SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

BRUNO SÉVENNEC

Multiplicité du spectre des surfaces : une approche topologique

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 12 (1993-1994), p. 29-36
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1993-1994__12__29_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
1993–1994 (29–36)

MULTIPLICITÉ DU SPECTRE DES SURFACES : UNE APPROCHE TOPOLOGIQUE

Bruno SÉVENNEC

Le problème abordé dans cet exposé est celui de majorer la multiplicité de la première valeur propre non nulle λ_1 du laplacien $-\Delta^h$ sur une surface riemannienne (X, h) (supposée C^∞, compacte, connexe et sans bord). Plus généralement, on se pose la même question pour un opérateur de Schrödinger $H = -\Delta^h + v$, $v \in C^\infty(X, \mathbf{R})$, de spectre $\lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ (où les valeurs propres sont répétées selon leur multiplicité). On pourrait aussi bien considérer un opérateur différentiel P d'ordre 2 réel autoadjoint elliptique positif sur X, mais ce cas se ramène à celui d'un opérateur de Schrödinger.

On note $m_k = m_k(X, H)$ (ou $m_k(X, h)$ si $v = 0$) la multiplicité de la valeur propre λ_k, i.e $m_k(X, H) = \dim \ker(H - \lambda_k)$. Comme la notation adoptée ci-dessus pour le spectre le suggère, on a toujours $m_0 = 1$ (voir [Bér] par exemple). Après les travaux de S. Y. Cheng [Ch], G. Besson [Bes], Y. Colin de Verdière [Co1, Co2] et N. S. Nadirashvili [N], on dispose sur la quantité

$$\overline{m}_1(X) = \sup_H m_1(X, H)$$

des résultats suivants

THÉORÈME 1 ([Ch, Bes, Co1, Co2, N]). — *Pour les surfaces X de caractéristique d'Euler $\chi(X) \geq 0$, à savoir $\mathbf{S}^2, \mathbf{P}^2, \mathbf{T}^2, \mathbf{K}^2$, $\overline{m}_1(X)$ vaut* $\mathrm{chr}(X) - 1$, *soit respectivement* 3, 5, 6, 5; *si $\chi(X) < 0$, on a*

$$\mathrm{chr}(X) - 1 \leq \overline{m}_1(X) \leq 5 - 2\chi(X),$$

où $\mathrm{chr}(X)$ *est le* nombre chromatique *de X [R], plus grand entier n tel que le graphe complet à n sommets K_n se plonge dans X. D'après Ringel et Youngs [R] on a* $\mathrm{chr}(X) = \lfloor \frac{1}{2}(7 + \sqrt{49 - 24\chi(X)}) \rfloor$, *sauf pour la bouteille de Klein, pour laquelle* $\mathrm{chr}(\mathbf{K}^2) = 6$.

Classification A.M.S. : 58 G 30

Y. Colin de Verdière a montré qu'en dimension ≥ 3, on ne peut espérer borner $m_1(X,h)$ indépendamment de h. Plus précisément, si $\dim X \geq 3$, n'importe quelle suite finie $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_N$ apparaît comme début du spectre de $-\Delta^h$ pour une métrique h convenable sur X [Co2].

Revenant au cas des surfaces envisagé ici, on ne sait pas si la borne inférieure $\overline{m}_1(X) \geq \mathrm{chr}(X) - 1$ obtenue dans [Co2] est atteinte par un *laplacien* (i.e. pour un potentiel $v = 0$) lorsque $\chi(X) < 0$. Une minoration de $\sup_h m_1(x,h)$ pour les surfaces orientables de genre ≥ 3 est donnée dans [CoCo].

