) \rangle = 0$$

et le premier produit s'écrit encore, en utilisant

$(\Delta_X - \lambda_0) E_1(k_0) = ik_0(1-r(k_0))T$  , sous la forme  $ik_0(1-r(k_0)) \dot{a}_0$  : on a ainsi,

$$\dot{a}_0 = \frac{2i}{k_0(1-r(k_0))} \cdot \langle \dot{\Delta} \varphi_0 | E_1(k_0) \rangle ,$$

ce qui achève la preuve de la proposition.

Remarques. - Dans le cas des variétés hyperboliques  $\Gamma \backslash H$  , Phillips et Sarnak, ont introduit les premiers cette condition et ont su la relier à l'étude de zéros de certaines fonctions  $L$  .

## V. PROBLEMES

Il reste une foule d'idées à explorer, indépendamment même des problèmes (groupes fuchsien) qui ont d'abord motivé cette étude. Mentionnons-en quelques-uns :

- généralisation au cas d'un spectre continu de multiplicité infinie ;
- étude d'autres asymptotiques de spectres discrets pour de grandes variétés : surfaces de Riemann de genre  $g \geq 1$  dont le diamètre tend vers l'infini ;
- asymptotique des résonances en relation avec la géométrie des géodésiques périodiques de  $X$  ;
- étude de problème du type scattering inverse.

## BIBLIOGRAPHIE (très incomplète).

### Sur le cas des surfaces de Riemann d'aire finie.

- [CV 1] Y. COLIN DE VERDIERE, Pseudo-laplaciens II. Ann. Inst. Fourier 33, pp. 87-113 (1983).
- [D-I-P-S] J.M. DESHOILLERS, H. IWANIEC, R. PHILLIPS et P. SARNAK, On Maass cusp forms. (preprint oct. 84).
- [G1] L. GUILLOPE, Sur la distribution des longueurs des géodésiques fermées d'une surface compacte à bord totalement géodésique. (preprint).
- [P-S] R. PHILLIPS et P. SARNAK,  
 1. On the cusp forms for cofinite subgroups of  $PSL_2(\mathbb{R})$ . Inventiones Math. 80, 339-364 (1985).  
 2. The Weyl theorem and the deformation of discrete groups. (preprint oct. 84).
- [L-P1] P. LAX, R. PHILLIPS, Scattering theory for automorphic functions. Princeton University Press (1976).

Sur la théorie de la diffusion en général.

La référence de base reste :

[L-P 2] P. LAX et R. PHILLIPS, Scattering theory. Academic Press (1967).

On peut aussi trouver d'autres approches dans :

[R-S] M. REED et B. SIMON, Tome 3 de Methods of modern Maths. Physics. Academic Press (1979).

Sur les résonances et la formule de traces pour un obstacle de  $\mathbb{R}^n$ .

[B-G-R] C. BARDOS, J.C. GUILLOT et J. RALSTON, La relation de Poisson pour l'équation des ondes dans un ouvert non borné. Comm. PDE 7, pp. 905-958 (1982).

[G2] L. GUILLOPE, Asymptotique de la phase de diffusion pour l'opérateur de Schrödinger dans  $\mathbb{R}^n$ . Séminaire Bony-Sjöstrand-Meyer 84-85, exposé n° 5.

[I] M. IKAWA, On the scattering matrix for two convex obstacles. Preprint.

[R] J. RALSTON, Trapped rays in spherical symmetric media and poles of the scattering matrix. Comm. on Pure and Applied Math. 24, pp. 571-582 (1971).

Sur le cas unidimensionnel et le scattering inverse.

[A-M] Z. AGRANOVITCH et V. MARCHENKO, The inverse problem of scattering theory. Gordon and Breach (1963).

[C-S] K. CHADAM et P.C. SABATIER, Inverse problems in quantum scattering theory. Springer-Verlag (1977).

[CV 2] Y. COLIN DE VERDIERE, La matrice de scattering pour l'opérateur de Schrödinger sur la droite réelle. Sém. Bourbaki, n° 557 (79-80).

[D-T] P. DEIFT, E. TRUBOWITZ, Inverse scattering on the line. Comm. in Pure and Applied Math. 32, pp. 121-251 (1970).