Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Yves Colin de Verdière

Une introduction aux opérateurs de Toeplitz

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 13 (1994-1995), p. 135-141
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1994-1995__13__135_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
1994–1995 (135–142)

UNE INTRODUCTION AUX OPÉRATEURS DE TOEPLITZ

Yves COLIN DE VERDIÈRE

Séminaire semi-classique le 14 mars 1995

Pourquoi des opérateurs de Toeplitz?

La théorie classique des OPD et des OIF (Maslov, Hörmander) ne considère comme variété symplectique sous-jacente que les cotangents de variétés. Du point de vue de la mécanique quantique et donc semi-classique, on ne considère donc que des espaces de Hilbert du type $L^2(X)$.

On sait bien qu'en mécanique classique on est amené à considérer d'autres espaces des phases que les cotangents.

Du point de vue purement quantique, la quantification *géométrique* introduite par Kostant et Souriau dans les années 70 donne satisfaction. Elle ne permet cependant pas d'étudier le passage à la limite classique (principe de correspondance).

La théorie de Boutet-Guillemin permet de faire une théorie semi-classique dans le même contexte que la celui de la quantification géométrique. En particulier, on peut prendre comme espace de phases une sous-variété algébrique lisse du projectif $P^N(\mathbb{C})$ munie de la structure symplectique induite par celle de $P^N(\mathbb{C})$.

L'objet central est celui de *structure de Toeplitz* attachée à un sous-cône symplectique Σ du cotangent $T^\star Z$. En fait, on peut même prendre un cône symplectique non plongé dans un cotangent en se ramenant au cas précédent. Cela recouvre bien sûr le cas des variétés de contact. Une structure de Toeplitz est la donnée d'un sous-espace de Hilbert $\mathcal{H}_\Sigma$ de $L^2(Z)$ dont les éléments ont leur WF contenu dans le cône Σ et ayant une structure microlocale précisée.

La structure de Toeplitz n'est pas en général unique lorsque Σ est donné ; il y a parfois un choix canonique de $\mathcal{H}_\Sigma$ par exemple dans les cas liés aux variétés algébriques : espaces de Hardy de valeurs au bord de fonctions holomorphes.

Classification math. : 35P20, 35A27, 35J10, 35S30.

1. Introduction.

Les opérateurs de Toeplitz introduits par Boutet-Guillemin sont une généralisation des *matrices de Toeplitz* : si S est le projecteur de Szegö défini sur les séries de Fourier l^2 par $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx} \to \sum_{n\geq 0} a_n e^{inx}$, un opérateur de Toeplitz sur $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ est défini par

$$Af = SaSf ,$$

où $a \in C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Une matrice de Toeplitz classique est la matrice de A dans la base des séries de Fourier.

On généralise ensuite la définition de S à $L^2(Z)$ où Z est le bord d'un domaine strictement pseudo-convexe Ω de $\mathbb{C}^n$: S est alors le projecteur orthogonal de $L^2(Z)$ sur le sous-espace de Hardy $\mathcal{H}(Z)$ formé des *valeurs au bord* de fonctions holomorphes dans Ω qui sont L^2. Boutet et Sjöstrand ont montré ([B-S]) que S a une structure microlocale universelle (S est un opérateur de Hermite ou Fourier intégral à phases complexes).

Boutet et Guillemin ont ensuite ([B-G]) pris cette structure microlocale pour définir en général une structure de *Toeplitz* associée à un sous-cône symplectique Σ de T^*Z où Z est une variété compacte C^∞ quelconque.

Une telle structure est donc donnée par un projecteur orthogonal S de $L^2(Z)$ ayant une caractérisation microlocale liée à Σ.

Boutet et Guillemin définissent ensuite la notion d'opérateur de Toeplitz associé à S. Un opérateur de Toeplitz T de degré m sur Z est un opérateur de $C^\infty(Z)$ dans $\mathcal{D}'(Z)$ de la forme $T = SAS$ où A est un opérateur pseudo-différentiel classique sur Z de degré m.