La coïncidence de $\overline{m}_1(X)$ avec $\mathrm{chr}(X) - 1$ si $\chi(X) \geq 0$ amène naturellement à poser (suivant Y. Colin de Verdière [Co2]) la

CONJECTURE. — $\forall X, \quad \overline{m}_1(X) = \mathrm{chr}(X) - 1.$

Noter que la majoration du théorème 1 est *linéaire* en $|\chi(X)|$, alors que $\mathrm{chr}(X) = O(\sqrt{|\chi(X)|})$... Pour les premières valeurs négatives de la caractéristique, le tableau suivant fournit les valeurs concernées

$\chi(X)$	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8
$\mathrm{chr}(X) - 1$	6	7	8	8	9	9	9	10
$5 - 2\chi(X)$	7	9	11	13	15	17	19	21

Rappelons que toute surface (compacte connexe sans bord) est somme connexe de copies de $\mathbf{T}^2$ ou $\mathbf{P}^2$, avec la relation $\sharp 3\mathbf{P}^2 = \mathbf{T}^2 \sharp \mathbf{P}^2$. Enfin pour chaque valeur $\chi < 2$ de la caractéristique, il y a une seule surface (non orientable) si χ est impaire, et deux surfaces (l'une orientable, l'autre non) si χ est paire. Par exemple, $\sharp 2\mathbf{P}^2$ est la bouteille de Klein $\mathbf{K}^2$ ($\chi(\mathbf{T}^2) = \chi(\mathbf{K}^2) = 0$), et $\chi = -1$ correspond à la surface $\sharp 3\mathbf{P}^2 = \mathbf{T}^2 \sharp \mathbf{P}^2$.

Si $u \in \ker(H - \lambda_k)$ ($u \neq 0$) est une fonction propre de H, deux résultats classiques décrivent la structure des "ensembles nodaux" $u^{-1}(0)$.

THÉORÈME DE COURANT ([CH, p. 452], voir [Bér, p. 37]). — *Le complémentaire $X \setminus u^{-1}(0)$ de l'ensemble nodal a au plus $k+1$ composantes connexes; en particulier si $k = 1$, $X \setminus u^{-1}(0)$ a exactement 2 composantes connexes.*

THÉORÈME DE CARLEMAN ([Ca], voir [J, p. 35]). — *Les zéros de u sont d'ordre fini, i.e. si $u(x) = 0$, il existe un entier r tel que le jet $j^r u(x)$ de u en x soit non nul. Ceci entraîne que, dans une coordonnée locale conforme $z : (X,x) \to (\mathbf{C}, 0)$, on a*

$$u = \mathrm{Im}(az^m) + O(|z|^{m+1}) \qquad (a \in \mathbf{C}^*,\ m \geq 1)$$

et qu'au voisinage de x, $u^{-1}(0)$ est réunion de m courbes C^∞ formant un système équiangulaire.

En particulier, $\Gamma = u^{-1}(0)$ est un graphe fini sans point isolé plongé dans X ("de façon C^∞"), dont toutes les valences sont *paires*, et qui est de plus muni d'une *orientation* *transverse* : u change de signe le long des arêtes, et il y a une orientation transverse privilégiée le long de celles-ci, de $\{u < 0\}$ vers $\{u > 0\}$. Noter que de façon générale, cette propriété force les valences à être paires. Ces graphes Γ n'ont pas nécessairement de point singulier et ne sont pas forcément connexes; ils sont considérés ici comme des espaces topologiques plutôt que comme des objets combinatoires. Puisqu'on s'intéresse à la valeur propre d'indice $k = 1$ on introduit la

DÉFINITION 2. — *Un graphe nodal sur X est un graphe fini Γ plongé dans X, transversalement orientable, tel que $X \setminus \Gamma$ ait deux composantes connexes dont Γ est la frontière commune (i.e. tout point de Γ est adhérent aux deux composantes de $X \setminus \Gamma$). Enfin, on définit de façon évidente la notion de graphe nodal transversalement orienté sur X.*

L'approche proposée ici, suivant une suggestion d'Y. Colin de Verdière, consiste à essayer de majorer $m_1 = \dim V_1 = \dim \ker(H - \lambda_1)$ en ne retenant que le fait que pour toute fonction $u \in V_1 \setminus 0$, $u^{-1}(0)$ est un graphe nodal sur X.

