Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

LOUIS BOUTET DE MONVEL

Cônes symplectiques et opérateurs de Toeplitz

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 13 (1994-1995), p. 157-166
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1994-1995__13__157_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
1994–1995 (157–166)

CÔNES SYMPLECTIQUES ET OPÉRATEURS DE TOEPLITZ

Louis BOUTET DE MONVEL

Séminaire semi-classique le 4 avril 1995

Dans cet exposé je reprend la construction de [2] (cf. aussi [7]) sur la quantification d'une variété de contact et les opérateurs de Toeplitz associés à un cône symplectique. J'ai essayé de donner une présentation plus simple et plus naturelle en exploitant mieux la géométrie des lagrangiennes complexes et le calcul symbolique des OIF qui interviennent dans cette construction.

1. Opérateurs intégraux de Fourier

Soient X une variété, Λ un cône lagrangien lisse dans T*X-{0}. Hörmander a défini la classe I_Λ des distributions intégrales de Fourier associée à Λ.

Si X et Y sont deux variétés, un OIF A de type $Y \to X$ est un opérateur A dont le noyau de Schwartz K est une distribution Lagragienne : $K \in I_\Lambda$. Il est plus commode de repérer par la relation canonique C symétrique de Λ par la symétrie $(x, \xi, y, \eta) \to (x, \xi, y, -\eta)$. Un tel opérateur a un symbole σ_A, section du fibré de Maslov M_C, qui est un fibré linéaire de rang 1 sur C. Dans ce qui suit on ne considèrera que les relations contenues dans $(T*X - \{0\}) \times (T*Y - \{0\}$; un opérateur A correspondant transforme une fonction C^∞ en fonction C^∞, et se prolonge continûment aux distributions de sorte que $SS\, Af \subset C(SS\, f)$ où SS désigne le microsupport.

On a les règles de calcul symbolique suivantes : si X, Y, Z sont trois variétés, C' une relation canonique $Z \to Y$, C une relation canonique $Y \to X$, nous dirons que C et C' sont tranverses si $C \times C'$ coupe transversalement $T^*X \times diagT^*Y \times T^*Z$. On note CoC' l'image $(pr_X \times pr_Z)\,(C \times C' \cap diagT^*Y)$: c'est une image étale lorsque C

Classification math. : 35P20, 35A27, 35J10, 35S30 et C' sont transverses, parce qu'il s'agit de relations canoniques. Si alors A resp. B est un OIF associé à C resp. C', AoB est un OIF associé à CoC', et on a

$$\sigma_{AoB} = \sigma_A \cdot \sigma_B$$

oú $\cdot$ est le produit naturel pour les fibrés de Maslov[1] (du moins si la projection $C \times C' \cap diag \to T^*(X \times Z)$ est injective, i.e. la projection $C \times_{diagT^*Y} C' \to CoC'$ est un plongement plutôt qu'une immersion; en général il y aurait une somme localement finie de telles contributions sur chaque "branche" de la variété immergée CoC'). Si on repère les symboles par des fonctions numériques, (choix d'un repère du fibré de Maslov, par exemple par le choix de phases et de coordonnées locales), cela donne une relation

$$a \cdot b(x, \xi, z, \zeta) = Ja(x, \xi, y, \eta)b(y, \eta, z, \zeta)$$

pour $(x, \xi, y, \eta) \in C$, $(y, \eta, z, \zeta) \in C'$, où J est une fonction homogène inversible sur CoC'