Boutet et Guillemin étudient de façon détaillée le calcul symbolique de ces opérateurs qui est un sous-produit de la théorie des opérateurs de Hermite (dont les symboles principaux sont les spineurs symplectiques) (voir [GU]). Ils appliquent leur théorie à la théorie spectrale des Toeplitz elliptiques et en déduisent une formule de traces semi-classique et un calcul de la dimension des paquets de valeurs propres pour un opérateur à bicaractéristiques toute périodiques.

Une autre application est la quantification des variétés de contact arbitraires et donc de variétés symplectiques quantifiables au sens de la *quantification géométrique.*

Dans cet exposé, je vais donner des définitions plus précises des structures de Toeplitz, les principaux résultats sur le calcul symbolique des opérateurs de Toeplitz et surtout l'application à la quantification semi-classique des variétés algébriques et plus généralement des variétés symplectiques quantifiables.

On pourra ultérieurement essayer de comprendre plus en détail le calcul des spineurs symplectiques et aussi les formules de traces semi-classiques.

Cet exposé est donc conçu comme une invitation à la lecture de [B-G] ; voir aussi l'exposé de Boutet de Monvel dans ce volume et l'exposé "Champs magnétiques classiques et quantiques" qui donne un exemple naturel.

2. Structures de Toeplitz.

On considère Z une variété compacte de dimension n, munie d'une densité $|dz|$, et un sous-cône $\Sigma \subset T^*Z \setminus 0$ supposé symplectique de dimension $2q$ pour la structure induite par celle de T^*Z.

2.1. Quatre exemples fondamentaux.

(i) $\Sigma = T^*Z \setminus 0$: les opérateurs de Toeplitz seront alors les OPD ordinaires.

(ii) Z est une variété de contact de dimension $2r+1$: rappellons qu'une structure de contact orientée sur Z est la donnée d'une distribution C^∞ de demi-espaces définis localement par la positivité d'une 1-forme réelle α sur Z (définie à multiplication près par une fonction C^∞ strictement positive et vérifiant la condition de non-dégénéréscence suivante :

$$\alpha \wedge (d\alpha)^{\wedge r}$$

est une forme volume.

On prend alors pour Σ le sous-cône de $T^*Z \setminus 0$ engendré par les multiples > 0 de α (on peut prendre comme définition de *structure de contact* la propriété que Σ est symplectique). En particulier, on s'intéressera au cas où Z admet une action libre de S^1 qui laisse α invariante : le quotient est alors une variété symplectique X. On rejoint ainsi les objets considérés dans la quantification géométrique de X.

(iii) Z est le bord d'un domaine strictement pseudo-convexe de $\mathbb{C}^{r+1}$ (ou même d'une variété de Stein quelconque) et la distribution de contact est l'ensemble des 1-forme qui sont ≥ 0 sur le demi-espace $T_zZ \cap \frac{1}{i}T_z\Omega$. C'est bien sûr un cas particulier de (ii), mais ici une structure de Toeplitz canonique est donnée par le projecteur sur l'espace de Hardy, ensemble des valeurs au bord de fonctions holomorphes qui sont L^2.

Un sous-cas est celui où Ω est l'intersection de la boule unité de $\mathbb{C}^{N+1}$ avec un cône algébrique lisse C. Z admet alors une action libre de S^1 (la multiplication par $e^{i\theta}$) dont le quotient est la sous-variété algébrique de $P^N(\mathbb{C})$ quotient du cône C. Le projecteur canonique S commute alors avec l'action de S^1 sur Z.

(iv) $\Sigma = T^*\mathbb{R}^n \setminus (0,0)$ muni de la structure de cône symplectique donnée par les homothéties $h_\lambda(x,\xi) = (\lambda x, \lambda\xi)$ pour lesquels ω est homogène de degré 2. Une structure de Toeplitz est donnée par $L^2(\mathbb{R}^n)$ et le calcul pseudo-différentiel global de Helffer-Robert.