La différence principale avec les approches antérieures (qui utilisaient aussi l'étude des ensembles nodaux) est l'introduction de l'espace $\mathcal{G}(X)$ des graphes nodaux sur X et de son revêtement double naturel $\widetilde{\mathcal{G}}(X)$, espace des graphes nodaux transversalement orientés sur X. On ne précise pas pour l'instant la topologie sur $\mathcal{G}(X)$ (ou $\widetilde{\mathcal{G}}(X)$), ni la régularité des graphes nodaux, leur demandant seulement de rendre continue l'application naturelle $u \mapsto u^{-1}(0)$ de $\mathrm{S}(V_1) = (V_1 \setminus 0)/\mathbf{R}_+^*$ dans $\widetilde{\mathcal{G}}(X)$. Par exemple la topologie de Hausdorff (associée à la distance du même nom) vérifie cette condition, comme on le voit aisément.

EXEMPLE. — Les éléments de $\mathcal{G}(\mathrm{S}^2)$ sont les courbes de Jordan dans S^2. En effet si $\Gamma \in \mathcal{G}(\mathrm{S}^2)$, et $\mathrm{S}^2 \setminus \Gamma = U_+ \cup U_-$ (avec $U_\pm$ connexes, donc $\chi(U_\pm) \leq 1$),

$$\chi(\mathrm{S}^2) = 2 = \chi(\Gamma) + \chi(U_+) + \chi(U_-) \leq \chi(\Gamma) + 2.$$

Mais on a toujours $\chi(\Gamma) \leq 0$ pour un graphe nodal (les valences sont ≥ 2), avec égalité si et seulement si chaque composante de Γ est un topologiquement cercle. La conclusion en résulte aisément.

Le premier résultat (encourageant !) obtenu par cette approche est le

THÉORÈME 3. — *Si on munit l'espace $\mathcal{G}(\mathrm{S}^2)$ des courbes de Jordan sur S^2 de la topologie de Hausdorff, il existe une application continue $\mathbf{Z}_2$-équivariante $r : \widetilde{\mathcal{G}}(\mathrm{S}^2) \to \mathrm{S}^2$, S^2 étant munie de l'action antipodale.*

COMPLÉMENT. — En fait, on peut prendre pour r une rétraction par déformation $\mathbf{Z}_2$-équivariante, S^2 étant naturellement plongé (de façon équivariante) dans $\widetilde{\mathcal{G}}(\mathrm{S}^2)$ comme sous-espace des grands cercles orientés. Autrement dit, r est homotope à id parmi les applications $\mathbf{Z}_2$-équivariantes de $\widetilde{\mathcal{G}}(\mathrm{S}^2)$ dans lui-même. Du point de vue homotopique, $\widetilde{\mathcal{G}}(\mathrm{S}^2)$ muni de son action de $\mathbf{Z}_2$ est donc équivalent à $(\mathrm{S}^2, \text{antipodie})$.

COROLLAIRE 4. — *Si V est un espace vectoriel de fonctions (continues) sur*

S^2 *tel que pour toute* $u \in V \setminus 0$, $u^{-1}(0)$ *est une courbe de Jordan le long de laquelle* u *change de signe, on a* $\dim V \leq 3$ *(en particulier on retrouve* $\overline{m}_1(\mathrm{S}^2) \leq 3$*).*

Démonstration du corollaire. On peut supposer $m = \dim V$ finie. Alors on a une application continue $\mathbf{Z}_2$-équivariante de S^{m-1} dans S^2 :

$$\mathrm{S}^{m-1} = \mathrm{S}(V) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{G}}(\mathrm{S}^2) \xrightarrow{r} \mathrm{S}^2.$$

Mais le théorème classique de Borsuk-Ulam (voir [M, p. 242]) dit qu'alors $m - 1 \leq 2$, cqfd !