Pour la description du noyau de Szegö et des opérateurs de Toeplitz, nous devons utiliser des OIF à phase complexe (de partie imaginaire positive). La théorie de ces opérateurs a été développée par A. Melin et J. Sjöstrand ([21] [22]), qui montrent que pour ces opérateurs on a essentiellement le même calcul symbolique. Les lagrangiennes ou relations canoniques sont des "sous-variétés complexes". Pour les sous variétés réelles on dispose d'un dictionnaire (équivalence) entre sous variétés et ideaux : l'idéal $I = I(V)$ de V est le faisceau des fonctions C^∞ qui s'annulent sur V - il est localement engendré par d fonctions transverses (i.e. dont les différentielles sont linéairement indépendantes) si V est lisse de codimension d; inversement $V(I)$ est l'ensemble des points où toutes les fonctions de I s'annulent, et c'est une sous-variété lisse si I est localement engendré par des fonctions transverses. Pour définir une sous variété complexe, on ne dispose plus que de l'idál I (idéal de fonctions à valeurs complexes, localement engendré par des fonctions transverses). Il est néanmois commode de continuer de parler de V comme s'il s'agissait vrai objet géométrique. Cela ne pose aucun problème si tout est analytique réel (V est un germe de sous-variété analytique dans le complexifié, au voisinage des points réels); dans le cadre C^∞, Sjöstrand et Melin justifient précisément ce langage en représentant V par une classe de sous-variétés réelles dans un complexifié, tangentes d'ordre infini, et "presqu'holomorphes" i.e. satisfaisant les équations de Cauchy-Riemann à l'ordre infini, le long de leurs points réels[2].

La théorie de Sjöstrand et Melin est subtile car elle demande uniquement que les variétés lagrangiennes soient définies par une phase de partie imaginaire positive, et il

1. $M_{C \times C'}$ s'identifie canoniquement à $M_C \otimes M_{C'}$ (produit externe), et la restriction de ce dernier à la diagonale s'identifie, non moins canoniquement, à $(prX \times prZ)^{-1} (M_{CoC'})$. D'ailleurs l'existence d'un produit naturel et "associatif" est évidente et tautologique puisqu'il s'agit de symboles d'opérateurs. Ce qui est non trivial est l'identification "fonctorielle" du fibré de Maslov à un fibré de demi-densités tordu par le cocycle de Maslov, que nous n'utiliserons pas explicitement ici.

2. et de même les OIF à phase complexe qui nous intéressent sont caractérisés par le fait que leurs noyaux (pour une relation canonique fixée) forment un module "holonôme simple" sur l'algèbre des OPD, microlocalement engendré par un noyau K satisfaisant à $n(= dim\, X + dim\, Y)$ relations $P_i K = 0$ où les symboles des P_i sont transverses, à valeurs complexes.

n'y a pas d'autre condition de transversalité ou non dégénérescence le long des réels (par exemple la partie imaginaire peu s'annuler à l'ordre infini en certains points). Pour nous la situation sera beaucoup plus simple : les OIF que nous utiliserons peuvent localement être décrits avec une phase complexe ϕ dont la partie imaginaire s'annule sur une sous variété réelle lisse, et est positive et transversalement elliptique ($\geq$ *cste dist* ^{2}) le long de cette sous variété. Dans ce cas notre variété (ou son idéal de définition) est complètement déterminée par son jet d'ordre infini (série de Taylor) le long de sa partie réelle, et tous les calculs se ramènent à des calculs de séries formelles.

Nous utiliserons dans ce qui suit le langage géométrique décrit ci-dessus, qui est pour ces OIF à phase complexe parfaitement correct et plus agréable à manier et interpréter.

2. Opérateurs de Toeplitz associés à un cône symplectique

On prend pour modèle les opérateurs de Toeplitz sur le bord X (que nous supposons C^∞, compact) d'un domaine complexe strictement pseudo-convexe. On note S le projecteur de Szegö, i.e. le projecteur orthogonal dans $L^2(X)$ sur le sous espace des valeurs au bord de fonctions holomorphes (celui-ci est égal à l'espace des fonctions sur X annulées par le système $\overline{\partial}_b$ des équations de Cauchy-Riemann tangentielles).

Si A est un OPD sur X, l'opérateur de Toeplitz T_A est l'opérateur SAS, opérant sur cet espace de valeurs au bord de fonctions holomorphes (et plus généralement sur l'echelle d' espaces de Sobolev associée : $\mathcal{O}^s(\mathcal{X})$, espace des valeurs au bord de fonctions holomorphes qui sont dans l'espace, de Sobolev $H^s(X)$).

