Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

CHRISTOPHE CHAMPETIER

# Structure quasi-conforme et dimension conforme d'après P. Pansu, M. Gromov et M. Bourdon

*Séminaire de Théorie spectrale et géométrie*, tome 13 (1994-1995), p. 23-36

<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1994-1995__13__23_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
1994–1995 (23–36)

# STRUCTURE QUASI-CONFORME ET DIMENSION CONFORME D'APRÈS P. PANSU, M. GROMOV ET M. BOURDON

*Christophe CHAMPETIER*

Par ordre croissant de généralité, les objets pouvant être étudiés seront l'espace hyperbolique réel $\mathbb{H}^n$, les espaces symétriques de rang 1, les variétés riemanniennes à courbure strictement négative simplement connexes. On gardera en tête le cadre plus général des espaces métriques hyperboliques de Gromov.

Un invariant de quasi-isométries de ces espaces est le bord topologique: une quasi-isométrie entre deux tels espaces se prolonge à leurs bords en un homéomorphisme. Le but de cet exposé est, suivant P. Pansu [1], de définir une "structure (quasi-)conforme" sur ces bords qui sera invariante par quasi-isométrie des espaces, de définir un invariant numérique de cette structure, la dimension conforme, et de calculer cet invariant sur des exemples, dont certains étudiés par M. Gromov [2] et M. Bourdon [3].

Je remercie F. Paulin pour sa lecture et ses corrections de ce texte. Nous renvoyons à [35] chap.2 pour des compléments sur le sujet.

## I. Action au bord des isométries et généralisations

Notons $\overline{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ ($= \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$) muni de sa structure différentielle canonique. On s'intéresse ici à sa structure conforme standard, induite par la métrique sphérique standard ou la métrique plate sur $\mathbb{R}^n$. Notons qu'une structure conforme, *i.e.* la donnée en chaque point sur l'espace tangent d'une métrique riemannienne à constante près, peut se résumer à la donnée des sphères sur cet espace tangent (une application linéaire envoyant sphères sur sphères étant une similitude).

---

*Classification math.* : 30C65, 53A30, 53C23

Notons Möb($\overline{\mathbb{R}}^n$) le groupe des applications de Möbius de $\overline{\mathbb{R}}^n$, engendré par les inversions par rapport aux sphères (formé des similitudes et des produits d'une similitude par une inversion). Le but est de montrer qu'un homéomorphisme conforme (i.e. différentiable dont la différentielle envoie sphères sur sphères) de $\overline{\mathbb{R}}^n$ est une application de Möbius (et donc envoie sphères sur sphères).

Notons d'abord que pour $n = 1$, toute application différentiable est conforme et ce résultat est donc faux. On supposera désormais $n \geq 2$.

Pour $n = 2$, il est immédiat qu'une application conforme $C^1$ préservant l'orientation est holomorphe et qu'un automorphisme holomorphe de $\overline{\mathbb{C}}$ est une application de Möbius (homographie) préservant l'orientation. Cela donne :

$$\mathrm{Conf}_{C^1}(\overline{\mathbb{R}}^2) = \mathrm{Möb}(\overline{\mathbb{R}}^2).$$

Liouville [4] a montré en 1850 que pour $n \geq 2$ :

$$\mathrm{Conf}_{C^3}(\overline{\mathbb{R}}^n) = \mathrm{Möb}(\overline{\mathbb{R}}^n)$$

(voir la preuve élémentaire de Nevanlinna [5] pour $\mathrm{Conf}_{C^4}(\overline{\mathbb{R}}^n) = \mathrm{Möb}(\overline{\mathbb{R}}^n)$) et ce résultat est en fait local (c'est-à-dire valable pour des applications entre domaines de $\overline{\mathbb{R}}^n$) dès que $n \geq 3$.

En appliquant des résultats de régularité de solutions d'équations aux dérivées partielles elliptiques, Hartman [6] montre en 1958 qu'une application conforme de classe $C^1$ d'un domaine de $\mathbb{R}^n$ est en fait $C^3$ si $n \geq 2$, et donc :

$$\mathrm{Conf}_{C^1}(\overline{\mathbb{R}}^n) = \mathrm{Möb}(\overline{\mathbb{R}}^n).$$

On verra plus loin comment ce résultat se généralise (Gehring, 1960) au cadre $C^0$.

Notons maintenant (avec Poincaré) que si $\mathbb{H}^{n+1}$ est le demi-espace supérieur de $\mathbb{R}^{n+1}$, avec $\partial\mathbb{H}^{n+1} = \overline{\mathbb{R}}^n$, et sa métrique hyperbolique, on a pour $n \geq 2$ :

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^{n+1}) = \mathrm{Möb}(\overline{\mathbb{R}}^n) = \mathrm{Conf}(\overline{\mathbb{R}}^n).$$