Démonstration du théorème. Pour $\Gamma \in \widetilde{\mathcal{G}}(\mathrm{S}^2)$, une des deux composantes de $\mathrm{S}^2 \setminus \Gamma$ est privilégiée; on la note $U_+(\Gamma)$, et $U_-(\Gamma)$ est l'autre composante. Il suffit de montrer qu'il existe deux applications *continues* $x_\pm : \widetilde{\mathcal{G}}(\mathrm{S}^2) \to \mathrm{S}^2$ avec $x_\pm(\Gamma) \in U_\pm(\Gamma)$. En effet on obtient alors une application continue $\mathbf{Z}_2$-équivariante $\widetilde{\mathcal{G}}(\mathrm{S}^2) \to \mathrm{S}^2 \times \mathrm{S}^2 \setminus \Delta$ (l'action au but étant l'échange des deux facteurs), et il y a une application continue $\mathbf{Z}_2$-équivariante évidente $\mathrm{S}^2 \times \mathrm{S}^2 \setminus \Delta \to \mathrm{S}^2$. On est donc ramené à démontrer le

LEMME 5. — *Si* $\mathcal{U}$ *désigne l'espace des domaines de Jordan de* S^2 *muni de la topologie induite de celle de* $\mathcal{G}(\mathrm{S}^2)$ *via* $\mathcal{U} \ni U \mapsto \partial U \in \mathcal{G}(\mathrm{S}^2)$, *il existe une application* continue $c : \mathcal{U} \to \mathrm{S}^2$ *telle que pour tout* U, $c(U) \in U$.

Démonstration. Soit $\mathcal{U}_* \subset \mathcal{U} \times \mathrm{S}^2$ l'ensemble des couples (U, x) tels que $x \in U$. On le munit de la topologie produit, et on considère l'application continue

$$\begin{array}{rcl} p : \mathcal{U}_* & \longrightarrow & \mathcal{U} \\ (U, x) & \longmapsto & U \end{array}$$

dont il s'agit de trouver une section. Or, d'après [Do], tout fibré localement trivial à base paracompacte et fibre contractile possède une section. Comme $\mathcal{U}$ est métrisable et que les fibres de p sont homéomorphes au disque unité ouvert $\mathbf{D} \subset \mathbf{C}$, on est ramené à prouver que

SOUS-LEMME. — p est une fibration localement triviale.

Démonstration. Soit $U_0 \in \mathcal{U}$, $x_0 \in U_0$, et $\xi_0 \subset T_{x_0}U_0$ une demi-droite tangente en x_0. Vu le choix de la topologie sur $\mathcal{U}$, si U est dans un voisinage $\mathcal{V}$ assez petit de U_0, on a $x_0 \in U$. Pour tout $U \in \mathcal{V}$, soit $f_U : (\mathbf{D}, 0) \to (U, x_0)$ l'unique application conforme telle que $f_U'(0) \in \xi_0$. Montrons alors que

$$\begin{array}{rcl} T : \mathcal{V} \times \mathbf{D} & \longrightarrow & p^{-1}(\mathcal{V}) \\ (U, z) & \longmapsto & (U, f_U(z)) \end{array}$$

est une trivialisation de p au-dessus de $\mathcal{V}$.

Tout d'abord, il est clair que T est bijective, d'inverse $T^{-1} : (U, x) \mapsto (U, f_U^{-1}(x))$. Ensuite, le théorème de convergence de Carathéodory [Du, p. 78] entraîne que $U \mapsto f_U^{\pm 1}$ est continue pour la topologie (au but) de la convergence uniforme sur tout compact. Plus précisément, si $U_n \ni x_0$ converge vers $U \ni x_0$ pour la "topologie des noyaux" (en particulier si $U_n \to U$ pour la topologie de $\mathcal{U}$), $f_{U_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f_U$ uniformément sur tout compact de $\mathbf{D}$ et $f_{U_n}^{-1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f_U^{-1}$ uniformément sur tout compact de U (ce qui a un sens, car si $K \subset U$ est compact, on a $K \subset U_n$ pour n assez grand). Ceci établit respectivement la continuité de T et de T^{-1}, en considérant par exemple dans le premier cas, pour une suite $(U_n, z_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (U, z) \in \mathcal{V} \times \mathbf{D}$, le compact $K = \{z_n\}_n \cup \{z\} \subset \mathbf{D}$. Ainsi T est un homéomorphisme, ce qui clôt la démonstration.