Le projecteur de Szegö S est un OIF à phase complexe dont la relation canonique se décrit comme suit : soit Σ le sous-cône microsupport des valeurs au bord de fonctions holomorphes; si le domaine est défini par $u \leq 0$ où u est de classe C^∞, $du \neq 0$ sur X, Σ est l'ensemble des multiples positifs de $\frac{1}{i}\partial u|X$ (cette forme est réelle sur X; Σ est la moitié de la variété caractéristique du système $\overline{\partial}_b$ des équations de Cauchy-Riemann tangentielles). Notons Z la variété caractéristique (complexe) de $\overline{\partial}_b$: il est immédiat que le flot hamiltonien (flot de $\overline{\partial}_b$) définit une fibration p : $Z \to \Sigma$. La relation canonique de S est la variété $Z \times_{diag \Sigma} \overline{Z}$ (flot de $\overline{\partial}_b$ (1er facteur)$\times \partial_b$ (2eme facteur) issu de diag Σ).

La variété caractéristique Z est involutive et "positive" le long de Σ, i.e. si $\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_{n_1}$ est une famille de générateurs transverses de l'idál de Z (symboles des coefficients de $\overline{\partial}_b$), $z_1, \ldots, z_{n-1}$ la famille des conjugués, la matrice de crochets de Poisson $\frac{1}{i}\{\overline{z}_p, z_q\}$ est dfinie positive le long de Σ (ceci traduit la stricte pseudo-convexité); en particulier Σ est symplectique, puisque elle a pour équations $\overline{z}_j = z_j = 0,\ j = 1 \ldots n-1$.

Cas général

Soit X une variété compacte et Σ un sous cône symplectique de $T^*X - \{0\}$.

Nous construisons un projecteur S dans $L^2(X)$ et des opérateurs de Toeplitz associés à Σ en imitant la configuration du cas complexe ci-dessus.

i) Construction des analogues de Z et de la relation canonique C.

On choisit une fonction q homogène positive, transversalement elliptique le long de Σ (i.e. $q(a) \geq$ cste $\text{dist}(a,\Sigma)^2$ au voisinage de tout point de Σ). Le champ hamiltonien H_q est nul sur Σ, et le long de Σ les valeurs propres transverses du linéarisé se regroupent par paires imaginaires pures opposées non nulles (les sous espaces spectraux sont en dualité ou orthogonaux selon que leurs valeurs propres sont opposées ou non). Il y a donc une variété sortante complexe Z pour $\frac{1}{i}H_q$), et une variété rentrante $\overline{Z}$. On vérifie que Z est involutive et "positive". Son flot caractéristique définit une fibration: $p : Z \to \Sigma$[3]

On choisit comme ci-dessus $C{=}Z \times_{\text{diag}\,\Sigma} \overline{Z}$. On a évidemment $CoC{=}C^*{=}C$.

ii) Construction du symbole principal du projecteur.

I_C est une algèbre involutive, puisque $CoC = C^* = C$, et le calcul symbolique est donné par

$$\sigma_{AB}(u) = \sigma_A(p_1 u) \cdot \sigma_B(p_2 u) \quad \text{pour} \quad u \in C$$

où $p_1 : C \to Z$ provient de la projection $\overline{Z} \to \Sigma$ du deuxième facteur, et $p_2 : C \to \overline{Z}$ provient de la projection $Z \to \Sigma$ du premier facteur[4]

De même si P est un OPD, on a pour $u \in C$

$$\sigma_{PA}(u) = \sigma_P(p_1 u)\sigma_A(u)$$

$$\sigma_{AP}(u) = \sigma_A(u)\sigma_P(p_2 u)$$

On a enfin $\sigma_{A^*}(u) = \overline{\sigma_A(su))}$, où s est la symétrie hermitienne qui échange et conjugue les facteurs de $Z \times_\Sigma \overline{Z}$. (localement on peut choisir un repère du fibré de Maslov, par exemple par le choix de coordonnées locales et d'une phase: le symbole de A est alors repéré par une fonction numérique a sur C. Le calcul symbolique prend la forme:

$$aob = J\, a(pu)b(\overline{p}u)$$

où J est une fonction fixe (homogène, non nulle) sur C. L'associativité impose

$$J(p_1 u) = J(p_2 u) = J_0$$

3. localement on choisit des coordonnées complexes $z, \overline{z}$ de sorte que $\overline{z} = 0$ soit l'équation de la variété sortante Z. On a $\frac{1}{i} H_q \overline{z} = A\overline{z}$ où A est une matrice (à coefficients C^∞ et les valeurs propres de A sont < 0 au voisinage de Σ. Par suite sur Z on a $\frac{1}{i} H_q\{\overline{z},\overline{z}\} = \lambda_2 A\{\overline{z},\overline{z}\}$ (où on a noté $\lambda_2 A(u \wedge v) = Au \wedge v + u \wedge Av$). Comme $\frac{1}{i} Hq$ est positif sur Z ($\frac{1}{i} H_q z = -\overline{A} z$) ceci implique $\{\overline{z},\overline{z}\} = 0$ pour $\overline{z} = 0$