2.2. Structure de Toeplitz standard.

On introduit d'abord *la structure de Toeplitz standard* sur $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ pour le cône symplectique de dimension $2q$, $\Sigma^o_{n,q} = \{(0,t;0,\tau)\}$ avec $(y,t) \in \mathbb{R}^n$; $(\eta,\tau) \in$

$(\mathbb{R}^n)^*$. On définit alors l'espace de Hardy $\mathcal{H}_{n,q}$ comme l'ensemble des solutions L^2 des équations :

$$D_j f = (\partial_{y_j} + y_j|D_t|)f = 0,\ j = 1, \cdots, p.$$

La théorie des OPD de Hörmander montre immédiatement que les fonctions de $\mathcal{H}_{n,q}$ ont leur front d'onde contenu dans $\Sigma^o_{n,q}$, car *le symbole principal* σ_j de D_j est $\sigma_j = i\eta_j + y_j|\tau|$.

On désigne par $S^o_{n,q}$ le projecteur orthogonal de $L^2(\mathbb{R}^n)$ sur $\mathcal{H}_{n,q}$: on a une formule explicite pour $S^o_{n,q}$:

$$S^o_{n,q}u(y,t) = \frac{1}{(2\pi)^q}\int e^{i(t-t')\tau - (|y|^2+|y'|^2)|\tau|}\left(\frac{|\tau|}{\pi}\right)^{p/2} u(y',t')|dy'.dt'.d\tau|\,.$$

Cette formule montre bien la nature OIF à phases complexes.

2.3. Structure de Toeplitz.

Une structure de Toeplitz sur une variété Z de dimension n associée à un cône symplectique $\Sigma \subset T^*Z \setminus 0$ de dimension $2q$ est la donnée d'un sous-espace de Hilbert $\mathcal{H}_\Sigma$ de $L^2(Z)$, tel que, si $u \in \mathcal{H}_\Sigma$, $WF(u) \subset \Sigma$ et dont le projecteur orthogonal $S : L^2(Z) \to \mathcal{H}_\Sigma$ est microlocalement conjugué à $S^o_{n,q}$ par un OIF elliptique associé à une transformation canonique homogène qui envoie un ouvert du cône standard $\Sigma^o_{n,q}$ sur un ouvert de Σ.

Boutet et Guillemin (Appendice de [B-G]) montrent qu'une telle structure existe toujours et est donnée par un OIF à phases complexes, *essentiellement* unique.

Boutet et Sjöstrand [B-S] montrent que le projecteur de Szegö de l'exemple (iii) est une structure de Toeplitz.

Décrivons plus en détail la géométrie sous-jacente.

2.4. Un peu d'algèbre linéaire.

Si E est un espace vectoriel symplectique réel de dimension $2n$, et si $\Lambda \subset E \otimes \mathbb{C}$ est un lagrangien complexe, la forme $-i\omega(z, \bar{w})$ est hermitienne sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel Λ. On dira que Λ est positif, si cette forme est définie positive. A un tel Λ est associée une structure complexe J de la façon suivante : on a évidemment

$$\Lambda \cap \bar{\Lambda} = 0\,,$$

(un vecteur de l'intersection donnerait un vecteur isotrope pour la forme hermitienne définie précédemment) et donc $\Lambda \cap E = \Lambda \cap iE = 0$ qui montre que Λ est le graphe d'une application $\mathbb{R}-$ linéaire iJ de E dans iE. On vérifie que J est une structure complexe et que J est symplectique.

Il est ainsi facile de voir que l'ensemble des lagrangiens > 0 de E est un espace homogène isomorphe à $Sp(n)/U(n)$ qui est contractible (car $U(n)$ est un compact maximal).

Il est en bijection canonique avec l'espace des structures complexes ($J \in GL(E)$, $J^2 = -Id$) sur E qui sont ω-compatibles (J symplectique et $\omega(Jv, w)$ est une forme quadratique définie positive). On a déjà vu comment associer une structure complexe à un espace lagrangien complexe, l'inverse consistant à associer à une structure complexe J $\omega-$compatible le lagrangien des vecteurs holomorphes.