On ne démontrera pas ici le complément au théorème 3. Sa véracité est assez intuitive : on peut déformer les courbes de Jordan (transversalement) orientées sur les grands cercles (orientés) de $\mathbf{S}^2$, dont l'espace s'identifie à $\mathbf{S}^2$, l'antipodie correspondant au renversement de l'orientation d'un grand cercle. La difficulté technique est de le faire "canoniquement" (i.e. continûment par rapport à la courbe) et de façon $\mathbf{Z}_2$-équivariante. La démonstration utilise les mêmes outils que ci-dessus. Une démonstration "physique" utilisant une EDP d'évolution diminuant la courbure géodésique des courbes paramétrées dans $\mathbf{S}^2$ (par exemple) serait certainement plus satisfaisante.

Le "programme" est maintenant d'étendre ceci aux autres surfaces. Plusieurs obstacles se présentent :

(a) Trouver une "bonne topologie" sur $\mathcal{G}(X)$.

(b) Trouver un substitut au théorème de Borsuk-Ulam si $\widetilde{\mathcal{G}}(X)$ n'est pas homotopiquement une sphère (ce qui arrive malheureusement pour $\chi(X) \leq 0$).

(c) Caractériser, ou au moins contrôler la topologie globale de $\mathcal{G}(X)$ et $\widetilde{\mathcal{G}}(X)$.

On n'insistera pas ici sur le point (a), qui conduit à des développements techniques sans intérêt pour la compréhension. Qu'il suffise de dire que la topologie de Hausdorff ne semble pas assez fine lorsque $\mathcal{G}(X)$ contient des graphes "vrais", i.e. avec des points singuliers, ce qui est toujours le cas si $X \neq \mathbf{S}^2$.

Le point (b) est plus intéressant. Au revêtement double $\pi : \widetilde{\mathcal{G}}(X) \to \mathcal{G}(X)$ est associée naturellement une classe

$$\alpha = \alpha_\pi \in H^1(\mathcal{G}(X); \mathbf{Z}_2) \cong \mathrm{Hom}(\pi_1(\mathcal{G}(X)), \mathbf{Z}_2),$$

définie pour un lacet $\gamma : \mathbf{S}^1 \to \mathcal{G}(X)$ par $\alpha(\gamma) = 0$ si γ se relève en un lacet dans $\widetilde{\mathcal{G}}(X)$, et $\alpha(\gamma) = 1$ sinon. Cette classe (qu'on peut bien sûr définir pour tout revêtement double $\pi : \widetilde{Y} \to Y$) est un exemple trivial de classe caractéristique, i.e. possède la propriété de naturalité suivante : pour tout morphisme de revêtements doubles

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{Y_1} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \widetilde{Y_2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y_1 & \xrightarrow{f} & Y_2 \end{array}$$

on a $\alpha_1 = f^*\alpha_2$ (avec des notations évidentes). L'utilité de cette classe caractéristique dans le contexte présent apparaît via la structure multiplicative (cup-produit) sur la cohomologie $H^*(\mathcal{G}(X))$ (on omettra désormais les coefficients, toujours pris dans $\mathbf{Z}_2$) :

LEMME 6. — $\alpha^N = 0$ *entraîne* $\overline{m}_1(X) \leq N$.

Démonstration. C'est essentiellement la même que celle du théorème de Borsuk-Ulam qui figure par exemple dans [M]. Si $\tilde{f} : \mathbf{S}^{m-1} \to \widetilde{\mathcal{G}}(X)$ est continue, $\mathbf{Z}_2$-équivariante, et $f : \mathbf{P}^{m-1} \to \mathcal{G}(X)$ est son quotient, on a par naturalité $f^*(\alpha) = \eta$, classe caractéristique du revêtement double $\mathbf{S}^{m-1} \to \mathbf{P}^{m-1}$. C'est l'unique élément non nul de $H^1(\mathbf{P}^{m-1})$, et il engendre l'algèbre $H^*(\mathbf{P}^{m-1}) = \mathbf{Z}_2[\eta]$ (voir [M]). En particulier si $\alpha^N = 0$, on a aussi $\eta^N = 0$, d'où $N > m - 1$ et le lemme est démontré.

