Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Yves Colin de Verdière

Le comportement asymptotique des fonctions propres du laplacien d'après Schnirelman et Zelditch

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 3 (1984-1985), exp. nº 1, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1984-1985__3__A1_0>

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Chambéry-Grenoble), 1984-1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

Séminaire de Théorie spectrale et Géométrie
CHAMBERY-GRENOBLE
1984-1985

LE COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES FONCTIONS PROPRES DU LAPLACIEN, D'APRES SCHNIRELMAN ET ZELDITCH

par Yves COLIN DE VERDIERE

Soient (M,g) une variété riemannienne compacte, Δ le laplacien de (M,g), (φ_k) $(k=0,1,2,\dots)$ une base orthonormée de $L^2(X,v_g)$ formée de fonctions propres de valeurs propres λ_k^2. Soit A un opérateur pseudo-différentiel classique (symbole ayant un développement asymptotique en somme de fonctions homogènes de degré $-j$, $p_A(x,\xi) \sim p_0(x,\xi) + \dots + p_j(x,\xi) + \dots$), on s'intéresse au comportement lorsque $k \to +\infty$ de la suite $b_k = \int_M A\varphi_k \cdot \overline{\varphi_k}\, v_g$. Plus précisément, si $a : T^*M\setminus 0 \to \mathbb{R}$ désigne le symbole principal de A, sous quelles conditions a-t-on

$$\lim_{k\to+\infty} \langle A\varphi_k | \varphi_k \rangle = \int_{S^*M} a\, d\omega$$

où $d\omega$ est la mesure volume sur S^*M normalisée par $\int d\omega = 1$ (mesure de Liouville) ?

La réponse est non en général, comme on peut le voir facilement si, par exemple, $M = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ muni de la métrique euclidienne $g = \Sigma\, dx_i^2$: si C_1 et C_2 désignent 2 cônes ouverts disjoints de $\mathbb{R}^n\setminus 0$ et a une fonction homogène de degré 0 sur $\mathbb{R}^n\setminus 0$ telle que $a\restriction_{C_1} \equiv 1$ et $a\restriction_{C_2} \equiv 0$.

Si A est l'opérateur $a\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ on a $A\left(e^{2\pi i\langle k,x\rangle}\right) = 0$ si $k \in C_1$ et $A\left(e^{2\pi i\langle k,x\rangle}\right) = 1$ si $k \in C_2$. On a seulement une convergence en moyenne :

$$\left(\sum_{|k|\le\lambda} \langle A\varphi_k, \varphi_k\rangle\right) \Big/ \#\{k \mid |k|\le\lambda\} \xrightarrow[|k|\to\infty]{} \frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|=1} a(\xi) .$$

On peut facilement généraliser ceci à la sphère S^2 équipée de sa métrique canonique en utilisant des opérateurs $a\left(\sqrt{+\Delta}, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$ où $\frac{\partial}{\partial\theta}$ est le générateur infinitésimal d'un groupe à un paramètre de rotations de S^2.

Soit $Y_{\ell,m}$ $\ell = 0,1,2,\dots$ et $-\ell \le m \le \ell$ $(m\in\mathbb{Z})$, l'harmonique sphérique de norme L^2 égale à 1 telle que :

$$\begin{cases} \Delta Y_{\ell,m} = \ell(\ell+1)Y_{\ell,m} \\ \frac{\partial}{\partial\theta} Y_{\ell,m} = im\, Y_{\ell,m} . \end{cases}$$

Considérons la suite $Y_{\ell,\ell} = c_\ell \cdot (x+iy)^\ell\big|_{S^2}$, alors les $Y_{\ell,\ell}$ se concentrent sur l'équateur de S^2 au sens que, si $\epsilon > 0$, alors la norme L^2 de $Y_{\ell,\ell}$ dans le complémentaire d'un voisinage B_ϵ de l'équation est à décroissance exponentielle en ℓ :

$$\|Y_{\ell,\ell}\|_{S^2, B_\epsilon} = 0(e^{-c(\epsilon)\ell}) .$$

Une autre manière de dire ceci est que si $f = \Sigma a_\ell Y_{\ell,\ell} \in L^2(S^2)$, alors $f \in C^\infty(S^2\setminus\Gamma)$ où Γ est l'équateur (propriété élémentaire des séries entières). La suite des $Y_{\ell,\ell}$ étant de densité 0, on peut la grossir de la façon suivante, soit C_a le cône de $\mathbb{R}^2$ d'équation

$$C_a = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\ge 0 ,\ ax \le y \le x\} \qquad (a<1)$$

et considérons les $Y_{\ell,m}$ tels que $(\ell+\frac{1}{2}, m) \in C_a$, alors les $Y_{\ell,m}$ se concentrent dans une région D de S^2 déterminée de la façon suivante :

si Θ est le symbole principal de $\frac{\partial}{\partial\theta}$, $D = \pi(F^{-1}(C_a))$ où $F : T^*X\backslash 0 \to \mathbb{R}^2$ est $F(x,\xi) = (|\xi|,\Theta)$ et $\pi : T^*S^2 \to S^2$ la projection canonique ([CV 2]). Cette suite est de densité arbitraire entre 0 et 1 pour choix convenanble de a .