4. localement au voisinage de Σ on peut choisir une structure produit et des coordonnées canoniques $x = (x_j)$ (réelle) $z = (z_k), \overline{z}_k$ (complexes) de sorte que Z soit définie par $\overline{z} = 0$ et Σ par $z = \overline{z} = 0$. p est alors la projection $(z, x, 0) \to (0, x, 0)$ dans Z); C est l'ensemble des $(z, x, 0\,,\, O, x, \overline{y})$, qu'on repère par $(z, x, \overline{y}) \in Z \times_\Sigma \overline{Z}$, p_1 est la projection $(z, x, \overline{y}) \to (z, x, 0)$ et p_2 la projection $(z, x, \overline{y}) \to (0, x, \overline{y})$

où $J_0(u) = J(p_1p_2u)$ ne dépend que de la projection de u sur Σ, et on se ramène à $J = 1$ en remplaçant le symbole a par aJ_0^2/J (changement de repère dans le fibré de Maslov).

L'adjonction est donnée par $a^* = m\overline{a(su)}$ où s est la symétrie hermitienne qui échange les facteurs, et m une fonction homogène non nulle telle que $m(u)\overline{m}(su) = 1$. Si $J = 1$ la relation $(AB)^* = B^*A^*$ implique $m = m(p_1u)m(p_2u)$ (en particulier $m = 1$ sur Σ), et on se ramène à $m = 1$ (et toujours $J = 1$) en remplaçant a par $am^{-1/2}$ (la racine est bien définie au voisinage de Σ puisque $m = 1$ sur Σ)).

Notons que σ_{ABC} ne dépend que de la restriction $\sigma_B|\Sigma$; et il est égal à σ_{AC} si $\sigma_B = 1$ sur Σ. Par suite σ_{AB} est idempotent si $\sigma_A = \sigma_B = 1$ sur Σ, et il est autoadjoint si $B = A^*$; d'où l'existence de symboles autoadjoits idempotents globaux.

Remarque 1. — Soit a un symbole idempotent comme ci-dessus. Si b en est un autre, il rśulte de ce qui précède que le rapport $\beta = b/a$ des deux symboles (qui est une fonction sur C) vérifie

$$\beta(u) = \beta(P_1u)\beta(p_2u) \quad \text{(idempotence)}\,, \ \beta(u) = \overline{\beta(su)} \quad \text{(autoadjonction)}$$

Alors il existe un OPD elliptique U de symbole σ_U unitaire et égal à 1 sur Σ, tel que $\beta = \sigma_U\, a\, \sigma_{U^*}$.

En effet, la deuxième condition implique qu'on a $\sigma_U(p_1u)a\sigma_{U^*}(p_2u) = b(u)$; pour $u \in Z$ ($p_2u \in \Sigma$) ceci implique $\sigma_U(p_1u) = b(p_1u)$ puisque $\sigma_U = 1$ sur Σ (la réciproque est immédiate, compte tenu que β est autoadjoint et idempotent). σ_U est ainsi complètement déterminé sur Z. La condition d'unitarit'e pour U s'écrit $\sigma_U\ \sigma_{U^*} = 1$; pour le prolongement complexe on a $\sigma_{U^*}(v) = \overline{\sigma_U(\overline{v})}$ et σ_U est donc aussi complètement déterminé sur $\overline{Z}$ (c'est compatible puisque le symbole vaut 1 sur $\Sigma = Z \cap \overline{Z}$). On peut alors choisir un premier symbole v égal à ce qui vient d'être déterminé sur $Z \cup \overline{Z}$ ($v(p_1u) = \beta(p_1u)$ sur Z, v égal à l'inverse de l'adjoint sur $\overline{Z}$). Le symbole $vv*$ est égal à 1 sur $Z \cup \overline{Z}$, et est donc voisin de 1 près de Σ, de sorte que sa racine carrée est bien définie. Le symbole $u = v(vv*)^{-1/2}$ convient. (Comme ce symbole est voisin de 1, il est facile de prolonger en un symbole unitaire défini globalement sur T^*X, et de raffiner U en un vrai opérateur unitaire).

iii) Construction du symbole total du projecteur.