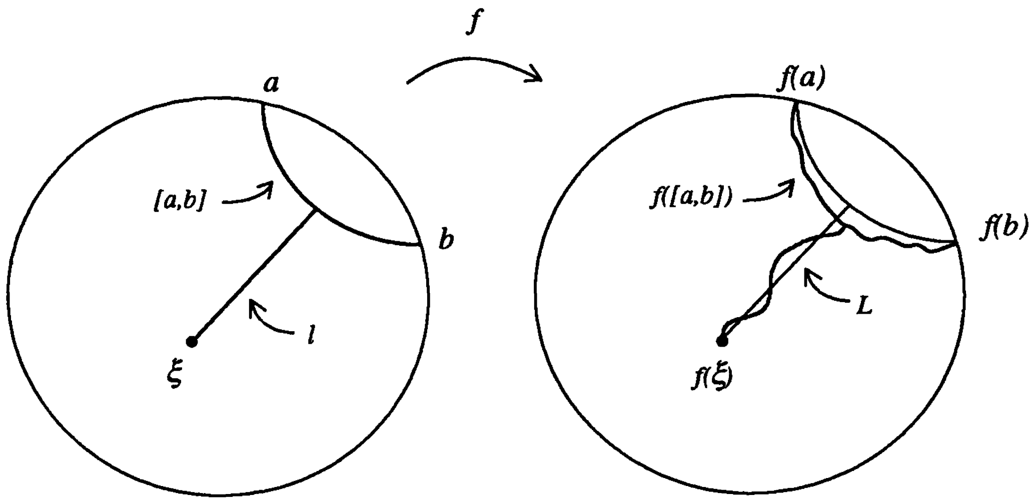
Donc ce qu'on retiendra sur $\partial\mathbb{H}^{n+1}$ pour étudier les isométries de $\mathbb{H}^{n+1}$, c'est sa structure conforme (structure conforme standard de $\overline{\mathbb{R}}^n$).

Voici deux problèmes plus généraux qui font sortir du cadre différentiable :

**1. Les quasi-isométries.** — Au lieu d'étudier les isométries de $\mathbb{H}^n$, on considère les quasi-isométries. Pour une telle application $f$, on a des constantes $\lambda, \mu$ tels que pour tous $x, y$, $\frac{1}{\lambda}d(x,y) - \mu \leq d\big(f(x)f(y)\big) \leq \lambda d(x,y) + \mu$. Pour $\mu = 0$, ce sont les applications lipschitziennes, et $\mu \neq 0$ permet d'avoir de telles applications (non continues) d'un espace continu vers un espace discret (ou l'inverse).

Une origine de ces applications : les "pseudo-isométries" dans le théorème de rigidité de Mostow [7] (un isomorphisme entre $\pi_1$ de deux $n$-variétés hyperboliques compactes induit une quasi-isométrie de $\mathbb{H}^n$ dans $\mathbb{H}^n$).

Une telle application se prolonge au bord de $\mathbb{H}^n$ en une application continue (en fait un homéomorphisme). Cela résulte du fait suivant : une quasi-isométrie transforme une géodésique en une quasi-géodésique, et dans $\mathbb{H}^n$ (plus généralement dans tout espace métrique hyperbolique) une quasi-géodésique est à distance de Hausdorff bornée d'une géodésique. Le dessin suivant conclut :




$\ell$ grand $\Longrightarrow$ $L$ grand

De telles applications n'agissent plus conformément au bord, mais :

Proposition. — *Une quasi-isométrie de $\mathbb{H}^n$ agit au bord par un homéomorphisme quasi-conforme.*

Qu'est-ce qu'un homéomorphisme quasi-conforme ? La théorie classique (voir [8], [9], [10], [11]) définit les homéomorphismes quasi-conformes de $\overline{\mathbb{R}}^n$, cela se généralisant à des espaces métriques plus généraux (voir [1], [12], [13], [14]).

Un difféomorphisme $f$ entre domaines de $\overline{\mathbb{R}}^n$ est $K$-quasi-conforme en $x$ si pour tous vecteurs tangents unitaires $u$, $v$ en $x$,

$$\frac{1}{K} \leq \frac{\|Df_x(u)\|}{\|Df_x(v)\|} \leq K .$$

(autrement dit $Df$ envoie des sphères sur des ellipsoïdes d'"excentricité" - module - bornée).

La définition $C^1$ se généralise naturellement au cadre $C^0$ : un homéomorphisme $f$ entre domaines de $\overline{\mathbb{R}}^n$ est $K$-quasi-conforme en $x$ si

$$(1 \leq) \limsup_{r \to 0} \frac{\sup_{y/d(x,y)=r}\{d(f(x), f(y))\}}{\inf_{y/d(x,y)=r}\{d(f(x), f(y))\}} \leq K$$

(ou $< +\infty$ pour $f$ quasi-conforme).

Cette définition est équivalente (voir [10] § 34, [15] § 18) aux définitions "analytiques" par les modules de courbes pour des applications de $\overline{\mathbb{R}}^n$ (voir [14]). De plus un tel homéomorphisme quasi-conforme est différentiable presque partout et sa différentielle vérifie l'inégalité de quasi-conformité (Mori [16], voir aussi [10] § 32, [9], [11] et [15] ; notons qu'il faut supposer l'homéomorphisme absolument continu sur les lignes pour avoir la réciproque). Rappelons enfin qu'un homéomorphisme $K$-quasi-conforme est $1/K$-Hölder (voir [17] p.383).