Ainsi, pour majorer $\overline{m}_1(X)$, on est amené à majorer l'ordre de nilpotence de α dans $H^*(\mathcal{G}(X))$. Notons que rien n'assure *a priori* que α soit nilpotente, puisque $\mathcal{G}(X)$ est de dimension infinie, et que même si $\alpha^N \neq 0$, il reste possible que $\overline{m}_1(X) \leq N$, la non-annulation de α^N n'étant pas forcément détectée par une classe "sphérique" $\mathbf{S}^N \to \mathbf{P}^N \to \mathcal{G}(X)$.

Le lemme élémentaire suivant permet d'aborder l'étude de l'ordre de nilpotence de α (point (c))

LEMME 7. — *Si* $Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_p$ *est un recouvrement* ouvert *de* Y *et* $\alpha \in H^1(Y)$ *vérifie* $\alpha^{n_i}|_{Y_i} = 0$, *alors* $\alpha^N = 0$ *avec* $N = \sum n_i$.

Notons que ce résultat n'est pas optimal lorsque les ouverts Y_i ont des intersections très simples, par exemple vides. Dans ce dernier cas on peut évidemment prendre $N = \sup n_i$...

Une remarque simple (mais qui sera importante pour la suite) est que la conclusion du lemme vaut encore lorsque le recouvrement $\{Y_i\}$ n'est pas nécessairement ouvert mais que chaque Y_i est (homologiquement) "épaississable" [1] dans Y, i.e. si $\lim_{U \supset Y_i} H^*(U) \to H^*(Y_i)$ est un isomorphisme (on ne se sert ici que de l'injectivité). La limite inductive est prise sur les voisinages U de Y_i dans Y. Cette propriété dépend en général de la cohomologie utilisée (singulière ou de Čech-Alexander-Spanier), mais est automatiquement vérifiée sous des hypothèses remarquablement générales (voir [S, chap. 6, sec. 9], [M, chap. IX, §6] et [M2, §8.4, 8.8]). Par exemple, si Y est métrisable, $A \subset Y$ et si Y, A sont *localement contractiles* [2], A est épaississable dans Y (pour la cohomologie singulière).

L'utilisation de ceci est alors la suivante : il y a pour les éléments de $\mathcal{G}(X)$ une notion naturelle de "codimension". La codimension d'un graphe nodal sans singularité

1. Traduction libre de l'adjectif *taut* ("tendu") utilisé dans [S, M].

2. C'est-à-dire si pour tout point $y \in Y$ et tout voisinage U de y, il y a un voisinage $V \subset U$ de y tel que l'injection $V \hookrightarrow U$ soit homotope (dans U) à $V \to \{y\}$.

("lisse") est 0. Celle d'un graphe ayant un seul point singulier, de valence 4 (resp. 6,8), est 1 (resp 3,5). On a plus généralement pour $\Gamma \in \mathcal{G}(X)$

$$\operatorname{cod}\Gamma = \sum_{x \in \operatorname{sing}\Gamma} (v_x - 3),$$

v_x désignant la valence du point singulier $x \in \operatorname{sing}\Gamma$. On a alors un résultat de finitude :

LEMME 8. — *Pour tout* $\Gamma \in \mathcal{G}(X), \operatorname{cod}\Gamma \leq \sup(0, 3 - 2\chi(X))$.

Démonstration. Comme $\chi(\Gamma) = \sum(1 - v_x/2)$, on a $\operatorname{cod}\Gamma = -2\chi(\Gamma) - |\operatorname{sing}\Gamma|$. Mais $\chi(X) \leq \chi(\Gamma) + 2$, donc si Γ est singulier $\operatorname{cod}\Gamma \leq 2(-\chi(X) + 2) - 1 = 3 - 2\chi(X)$, et sinon $\operatorname{cod}\Gamma = 0$.