Soit a un symbole idempotent comme ci-dessus et $A \in I_C$ un OIF (de degré 0) de symbole a. Il existe alors un unique idempotent A' (mod. degré $-\infty$) tel que $A - A'$ soit de degré -1, qui soit donné par une série entière (asymptotique) de puissances de $R = A - A^2$:

$$P' = P + F(1-2P) \text{ avec } F = \frac{1}{2}(1-(1-4R)^{-1/2}) = \sum \frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!}R^n \qquad (1)$$

(F doit vérifier l'équation du second degré $(F^2 - F)\ (1-4R) - R = P'^2 - P' = 0$)

Remarque 2. — Dans les constructions ci-dessus la notion de degré utilisée est celle du calcul symbolique des OIF. Un OIF de degré m est continu $H^s \to H^{s-m}$ mais s'il s'agit d'OIF à phase complexe la réciproque n'est fausse; en particulier ici si $A \in I_C$ est de degré m et s'annule sur Σ, A est en fait continu $H^s \to H^{s-m+1/2}$, et le symbole principal σ_A au sens des OIF contient plus d'information que la classe de A mod. $L(H^s, H^{s-degA+1})$. C'est ce qui distingue ce calcul OIF (plus précis) de celui des opérateurs de Hermite de [1], dont les OIF utilisés ici sont des cas particuliers, et qui est en partie utilisé dans [8] pour la description du noyau de Szegö et des opérateurs de Toeplitz.[5]

Remarque 3. — La construction de iii) est en fait inutile ici car complètement couverte par la suivante; mais la formule (1.1) montre que tout marche aussi bien dans un contexte formel (ou de $*$-algèbres) où on ne s'intéresse qu'aux développements asymptotiques)

iv) Construction du projecteur.

Soit A un OIF autoadjoint dont le symbole soit idempotent comme cidessus. Si X est compacte (c'est ici seulement qu'intervient la compacité), $A - A^2$ est un opérateur compact de sorte que le spectre SpA est ponctuel et a pour seuls points limite 0 et 1. Alors si f la fonction caractéristique d'un intervalle $[\lambda, \infty[$, avec $\lambda \in]0,1[$, $\lambda \notin spA$, (ou n'importe quelle autre fonction holomorphe au voisinage de SpA, qui ne prenne que les valeurs 0 et 1 et soit égale à 0 resp. 1 au voisinage de 0 resp. 1), $\Pi = f(A)$ est un projecteur OIF du type cherché.

Soit H_Π l'image de Π dans $L^2(X)$. Si P est un OPD, par définition l'opérateur de Toeplitz T_P est le "coefficient" $\Pi P \Pi$ de P dans H_P. Comme $\Pi \in I_C$ es opérateurs de Toeplitz sont aussi exactement les OIF $A \in I_C$ tels que $A = \Pi A \Pi$, de sorte qu'il forment une algèbre.

Le symbole d'un opérateur de Toeplitz est complètement déterminé par sa restriction à Σ (cf. iii), et les opérateurs de Toeplitz donnent lieu à un calcul symbolique sur Σ, microlocalement isomorphe à celui des OPD. De façon précise : si $A \in I_C$ est un opérateur de Toeplitz de degré m, le symbole de A considéré comme OIF est complètement déterminé par sa restriction à Σ (cf. ii)); nous noterons $\sigma_m(A)$ la restriction à Σ du quotient des symboles de A et Π (autrement dit nous repérons les symboles de sorte que $\sigma_\Pi = 1$, ou constatons et exploitons le fait que la restriction à Σ du fibré de Maslov a un trivialisation canonique). Alors $\sigma_m(A) = 0$ signifie que A est en fait de degré $\leq m-1$; il résulte alors aisément du calcul symbolique des OIF qu'on a, si $deg\ A = p$, $deg\ B = q$