2.5. Strutures de Toeplitz (suite).

Soit maintenant N_Σ le fibré normal à Σ pour la forme ω (la fibre en un point de Σ est l'orthogonal pour ω de l'espace tangent à Σ et donc un supplménmentaire, car ce dernier est symplectique). N_Σ est bien sûr symplectique. On se donne un sous fibré homogène de sous espaces lagrangiens positifs de $N_\Sigma \otimes \mathbb{C}$. Ce sous fibré détermine la partie principale de la structure de Toeplitz.

2.6. Opérateurs de Toeplitz.

Si S est une structure de Toeplitz associée à Σ de dimension de $2q$, on a une notion d'opérateur de Toeplitz : un opérateur de Toeplitz $A \in \mathcal{T}_S$ est un opérateur de la forme :

$$A = SBS \, ,$$

où B est un OPD classique. Bien sûr, on peut voir un opérateur de Toeplitz comme opérant sur $L^2(Z)$ (comme opérateur non bormé), mais il est plus intéressant de les voir opérer sur $\mathcal{H}_\Sigma$. En effet, la notion d'opératerus de Toeplitz est attachée au cône Σ et non à la façon de le plonger dans $L^2(Z)$.

Les opérateurs de Toeplitz de $\mathcal{T}_S$ forment une algèbre graduée microlocalement isomorphe à l'algèbre des OPD sur $\mathbb{R}^q$.

Le symbole principal de $A = SBS$ est la restriction du symbole de B à Σ et on a les règles usuelles pour les composés et crochets utilisant la structure symplectique de Σ.

Un lemme important est que l'on peut toujours choisir B de façon qu'il commute avec S et donc avec A.

3. Opérateurs de Toeplitz semi-classiques.

On se donne une variété symplectique compacte X et un fibré principal Z en cercles avec une connection (une 1-forme α s^1-invariante) de courbure ω (ie $d\alpha = \pi^\star(\omega)$) (cela est possible si ω est 2π entière). On prend ce fibré principal Z muni de la forme de connection α comme variété de contact. On choisit alors une structure de Toeplitz invariante par S^1 sur Z. L'opérateur $-i\partial_\theta$ est alors un Toeplitz dont le spectre est formé des entiers ≥ 0. L'espace propre $\mathcal{H}_N$ de valeur propre N est un espace de dimension finie, on peut l'identifier à un sous-espace de l'espace des sections C^∞ d'un fibré en droites complexes $L^{\otimes N}$ sur X associé au caractère $e^{iN\theta}$ de S^1. On note $S = \oplus_N S_N$

La dimension d_N de $\mathcal{H}_N$ est un polynôme en N pour N grand qui généralise le polynôme d'Hilbert-Samuel et le polynôme introduit dans [CV] et se calcule comme conséquence du théorème de Riemann-Roch-Atiyah-Singer.

Structure de Toeplitz sur Z : on peut identifier le fibré normal invariant à Σ au fibré tangent à X comme espaces symplectiques en considérant la restriction à $N\Sigma$ de la diférentielle de la projection canonique de T^*Z dans X. La structure de Toeplitz est donc déterminée au premier ordre par une structure presque complexe ω-compatible sur X (polarisation complexe dans le language de la quantification géométrique).

Maintenant, on considère la sous-algèbre de l'algèbre des opérateurs de Toeplitz sur Z formée de ceux qui sont d'ordre 0 et qui commutent à ∂_θ ; bien sûr, ils laissent stables la décomposition de l'espace de Hardy en somme des $\mathcal{H}_N$. Le symbole principal est une fonction a sur Z invariante par l'action de S^1 qui descend donc en une fonction sur X. L'opérateur A_N, N-ième composante du Toeplitz $Op(a)$ de symbole a (sur Z) est donc obtenu en faisant le produit par a comme section de $L^{\otimes N}$ et en projetant orthogonalement sur $\mathcal{H}_N$.

Les opérateurs de Toeplitz précédents seront désignés comme opérateurs de Toeplitz *semi-classiques.* Le paramètre semi-classique est $h = 1/N$.

Bien sûr lorsque X est une variété algébrique projective lisse munie de la métrique Kählérienne induite par le projectif, Z peut étre vue comme le bord de l'ouvert Ω intersetion d'un cône algébrique C et de la boule unité de $\mathbb{C}^N$: alors les espaces $\mathcal{H}_N$ sont les espaces de sections holomorphes des fibrés holomorphes $L^{\otimes N}$. On retrouve une situation étudiée en particulier par Thierry Bouche [BO].