Le théorème de Liouville se généralise alors au cadre $C^0$ :

Théorème (Gehring [17]). — *Une application 1-quasi-conforme entre deux domaines de $\mathbb{R}^k$ pour $k \geq 3$ est la restriction d'une application de Möbius.*

En fait, il est facile de montrer qu'en dimension 2 une application 1-quasi-conforme est conforme (voir [8], [9]), et Mostow donne une preuve élémentaire (voir [15] § 12) du résultat de Gehring pour les homéomorphismes des sphères (ce qui suffit au théorème de rigidité) de dimension 2 et plus : pour tout $n \geq 2$, un homéomorphisme 1-quasi-conforme de $\overline{\mathbb{R}}^n$ sur $\overline{\mathbb{R}}^n$ est une application de Möbius.

**2. Des espaces métriques.** — Si au lieu d'étudier $\mathbb{H}^n$, on considère une variété riemannienne simplement connexe à courbure $\leq 0$ (resp. un espace métrique hyperbolique). Son bord est alors topologiquement une sphère $\mathbb{S}^{n-1}$ (resp. n'importe quel compact métrisable), mais plus question d'avoir une structure différentiable naturelle.

Comme dans l'exemple précédent, on peut noter qu'une distance suffit à définir une notion de quasi-conformité (en fait, la distorsion se mesurant comme le module d'un anneau et un anneau étant la réunion de deux sphères, la donnée d'une "structure conforme" serait la donnée de familles de "sphères" abstraites auxquelles sont attachées un rayon ; voir [1], [13] et plus loin). Or ces espaces métriques (les bords) ne portent pas de distances naturelles, mais des familles de distances deux à deux quasi-conformes.

Avant d'expliciter ces structures, rappelons quelques définitions de quasi-conformité dans un espace métrique (voir [1], [12], [3], [14], [18]) :

Définition. — *Dans un espace métrique $(X, d)$, on appelle $k$-anneau toute partie de la forme $B_d(x, kr) - B_d(x, r)$ où $B_d(x, r)$ désigne la boule de rayon $r$ de centre $x$.*

Définition. — *Sur $X$ compact, deux distances $d_1, d_2$ sont quasi-conformes si $\exists\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ (qu'on peut supposer croissante) telle que tout $k$-anneau de $d_1$ est inclus dans un $\varphi(k)$-anneau de $d_2$, et réciproquement.*

*Un homéomorphisme $f$ de $(E, d)$ sur $(E', d')$ est quasi-conforme si $f^* d'$ et $d$ sont quasi-conformes.*

*Nota.* — En emboîtant des 2-anneaux dans un $k$-anneau, on peut remplacer $\varphi(k)$ par $(2k)^{\frac{\ln\varphi(2)}{\ln 2}}$, *i.e.* remplacer la fonction $\varphi$ par une application de la forme $t \to Ct^\alpha$. On "retrouve" ainsi la définition de quasi-conformité par les modules d'anneaux : si on note $\mathrm{mod}(k - \text{anneau}) = \log k$,

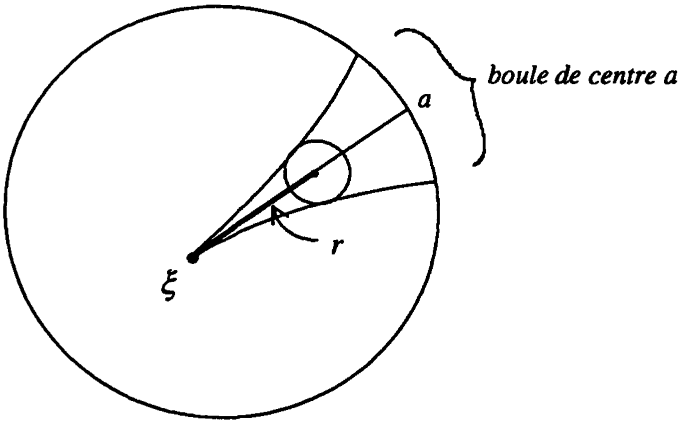
$$f \text{ est } K\text{-quasi-conforme} \iff \forall A \text{ anneau}\,,\ \frac{1}{K}\,\mathrm{mod}\,A \leq \mathrm{mod}\,f(A) \leq K\,\mathrm{mod}\,A\,.$$

Enfin notons que cette définition "locale" (utilisée dans [1], [12], [3]) implique la définition précédente "infinitésimale" (par la limite supérieure), la réciproque étant vraie dans $\overline{\mathbb{R}}^n$ et plus généralement dans les groupes de Carnot (voir [14]).

## II. Structures quasiconformes sur le bord

**a. Ombres portées.** — Pour commencer, ce qui n'est pas vraiment une distance mais une famille de "boules" : ombres portées au bord (voir [1], [13]) d'une variété $M$ à courbure $\leq 0$ (ou d'un espace métrique hyperbolique). On fixe $\xi \in M$, $R > 0$ et $\epsilon > 0$.

Pour $r > 0$, $a \in \partial M$, on appellera boule de rayon $e^{-\epsilon r}$ de centre $a$ l'ensemble des extrémités des rayons géodésiques issus de $\xi$ rencontrant la sphère de rayon $R$ centrée au point à distance $r$ de $\xi$ sur le (un) rayon géodésique issu de $\xi$ d'extrémité $a$.



THÉORÈME (voir [1], [13]). — *Si la courbure est strictement négative pincée, la structure conforme ainsi définie ne dépend ni de $\xi$ ni de $R$.*

*Preuve.* — Critère de Rauch-Alexandrov-Toponogov.

*Nota.* — Cette structure conforme dépend (de manière Hölder) du choix de $\epsilon$.