$$\sigma_{p+q}(AB) = \sigma_p(A)\sigma_q(B)$$

5. Dans le symbolisme des opérateurs de Hermite, le symbole de l'analogue du noyau de Szegö est le projecteur orthogonal associé à une famille C^∞ (fibré) de lagrangiennes complexes positives du fibré normal de Σ (qui est symplectique); l'existence d'une telle famille est très facile, et correspond à la construction du jet d'ordre 1 de la "variété sortante du numéro i). Mais le calcul symbolique Hermite n'est pas aussi précis que celui des OIF - quand on peut en disposer.

$$\sigma_{p+q-1}([AB]) = -i\{\sigma_p(A)\ ,\ \sigma_q(B)\}$$

3. Invariance et conclusions

Bien que la construction ci-dessus dépende de plusieurs choix (choix de q ou plus exactement de Z, puis d'un "presque projecteur" (i.e. autoadjoint, et de symbole idempotent); le résultat est presque canonique, à un espace de dimension finie près : si Π et Π' sont deux projecteurs OIF comme si dessus, ($\in I_C, I'_C$), le composé $\Pi\Pi'\Pi$ (resp. $\Pi'\Pi\Pi'$) est toujours un opérateur de Toeplitz sur H_Π (resp. $H_{\Pi'}$) et le calcul symbolique des OIF montre que son symbole est > 0, donc qu'il est elliptique, donc Π (resp. Π') induit un opérateur de Fredholm (i.e. d'image et coimage finies) de $H_{\Pi'}$ sur H_Π (resp. de H_Π sur $H_{\Pi'}$.

On voit aussi, par approximations successives à partir de la remarque 1 du numéro ii) que si Π et Π' sont deux tels projecteurs (associés à Σ) il existe un OPD unitaire U tel que $\Pi' = U\Pi U^*$ mod. un opérateur de degré $-\infty$, de rang fini.

Plus généralement si $\Sigma \subset T^*X$ et $\Sigma' \subset T^*X'$ sont des cônes symplectiques isomorphes, et χ un isomorphisme symplectique $\Sigma \to \Sigma'$, il existe toujours un OIF "adapté" F, c'est à dire dont la relation canonique ait pour partie réelle le graphe de χ et soit "positive", et dont le symbole soit elliptique (c'est la même construction qu'au numéro 1 (cf.[2], [7]). L'opérateur $\Pi' F$ induit alors un opérateur de Fredholm de H_Π sur $H_{\Pi'}$. (l'indice n'est pas forcément nul, et d'ailleurs l'indice n'a guère de sens ici puisque H_Π n'est "unique" qu'à un espace de dimension finie près; mais le différence des indices de deux opérateurs a un sens et ici, une fois Π et Π' fixés, tous les opérateurs adaptés ont le même indice).

Si Σ est un cône symplectique, on peut toujours le plonger dans un T^*X. Le plongement canonique consiste à choisir pour X la base de Σ : la forme de Liouville de Σ ($\rho_L\omega$ où ω est la forme symplectique, ρ le champ de vecteur radial, générateur infinitésimal des homothéties de Σ) définit alors sur X une structure de contact (orientée) et Σ s'identifie à l'ensemble des multiples positifs des valeurs de la forme de contact, considérée comme section de T^*X.

Dans ce cas soit χ un automorphisme de contact de X, i.e. χ préserve la forme de contact à un facteur C^∞ positif près ou encore $T^*\chi$ préserve Σ, et notons U_χ le prolongement unitaitre canonique à $L^2(X)$ (il y a une racine positive de déterminant jacobien dans la formule de transformation). Alors l'opérateur $\Pi\, U_\chi$ est un opérateur á indice de H_Π dans lui même, et est dans ce contexte d'opérateurs de Toeplitz c'est l'analogue exact d'un OIF elliptique associé à la transformation canonique $T^*\chi$.