En notant $\mathcal{G}_i(X) \subset \mathcal{G}(X)$ l'ensemble des graphes nodaux de codimension i, on obtient donc une décomposition de $\mathcal{G}(X)$ en un nombre *fini* de "strates". Or la topologie (non explicitée ici) sur $\mathcal{G}(X)$ est métrisable et $\mathcal{G}(X), \mathcal{G}_i(X)$ sont localement contractiles, de sorte que ces strates peuvent jouer le rôle des Y_i du lemme 7. Le résultat principal est alors

THÉORÈME 9. — *Si* $\chi(X) < 0$, *on a* $\alpha|_{\mathcal{G}_i(X)} = 0$.

On voit facilement que ceci revient à dire que si $\Gamma \in \mathcal{G}(X)$, il n'y a pas de lacet de base Γ constitué de graphes nodaux isotopes à Γ tel qu'au terme de l'isotopie, les deux composantes de $X \setminus \Gamma$ se trouvent échangées, ou encore que le revêtement double $\widetilde{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}$ est trivial au-dessus de $\mathcal{G}_i(X)$ (noter que ce résultat n'est pas valable si $\chi(X) \geq 0$). D'après les lemmes 7 et 8, on a donc amelioré (d'une unité) la majoration du théorème 1 :

COROLLAIRE 10. — *Si* $\chi(X) < 0, \overline{m}_1(X) \leq 4 - 2\chi(X)$. *En particulier, on a un nouvel exemple (pour* $\chi = -1$*) à l'appui de la conjecture d'Y. Colin de Verdière :*

$$\overline{m}_1(\mathbf{T}^2 \sharp \mathbf{P}^2) = 6 = \operatorname{chr}(\mathbf{T}^2 \sharp \mathbf{P}^2) - 1.$$

Bibliographie

[Bér] P. BÉRARD. *Analysis on riemannian manifolds and geometric applications : an introduction*, Monografias de Matematica No 42, IMPA, 1986.

[Bes] G. BESSON, *Sur la multiplicité de la première valeur propre des surfaces riemanniennes*, Ann. Inst. Fourier **30**,1 (1980). 109-128.

[Ca] T. CARLEMAN, *Sur les systèmes linéaires aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables*, C. R. Acad. Sc. **197** (1933), 471-474.

[Ch] S. Y. CHENG, *Eigenfunctions and nodal sets*, Commentarii Math. Helv. **51** (1976), 43-55.

[CoCo] B. COLBOIS, Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Sur la multiplicité de la première valeur propre d'une surface de Riemann à courbure constante*, Commentarii Math. Helv. **63** (1988), 194-208.

[Col] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Sur la multiplicité de la première valeur propre non nulle du laplacien*, Commentarii Math. Helv. **61** (1986), 254-270.

[Co2] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Construction de laplaciens dont une partie finie du spectre est donnée*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. **20** (1987), 599-615.

[CH] R. COURANT, D. HILBERT, *Methods of mathematical physics*, Vol 1, Wiley Interscience, 1953.

[Do] A. DOLD, *Partitions of unity in the theory of fibrations*, Annals of Math. **78**,2 (1963), 223-255.

[Du] P. L. DUREN, *Univalent functions*, Grundlehren 259, Springer Verlag, 1983.

[J] J. JOST, *Harmonic maps between surfaces*, Lect. Notes in Math. No 1062, Springer Verlag 1984.

[M] W. S. MASSEY, *Singular homology theory*, GTM 70, Springer Verlag 1980.

[M2] W. S. MASSEY, *Homology and cohomology theory*, Marcel Dekker, 1978.

[N] N. S. NADIRASHVILI, *Multiple eigenvalues of the Laplace operator*, Math. USSR Sbornik, **61**,1 (1988), 225-238.

[R] G. RINGEL, *Map color theorem*, Grundlehren 209, Springer Verlag, 1974.

[S] E. H. SPANIER, *Algebraic topology*, Mc Graw Hill, 1966.

Unité de Mathématiques Pures et Appliquées
de l'École Normale Supérieure de Lyon
U.M.R. 128 du C.N.R.S.

Bruno Sévennec
École Normale Supérieure de Lyon
46, Allée d'Italie
69364 LYON CEDEX 07
FRANCE