**b. Distances visuelles.** — Soit $M$ une variété à courbure $< 0$ (resp. un espace métrique hyperbolique). Si $a, b \in \partial M$, notons $r(a,b)$ la distance de $\xi$ à la (resp. une) géodésique joignant $a$ et $b$ (qui existe toujours ; ces espaces sont dits "visuels", voir [19]).

Pour $\epsilon > 0$, la quantité $\delta_\epsilon(a,b) = e^{-\epsilon r(a,b)}$ définit presque une distance sur le bord, mais l'inégalité triangulaire n'est pas nécessairement vérifiée.

DÉFINITION (à une légère modification près, voir [20], [21]). — *Sur $\partial M$, on dit que $d$ est visuelle de paramètre $\epsilon$ si $\exists C$ t.q. $\forall a, b$, $\frac{1}{C} e^{-\epsilon r(a,b)} \leq d(a,b) \leq C e^{-\epsilon r(a,b)}$.*

*Nota.*

– La définition ne dépend pas de $\xi$.

– La classe de quasi-conformité de ces métriques dépend du choix de $\epsilon$ : elles sont Hölder comparables (voir [21]).

*Exemples.*

*1.* — Sur le bord de l'espace hyperbolique à courbure constante $-K^2$, on vérifie facilement que la distance angulaire à partir d'un point base donné est une distance visuelle de paramètre $K$.

*2.* — M. Gromov ([22], voir [23]) montre que dans un espace métrique hyperbolique $M$ quelconque, pour $\epsilon$ assez petit ($-\epsilon^2$ mesurant la "courbure" de $M$), l'écart $d_\epsilon(a,b) = \inf_{n, x_1, \ldots, x_n} \Big(\delta_\epsilon(a, x_1) + \cdots + \delta_\epsilon(x_n, b)\Big)$ définit une distance sur $\partial M$ (distance par chaîne associée à $\delta_\epsilon$). La distance $d_\epsilon$ de Gromov est une distance visuelle de paramètre $\epsilon$.

*3.* — La définition précédente n'a pas de sens pour des variétés à courbure $\leq 0$. Néanmoins Gromov définit au bord de tels espaces une distance angulaire de la manière suivante (voir [24] § I.4): si $a, b \in \partial M$, notons $<_x (a,b)$ l'angle sous lequel on voit $a$ et $b$ d'un point $x \in M$, et $<(a,b) = \inf_{x \in M} <_x (a,b)$. Si une géodésique joint $a$ et $b$, cet angle vaut $\pi$. Si l'angle est strictement inférieur à $\pi$, $a$ et $b$ sont au bord d'un secteur plat de $M$. Cet angle définit une distance sur le bord de $M$ (notons que cette distance est visuelle de paramètre 0), et la distance de longueur associée à cet angle est appelée la distance de Tits sur $\partial M$ (par analogie avec les espaces symétriques). Une autre façon de définir cette métrique visuelle consiste à utiliser le critère de comparaison de Rauch-Alexandrov-Toponogov. En effet si $M$ est (plus généralement) un espace CAT(0), définissons les angles d'un triangle géodésique de $M$ comme les angles du triangle de comparaison du plan euclidien. On peut alors définir pour deux points $a$ et $b$ du bord l'angle vu d'un point $x$ de $M$ comme le *sup* des angles en $x$ des triangles de comparaison formés sur $x$ et deux points des géodésiques joignant $x$ à $a$ et $x$ à $b$ (cet angle est clairement $\pi$ si $x$ est dans un plan totalement géodésique à courbure négative majorée et $a$ et $b$ sur le bord de ce plan). Dans le cas des variétés à courbure $\leq 0$, on retrouve la distance de Tits en remplaçant $<_x (a, b)$ par cet angle. Dans [21] § 2.5, M. Bourdon utilise les angles de comparaison avec l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^2$ à courbure $-1$ pour définir une distance visuelle sur le bord des espaces CAT(-1).

On a alors le même résultat que précédemment :

Proposition. — *Une quasi-isométrie d'un espace hyperbolique agit au bord par un homéomorphisme quasi-conforme pour toute distance visuelle.*

Notons qu'une fois encore, la structure quasi-conforme dépend du choix de $\epsilon$ (le choix $\epsilon = 1$ étant "naturel" dans un espace CAT(-1)).

c. — M. Bourdon montre dans [3] p.12 que pour un même $\epsilon$, les structures quasiconformes des ombres et d'une distance visuelle sont équivalentes.

## III. Dimension conforme

Suivant P. Pansu, on va maintenant définir un invariant des structures quasiconformes.

**a. Mesures et dimension de Hausdorff.**

Soit $(E, d)$ un espace métrique compact.

Rappelons que la mesure de Hausdorff $d$-dimensionnelle de $E$ est définie par :

$$m_d(E) = \sup_{r>0} \left( \inf_{\substack{B_1 \cdots B_n \text{ boules de rayons } r \\ E = B_1 \cup \cdots \cup B_n}} \sum_i (\operatorname{diam} B_i)^d \right)$$

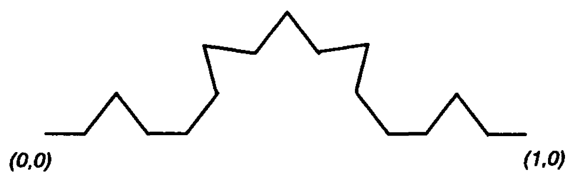
et que la dimension de Hausdorff $\dim_{\mathrm{Haus}}(E)$ est $\sup\{\alpha / m_\alpha(E) = +\infty\}$. Cette dimension est un invariant conforme (voir [9], [10]), mais non quasi-conforme comme nous allons voir sur l'exemple suivant.