Les constructions ci-dessus autorisent l'action d'un groupe compact G : soient X une variété de contact orientée, $\Sigma \subset T^*X$ le cône symplectique associé, et G un un groupe compact d'automorphismes de X. Alors G opère symplectiquement sur Σ, et de façon unitaire sur $L^2(X)$. Dans la construction ci-dessus on peut choisir q invariante (remplacer par sa moyenne); Z et C sont alors invariants. On peut aussi (en remplaçant par une moyenne sur G) choisir invariante la première approximation A (telle que $A = A^*$, $\sigma_A = 1$ sur Σ), de sorte que $\Pi = f(A^2)$ l'est aussi.

Lorsque $\Sigma = T^*V$ où V est une variété compacte, l'espace H_Π s'identifie évidemment (à un espace de dimension finie près) à $L^2(V)$. Il résulte de ce qui précède que si G est un groupe compact d'automorphismes symplectiques de T^*V, G se relève en un groupe d'OIF unitaires dans $L^2(V)$ (démonstration simple d'un résultat de Weinstein [*]).

On peut enfin essayer de fabriquer des opérateurs de Toeplitz dépendant d'un paramètre; mais pour une construction globale, la dernière étape de la construction ci-dessus (choix d'une fonction f définissant une partition ouverte du spectre de A) pose un problème.

4. Quantification discrète (d'après V. Guillemin)

Soit X un cône symplectique à base compacte. On dit qu'une action de $U(1)$ sur X est elliptique si les cercles orbite sont transverses à la forme de Liouville; de façon équivalente : si le générateur infinitésimal $\partial/\partial\theta$ est un champ hamiltonien $\frac{1}{i}H_a$ avec a rélle homogène de degré un, non nulle (nous supposerons dans la suite $a > 0$). Nous nous intéressons ici au cas où $U(1)$ opère librement. Alors si L est la surface de niveau ($a = 1$) et $Z = L/U(1)$ est la variété des orbites de L, Z est une variété symplectique, à périodes entières (inversement toute va riéè symplectique à périodes entières provient d'un tel cône symplectique).

Exemple modèle. — On se donne un cône complexe $C \subset \mathbf{C}^n$, ou ce qui revient au même une variété projective Z munie d'un fibré en droites complexes ample $\tilde{L}$. La base de X est l'intersction de C et de la sphère unité, et X est le cône symplectique associé aux opérateurs de Toeplitz comme ci-dessus. Dans ce cas les rotations $z \to e^{i\theta}z$ préservent l'espace H des fonctions holomorphes, ainsi que le générateur infinitésimal $\partial/\partial\theta$.

Dans le cas général (qui implique seulement la donnée d'une variété symplectique à périodes entires, et ne provient pas nécéssairement d'un des modèles holomorphes) il y a toujours une strudture de Toeplitz invariante. Pour cette structure l'espace H_Π se décompose suivant l'action de $U(1)$, ou de $A = -i\partial/\partial\theta$: $H = \bigoplus H_n$, avec $H_n = ker(A - n)$; H_n est de dimension finie, nul pour $n \ll 0$ puisque A est elliptique de symbole positif.

Le commutant $\mathcal{A}$ de A dans l'algèbre de Toeplits est une modèle d'algèbre d'OPD semi-clasiques. Pour un tel opérateur $P \in \mathcal{A}$ on a une trace, qui est une fonction de

$h = \frac{1}{n}$ admettant un développement en puissances de h :

$$Tr(A, h) = Tr(A|H_n) \sim \sum a_k h^k$$

La classe de cette trace mod. les fonctions à décroissance rapide est la trace "canonique" (qui est unique à un facteur série formelle $\sum b_k h^k$, $b_k \in \mathbb{C}$ près).

Références

[1] BOUTET DE MONVEL L. *Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudodifferential operators.* Comm. Pure Appl. Math. 27 (1974), 585-639.

[2] BOUTET DE MONVEL L. *On the index of Toeplitz operators of several complex variables.* Inventiones Math. 50 (1979) 249-272. cf. aussi Séminaire EDP 1979, Ecole Polytechnique.

[3] BOUTET DE MONVEL L. *Variétés de contact quantifiées.* Séminaire Goulaouic-Schwartz, 1979-80, exposé 3.

[4] BOUTET DE MONVEL L. *Convergence dans le domaine complexe des séries de fonctions propres.* C.R.A.S. 287 (1979), 855-856.

[5] BOUTET DE MONVEL L. *Opérateurs à coefficients polynomiaux, espace de Bargman, et opérateurs de Toeplitz.* Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz, 1980-81 exposé 2 bis.