4. La théorie spectrale des opérateurs de Toeplitz semi-classiques et les états cohérents.

On se place dans le cadre du § 3. A un symbole

$$a(x;N) \sim a_0(x) + \frac{1}{N}a_1(x) + \cdots + (\frac{1}{N})^j a_j(x) + \cdots$$

est donc associé une suite d'opérateurs

$$A_N = Op_N(a)$$

où A_N est l'endomorphisme de $\mathcal{H}_N$ défini par

$$A_N f = S_N(af) .$$

Cette quantification est *positive* au sens que si $a \geq 0$, les $Op_N(a)$ sont des opérateurs auto-adjoints positifs. Les mesures de Husimi

$$\mu_{N,\varphi_N}(a) =< \varphi_N | Op_N(a) | \varphi_N >$$

associées à une suite de sections $\varphi_N \in \mathcal{H}_N$ de norme 1 sont les mesures $|\varphi_N|^2|dx|$.

Les noyaux $K_N(x,y)$ donnent lieu à des formules

$$f(x) = \int_X K_N(x,y)f(y)|dy|$$

pour $f \in \mathcal{H}_N$. On est donc amené à appeller états cohérents les fonctions

$$f_{N,x}(.) = K_N(x,.) .$$

On a une formule de Weyl du type suivant : soit a à valeurs réelles et $\lambda_{N,j}$, $j = 1, \cdots, d_N$ le spectre de $Op_N(a) = A_N$.

Alors les mesures de probabilités

$$\sigma_N = \frac{1}{d_N} \sum_j \delta(\lambda_{j,N})$$

convergent faiblement vers l'image de la mesure de Liouville normalisée de X par a_0 le symbole principal ([G-N], th. 13.11). Cela recouvre les résultats de [BO].

On aimerait aussi avoir une formule de trace semi-classique reliant la trace de e^{itNA_N} aux orbites périodiques du système hamiltonien classique d'Hamiltonien a_0.

Une telle formule ne se réduit pas à la formule donnée dans [B-G], th. 12.10, mais doit provenir des mêmes méthodes.

Références

[B1] L. Boutet de Monvel. — *Nombre de valeurs propres d'un opérateur elliptique et polynôme de Hilbert-Samuel,* Séminaire Bourbaki 532 (1978-79),.

[B2] L. Boutet de Monvel. — *Opérateurs de Toeplitz de plusieurs variables complexes,* Séminaire Goulaouic-Schwartz (78-79), VII1–VII8.

[B3] L. Boutet de Monvel. — *Variétés de contact quantifiées,* Séminaire Goulaouic-Schwartz (79-80), III1–III6.

[B4] L. Boutet de Monvel. — *Opérateurs à bicaractéristiques périodiques,* Séminaire Bony-Sjöstrand-Meyer (84-85), XX1–XXX12.

[B5] L. Boutet de Monvel. — *Compléments sur le noyau de Bergman,* Séminaire EDP Ecole Polytechnique (85-86), XX1–XX13.

[B-G] L. Boutet de Monvel, V. Guillemin. — *The spectral theory of Toeplitz operators,* Princeton, 1981.

[B-S] L. Boutet de Monvel, J. Sjöstrand. — *Sur la singularité des noyaux de Bergmann et de Szegö,* Astérisque 34-35 (1976), 123–164.

[BO] T. Bouche. — *Asymptotique d'une certaine forme quadratique,* Preprint (1993), 1–6.

[CV] Y. Colin de Verdière. — *Sur le spectre des opérateurs à bicaractéristiques toutes périodiques,* Commentarii Math. Helv. **54** (1979), 508–522.

[GU] V. Guillemin. — *Symplectic spinors and PDE's,* Géométrie symplectique et physique mathématique, Colloque CNRS 237 (1974), 217–252.

Yvex COLIN DE VERDIÈRE
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
URA188 du CNRS
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)
e-mail : ycolver@fourier.ujf-grenoble.fr