*Un exemple classique.* En 1973, Gehring et Palka [25] posent la question suivante : un groupe (discret) d'homéomorphismes uniformément quasi-conformes de $\mathbb{R}^n$ (ou de $\overline{\mathbb{R}}^n$) est-il nécessairement conjugué par un homéomorphisme quasi-conforme à un sous-groupe du groupe de Möbius?

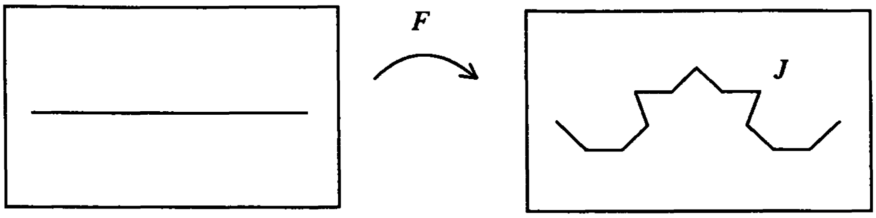
Pour $n = 2$, la réponse est affirmative (Sullivan [26] et Tukia [27]). Cela provient des faits suivants : une application quasi-conforme du plan est caractérisée par la donnée de sa dilatation complexe (quotient de ses dérivées complexes), nombre complexe défini en presque tout point du plan et mesurant la distorsion de l'application (voir [9], [28]). Or chercher un homéomorphisme conjugant un groupe $\Gamma$ quasi-conforme à un groupe conforme revient à chercher la donnée en presque tout point du plan d'une dilatation complexe invariante par le groupe $\Gamma$, qui agit sur les dilatations complexes par isométries de $\mathbb{H}^2$ (voir [27]). Ainsi si on prend pour dilatation complexe en chaque point de $\overline{\mathbb{C}}$ un "barycentre" (hyperbolique) des dilatations complexes des applications de $\Gamma$, l'application quasi-conforme correspondante convient.

Pour $n \geq 3$, la réponse est négative, avec un contre-exemple de Tukia [29] (son groupe d'homéomorphismes quasi-conformes est isomorphe à $\mathbb{R}^2$. G. Martin [30] montre que ses sous-groupes discrets fournissent aussi des contre-exemples à la question).

L'exemple de Tukia repose sur la remarque suivante de S. Rickman. Considérons $J_0$ l'arc limite qu'on peut imaginer en voyant la figure suivante dans $\mathbb{R}^2$ :




La paramétrisation naturelle $f_0 : [0\ 1] \to J_0$ vérifie $f_0(4^i x) = 3^i f_0(x)$. Posons $J = \bigcup_i 3^i(J_0 \cup (-J_0))$, arc ouvert de $\mathbb{R}^2$ muni de la métrique induite. On définit $f : \mathbb{R} \to J$ par $f(\pm 4^i x) = \pm 3^i f_0(x)$. Cette application $f$ est mieux que quasiconforme : $\exists C$ tel que $\frac{1}{C}|x - y|^\alpha \leq d(f(x), f(y)) \leq C|x - y|^\alpha$ pour $\alpha = \frac{\log 3}{\log 4}$. Elle est donc quasi-symétrique et s'étend en un homéomorphisme $F$ quasi-conforme de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.



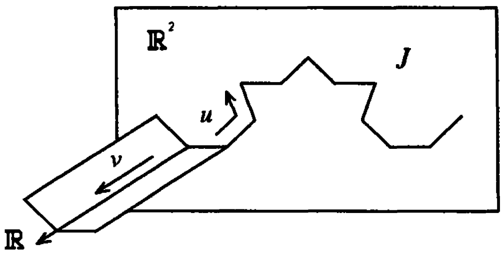

Notons ici que $\dim_{\text{Haus}}(\mathbb{R}) = 1$ et $\dim_{\text{Haus}}(J) = \frac{\log 4}{\log 3}$, et cela montre que la dimension de Hausdorff n'est pas invariante par application quasi-conforme.

Ainsi $J$ est localement quasi-conformément plat. Or Rickman a observé que $J \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ (plus généralement $J \times \mathbb{R}^{n-2}$ dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$) n'est pas localement quasi-conformément plat (on le montrera plus loin selon [1] ; voir aussi [29]). Notamment $F \times \mathrm{id} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ n'est pas un homéomorphisme quasi-conforme.

D'où l'exemple de Tukia : $\mathbb{R}^2$ agit sur $\mathbb{R}^3$ par les translations

$$T_{u,v} : x \to x + (u, 0, v).$$

Après conjugaison par $F \times \mathrm{id}$, $\mathbb{R}^2$ agit sur $\mathbb{R}^3$, par $(F \times \mathrm{id}) \circ T_{u,v} \circ (F \times \mathrm{id})^{-1}$.