[6] BOUTET DE MONVEL L. *Opérateurs pseudodifférentiels à bicaractéristiques périodiques.* Séminaire Bony-Meyer-Sjöstrand, Ecole Polytechnique, 1984, exposé 20.

[7] BOUTET DE MONVEL L. *Toeplitz Operators, an asymptotic quantization of symplectic cones.* Research Center of Bielefeld-Bochum-Stochastics, University of Bielefeld (FDR) 215/86 (1986).

[8] BOUTET DE MONVEL L , GUILLEMIN V. *The Spectral Theory of Toeplitz Operators* Ann. of Math Studies 99, Princeton University Press, 1981.

[9] BOUTET DE MONVEL L., SJÖSTRAND J. *Sur la singularité des noyaux de Bergman et de Szegö.* Astérisque 34-35 (1976) 123-164.

[10] DUISTERMAAT J.J. *Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unfolding of singularities.* Comm Pure Appl. Math. 27 (1974), 207-281.

[11] DUISTERMAAT J.J., GUILLEMIN V. *The spectrum of positive elliptic operators and periodic geodesics.* Proc. A.M.S. Summer Inst. Diff. Geom. Stanford (1973).

[12] DUISTERMAAT J.J., HÖRMANDER L. *Fourier integral operators II.* Acta Math. 128 (1972), 183-269.

[13] DUISTERMAAT J.J., SJÖSTRAND J. *A global construction for pseudo-differential operators xith non involutive characteristics.* Invent. Math. 20 (1973), 209-225.

[14] FEDOSOV B.V. *Formal quantization.* Some topics of Modern Mathematics and their Applications to Problems of Mathematical Physics (in russian), Moscow (1985), 129-136.

[15] FEDOSOV B.V. *Index theorems in the algebra of quantum observables.* Sov. Phys. Dokl 34, (1989), 318-321.

[16] FEDOSOV B.V. *A simple geometrical construction of deformation quantization.* J. Diff Geom.

[17] FEDOSOV B.V. *Proof of the index theorem for deformation quantization.* Advances in Partial Differential Equations, Akademie Verlag, Berlin (1994).

[18] FEDOSOV B.V. *Reduction and eigenstates in deformation quantization.* Advances in Partial Differential Equations, Akademie Verlag, Berlin.

[19] FEFFERMAN C. *The Bergman kernel and biholomorphic equivalence of pseudo-convex domains.* Inventiones Math. 26 (1974), 1-65.

[20] GUILLEMIN V., STERNBERG S. *Geometrical asymptotics.* Amer. Math. Soc. Surveys 14, Providence RI, 1977.

[21] HÖRMANDER L. *Fourier integral operators I.* Acta Math. 127 (19721), 79-183. Melin A.

[22] J.SJÖSTRAND. *Fourier Integral operators with complex valued phase functions.* Lecture Notes 459 (1974) 120-223.

[23] MELIN A., SJÖSTRAND J. *Fourier integral operators with complex phase functions and para-metrix for an interior boundary value problem.* Comm. P.D.E. 1:4 (1976) 313-400.

[24] WEINSTEIN A., ZELDITCH S. *Singularities of solutions of Schrödinger equations on R^n.* Bull. Amer. Math. Soc., 6, nb. 3 (1982), 449-452.

[25] WEINSTEIN A. *Fourier integral operators, quantization, and the spectrum of a Riemanian manifold.* Géométrie Symplectique et Physique Mathématique, Coll. International du C.N.R.S. 237 (1976), 289-298.

[26] WEINSTEIN A. *Noncommutative geometry and geometry and geometric quantization.* in Symplectic Geometry and Mathematical Physics, Actes du Congrès en l'honneur de J. M. Souriau, P. Donato et al eds., Birkhäuser (1991), 446-461.

[27] WEINSTEIN A/ *Deformation quantization.* Séminaire Bourbaki 789, Juin 7994.

Louis BOUTET DE MONVEL Institut de Mathématiques
(UMR 9994 du CNRS),
Université de Paris 6,
Tour 46-0, 5-ième étage
boîte 172,
4 place Jussieu,
F-75252 Paris Cedex 05 (France)