Le résultat de Tukia est :

THÉORÈME (Tukia). — *Cette action de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^3$ est uniformément quasi-conforme (en fait lipschitzienne).*

Or l'orbite de tout point par cette action est isomorphe à $J \times \mathbb{R}$, donc aucune orbite n'est localement quasi-conformément plate. Mais l'action sur $\mathbb{R}^3$ d'un groupe isomorphe à $\mathbb{R}^2$ de transformations de Möbius doit laisser un point fixe ou posséder une orbite (conformément) plate (une sphère ou un espace affine), ce qui conclut.

**b. Module des familles de courbes.**

Rappelons l'invariant conforme classique qu'est le module des familles de courbes. Il est défini ainsi (voir [8], [9] § I.4, [10] § 6) : si $\Gamma$ est une famille de courbes de $\mathbb{R}^n$, son module est :

$$M(\Gamma) = \inf \int_{\mathbb{R}^n} \rho^n \, dv$$

où l'*inf* est pris sur les applications $\rho : \overline{\mathbb{R}}^n \to \mathbb{R}^+$ borélienne telle que $\int_\gamma \rho\, ds \geq 1$ pour toute courbe $\gamma \in \Gamma$ (une façon de dire est $M(\Gamma) = \inf \mathrm{vol}_g(\overline{\mathbb{R}}^n)$ où $g$ est une "métrique" conforme à la métrique plate, $g = \rho^2 ds^2$, telle que la longueur $\ell_g(\gamma) \geq 1$ pour tout $\gamma \in \Gamma$).

On vérifie alors que si $f : \overline{\mathbb{R}}^n \to \overline{\mathbb{R}}^n$ est conforme, $M(f(\Gamma)) = M(\Gamma)$.

Une définition classique d'homéomorphisme $K$-quasi-conforme de $\mathbb{R}^n$ est : une application $f$ telle que pour toute famille de courbes $\Gamma$,

$$\frac{1}{K} M(\Gamma) \leq M(f(\Gamma)) \leq K M(\Gamma).$$

Le premier exemple de calcul de module, classiquement rappelé, est celui d'un cylindre $S \times I$ de $\mathbb{R}^n$ ($S \subset \mathbb{R}^{n-1}$). Si $\Gamma$ est la famille des hauteurs $\{s\} \times I$, $s \in S$, on a :

$$M(\Gamma) = \frac{\mathrm{vol}(S)}{\ell(I)^{n-1}}.$$

En effet si $\rho$ est telle que $\int_{\{s\}\times I} \rho dh \geq 1, \forall s \in S$, on a par l'inégalité de Hölder :

$$1 \leq \left( \int_{\{s\}\times I} \rho\, dh \right)^n \leq \left( \int_{\{s\}\times I} dh \right)^{n-1} \left( \int_{\{s\}\times I} \rho^n\, dh \right) = \ell(I)^{n-1} \int_{\{s\}\times I} \rho^b\, dh.$$

D'où

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}(S) = \int_S ds &\leq \int_S \left( \ell(I)^{n-1} \int_{\{s\}\times I} \rho^n\, dh \right) ds \\ &= \ell(I)^{n-1} \int_S \int_{\{s\}\times I} \rho^n\, dh\, ds = \ell(I)^{n-1} \int_{S\times I} \rho^n\, dv \end{aligned}$$

donc

$$M(\Gamma) \geq \frac{\mathrm{vol}(S)}{\ell(I)^{n-1}}$$

et l'égalité est obtenue en faisant $\rho = \frac{1}{\ell(I)}$.

**c. Dimension conforme.**

Le but est de passer du cadre riemannien au cadre métrique (ou plus généralement à un cadre où une structure conforme peut être définie).

P. Pansu généralise la définition de module et celle de mesure de Hausdorff (rappelons que la mesure de Hausdorff 1-dimensionnelle d'une courbe est sa longueur) en une notion de module grossier, dépendant d'un paramètre. Le paramètre critique de ces modules est appelé dimension conforme. Optons ici (comme dans [3]) pour la définition suivante dans un espace métrique :

DÉFINITION. — *Si $(X, d)$ est un espace métrique, on appelle dimension conforme de $X$ :*

$$\dim_{\mathrm{Conf}}(X) = \inf \dim_{\mathrm{Haus}}(X, d')$$

*où l'inf est pris sur les distances $d'$ quasi-conforme à $d$ sur $X$.*

Comme la dimension topologique d'un espace est toujours inférieure à sa dimension de Hausdorff, on a :

$$\dim_{\text{top}} \leq \dim_{\text{Conf}} \leq \dim_{\text{Haus}} .$$

Le lemme suivant permet de minorer la dimension conforme, et parfois de la calculer. Nous donnons l'énoncé de Bourdon [3], inspiré de ceux de Pansu (voir [1] et [12]).

LEMME. — *Soit $(E, d)$ un espace métrique compact. Supposons qu'il existe*

*a) une famille de courbes $\Gamma = \{\gamma_i,\ i \in I\}$ de $E$ dont les diamètres sont uniformément minorés.*

*b) une mesure $\mu$ sur $\Gamma$ et des constantes $A$, $\alpha$ telles que pour toute boule $B$ de rayon $r$ de $E$ :*

$$\mu\big(\{\gamma \in \Gamma / \gamma \cap B \neq \emptyset\}\big) \leq A r^{\alpha}.$$

*Alors si $\tau$ est la dimension de packing de $E$, on a :*

$$\dim_{\text{Conf}}(E) \geq \frac{\tau}{\tau - \alpha} .$$

La minoration rappelée au paragraphe précédent dans le calcul du module d'un cylindre de $\mathbb{R}^n$ donne (voir [1]) un avant-goût de la preuve de ce lemme (la famille $\Gamma$ y remplace la famille des hauteurs, et la mesure transverse la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^{n-1}$).

Ce lemme est utilisé par Pansu dans [1] pour calculer la dimension conforme du bord des espaces symétriques de rang 1 : le bord de l'espace symétrique de dimension $n$ sur le corps $\mathbb{K}$ est de dimension conforme $nk + k - 2$ où $k$ est la dimension réel du corps $\mathbb{K}$ (la dimension conforme du bord vaut donc sa dimension topologique plus $k-1$ ; elle est atteinte par la dimension de Hausdorff de sa métrique de Carnot-Carathéodory). Cela permet en particulier d'éliminer la possibilité de quasi-isométrie entre certains de ces espaces.

Nous terminons par deux autres exemples d'applications :

*Exemple 1. $\dim_{\text{Conf}}(J \times \mathbb{R}) = 1 + \frac{\log 4}{\log 3}$ (voir [1]).*

Si $\Gamma = \big\{\{j\} \times \mathbb{R}\big\}$, on prend pour $\mu$ la mesure induite par la $\frac{\log 4}{\log 3}$-mesure de Hausdorff sur $J$. Elle vérifie les propriétés du lemme pour $\alpha = \frac{\log 4}{\log 3}$. Par ailleurs

$$\begin{aligned}\dim_{\text{Haus}}(J \times \mathbb{R}) &= 1 + \frac{\log 4}{\log 3} \\ &= \dim_{\text{Pack}}(J \times \mathbb{R}) .\end{aligned}$$

Le lemme donne $\dim_{\mathrm{Conf}}(J \times \mathbb{R}) \geq \frac{\log 4}{\log 3} + 1$, d'où l'égalité. On a ainsi montré que $J \times \mathbb{R}$ n'est pas quasi-conformément plat.

On a en fait le résultat plus général suivant (voir [1]): si $J$ est une courbe de $\mathbb{R}^2$ de dimension de Hausdorff $d > 1$, alors la dimension conforme de $J \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ est $d + 1$.

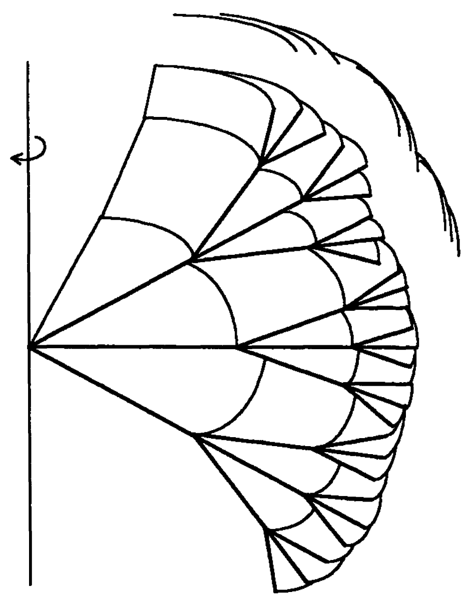
*Exemple 2. Les polyèdres de Gromov (voir [2], [3]).*

M. Gromov a défini dans [31] des polyèdres métriques $X(p, q)$ de dimension 2, comme exemples d'espaces métriques hyperboliques. Ses 2-cellules sont des $p$-gones réguliers du plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$, collés le long de leurs arêtes de sorte que le "link" en chaque sommet soit le 1-squelette d'un cube de dimension $q$. D'après W. Ballman et M. Brin [32], N. Benakli [33] et F. Haglund [34], si cela ne caractérise pas un unique polyèdre, le plus "régulier" d'entre eux, noté $X(p, q)$, a un groupe d'automorphisme cocompact et est hyperbolique, et même CAT$(-1)$, si $q \geq 6$. N. Benakli [33] a montré que le bord de $X(p, q)$ est topologiquement une courbe de Menger. M. Gromov a donné une idée de preuve dans [2], montrée dans [3], que l'on a :

$$\dim_{\mathrm{Conf}} \partial X(p, q) \geq \frac{1}{2} \frac{\log(q-1) + \log p}{\log p}.$$

En particulier, cela montre qu'il y a une infinité de polyèdres $X(p, q)$ non deux à deux quasi-isométriques (quand $q$ tend vers $+\infty$).

L'idée est d'appliquer le lemme précédent à la famille de demi-cercles formant le bord d'un "arbre tournant", espace topologiquement obtenu en faisant tourner un arbre $q$-régulier d'un demi-tour autour d'un axe contenant le point base de l'arbre.



Le complexe $X(p,q)$ contient un arbre tournant plongé, muni d'une structure induite de polyèdre CAT(-1) (dont les 2-cellules sont des $p$-gones réguliers de $\mathbb{H}^2$), de telle sorte que le plongement est quasi-isométrique. La dimension conforme de $\partial X(p,q)$ est alors au moins celle du bord de l'arbre tournant, qu'on peut minorer par le lemme.

## Bibliographie


[1] PANSU P. — *Dimension conforme et sphère à l'infini des variétés à courbure négative*, Ann. Acad. Sc. Fennicae, Ser. A **14** (1989), 177–212.

[2] GROMOV M. — *Asymptotic invariants of infinite groups*, Lond. Math. Soc. Lecture Notes 182, Cambridge, 1993.

[3] BOURDON M. — *Au bord de certains polyèdres hyperboliques*, Ann. de l'Institut Fourier **45** (1995), 119–141.

[4] LIOUVILLE J. — *Extension au cas des 3 dimensions de la question du tracé géographique, Application de l'analyse à la géométrie*, G. Monge, Paris (1850), 609–616.

[5] NEVANLINNA R. — *On differentiable mappings*, Analytic functions, ed. L. Ahlfors et al., Princeton University Press (1960), 3–9.

[6] HARTMAN P. — *On isometries and on a theorem of Liouville*, Math. Z. **69** (1958), 202–210.

[7] MOSTOW D. — *Strong rigidity of locally symmetric spaces*, Annals of Math. Studies, Princeton University Press, 1973.

[8] AHLFORS L. — *On quasiconformal mappings*, J. Analyse Math. **3** (1954), 1-58.

[9] LEHTO O., VIRTANEN K.I. — *Quasiconformal mapping in the plane*, Springer-Verlag, Berlin, 1973.

[10] VÄISÄLÄ J. — *Lectures on $n$-dimensional quasiconformal mappings*, Lecture Notes in Math. **229**, 1971.

[11] VÄISÄLÄ J. — *On quasiconformal mappings in space*, Ann. Acad. Sci. Fenn. A I **298** (1961), 1–36.

[12] PANSU P. — *Métriques de Carnot-Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un*, Ann. of Math. **129** (1989), 1-60.

[13] GROMOV M., PANSU P. — *Rigidity of lattices, dans Geometric Topology: recent developments*, Lecture Notes in Math. 1504, Springer Verlag, Berlin, 1991.

[14] HEINONEN J., KOSKELA P. — *Definitions of quasiconformality*, Inv. Math. **120** (1995), 61-79.

[15] MOSTOW D. — *Quasi-conformal mappings in $n$-space and the rigidity of hyperbolic space forms*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 34 (1968), 53–104.

[16] MORI A. — *On quasiconformality and pseudo-analyticity*, Trans. Am. Math. Soc. **84** (1957), 56–77.

[17] GEHRING F.W. — *Rings and quasiconformal mappings in space*, Trans. Am. Math. Soc. **103** (1962), 353–393.

[18] PAULIN F. — *Un groupe hyperbolique est déterminé par son bord*, à paraître dans J. of Lon. Math. Soc., 1995.

[19] EBERLEIN P., O'NEILL B. — *Visibility manifolds*, Pacific j. of Math. **46** (1973), 45–109.

[20] COORNAERT M., PAPADOPOULOS A. — *Symbolic dynamics and hyperbolic groups*, Lecture Notes in Math. 1539, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[21] BOURDON M. — *Action quasi-convexe d'un groupe hyperbolique*, Thèse de doctorat, Paris-Sud, 1993.

[22] GROMOV M. — *Hyperbolic groups, in Essays in group theory*, MSRI publ. **8**, Springer (1987), 75–263.

[23] GHYS E., DE LA HARPE P. *eds.* — *Sur les groupes hyperboliques d'après M. Gromov*, Progress in Math. **83**, Birkhäuser, 1990.

[24] GROMOV M. — *Lectures on manifolds of nonpositive curvature*, Ballmann W., Gromov M., Schroeder V. eds., Progress in Math. 61, Birkhäuser, 1985.

[25] GEHRING F., PALKA B. — *Quasiconformally homogeneous domaines*, J. Analyse Math. **30** (1976), 172–199.

[26] SULLIVAN D. — *On the ergodic theory at infinity of an arbitrary discrete group of hyperbolic motions*, in Riemann surfaces and related topics, proceedings of the 1978 Stong Brook conference, I. Kaa et B. Maskit ed., Ann. of Math. Studies **97**, Princeton University Press (1981), 465–496.

[27] TUKIA P. — *On two dimensional quasiconformal groups*, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A **5** (1980), 73–78.

[28] LEHTO O. — *Quasiconformal homeomorphisms and Beltrami equations, in Discrete groups and automorphic functions*, W.J. Harvey ed., Academic Press, 1977, 121–142.

[29] TUKIA P. — *A quasiconformal group not isomorphic to a Möbius group*, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A **6** (1981), 149–160.

[30] MARTIN G. — *Discrete quasiconformal groups that are not quasiconformal conjugates of Möbius groups*, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A **11** (1986), 179–202.

[31] GROMOV. — *Infinite groups as geometric objects*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Varsovia (1983), 385–392.

[32] BALLMAN W., BRIN M. — *Polygonal complexes and combinatorial group theory*, Geom. Dedicata **50** (1994), 165–191.

[33] BENAKLI N. — *Polyèdres hyperboliques, passage du local au global*, Thèse de doctorat, Paris-Sud, 1992.

[34] HAGLUND F. — *Polyèdres de Gromov*, Thèse de doctorat, Lyon I, 1992.

[35] PAULIN F. — *de la géométrie et la dynamique des groupes discrets*, Thèse d'habilitation, Lyon , 1995.

Christophe CHAMPETIER
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
URA188 du CNRS
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)