Ce qui joue un rôle dans ces exemples est l'existence de régions de S^*M invariantes par le flot géodésique dans laquelle une suite de fonctions propres φ_{k_j} se concentrent au sens que nous avons étudié dans [CV 1] : à une suite de fonctions propres est associé dans cet article son microsupport, fermé de S^*X , invariant par le flot géodésique, tel que, si A est un opérateur pseudo-différentiel tel que WF(A) (Microsupport des φ_{k_i}) = ϕ , alors $\|A\varphi_{k_i}\|_{H^s(M)}$ est à décroissance rapide.

De plus, si nous définissons la densité D(S) d'une partie du spectre par

$$D(S) = \limsup_{\lambda\to\infty} \left\{ \frac{\#\{\lambda_k^2 \in S \mid \lambda_k \le \lambda\}}{\#\{\lambda_k^2 \mid \lambda_k \le \lambda\}} \right\} ,$$

nous démontrons l'inégalité

$$D(S) \le \int_{\text{Microsupport}(S)} \omega$$

Un problème ouvert, à ma connaissance, est la caractérisation des fermés de S^*M peuvent servir de microsupport à une suite de fonctions propres (ou à un quasi-mode). Par exemple, y a-t-il nécessairement des conditions de stabilité ? Comment écrire en général les conditions de quantification ? etc.

Le résultat énoncé par Schnirelman ([S]) est tout à fait remarquable, c'est le suivant :

THEOREME. - <u>Si le flot géodésique de</u> (M,g) <u>est ergodique, pour tout</u> A , <u>opérateur pseudo-différentiel d'ordre</u> 0 <u>et de symbole</u> a , <u>il existe une sous-suite</u> $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}$ <u>telle</u> λ_{k_i} <u>est de densité</u> 1 <u>et que l'on ait</u> :

$$\lim_{i\to\infty} \langle A\varphi_{k_i} | \varphi_{k_i} \rangle = \int_{S^*X} a \, . d\omega \ .$$

En fait, le résultat n'est pas entièrement démontré par Schnirelman (1972) et récemment (1984), S. Zelditch a donné une démonstration plus complète dans le cas des surfaces à courbure constante < 0 en s'appuyant sur un calcul pseudo-différentiel dans le $\frac{1}{2}$ plan de Poincaré basé sur la transformation de Fourier hyperbolique d'Helgason.

Nous tentons ici de donner une démonstration plus simple, n'utilisant pas la géométrie hyperbolique, mais seulement l'ergodicité sous sa forme la plus élémentaire.

Remarquons que le théorème de Schnirelman est un excellent analogue <u>quantique</u> de l'ergodicité du flot géodésique, puisqu'il donne une sorte d'équirépartition dans l'espace des phases de l'<u>énergie</u> de la suite des fonctions propres φ_k .

Il resterait à voir si on ne peut pas améliorer ce résultat en supprimant la condition de densité 1 , ou seulement en rendant la sous-suite indépendante de A .

1. LA QUANTIFICATION DE FRIEDRICHS

Le résultat principal utilisé (et tout à fait indépendant de l'ergodicité) est le suivant :

THEOREME. - Pour tout ρ $(0<\rho<1)$, il existe une correspondance linéaire $a \to Op^F(a)$ associant à tout symbole homogène de degré 0, a, un opérateur pseudo-différentiel $Op^F(a) \in OPD^0_{\rho,0}$ dont le symbole principal est a et tel que si $a \geq 0$, $Op^F(a)$ est un opérateur ≥ 0 sur $L^2(M, v_g)$.

Rappel. Les symboles $S^m_{\rho,\delta}(U \times \mathbb{R}^N)$ sont introduits par Hörmander, ils vérifient des inégalités du type $|D^\alpha_x D^\beta_\xi p(\alpha,\xi)| \leq C_K(1+|\xi|)^{m-\rho|\beta|+\delta|\alpha|}$ et se comportant un peu comme les OPD classiques si ρ est assez grand et δ petit (par exemple $\rho > 0$ et $\delta = 0$).

Il suffit évidemment par partition de l'unité de prouver le théorème pour un symbole $a(x,\xi)$ sur $T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$, homogène de degré 0 et à support compact en x : soit φ_i subordonnée à un atlas telle que $\Sigma\varphi_i^2 \equiv 1$ et ψ_i telle que $\psi_i \equiv 1$ sur le support de φ_i, désignant par a_i le transporté de $a \times \psi_i$, on pose :

$$Op^F(a) = \sum_i \varphi_i Op^F(a\psi_i)\varphi_i \quad \text{(suggestion de J.P. Demailly)}$$

Principe de la construction.

Soit $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\int_{\mathbb{R}^n} |q(\omega)|^2 = 1$, on pose $\alpha = \frac{n\rho}{2}$ (n = dimension de M) et

$$a^F(\xi_1, z, \xi_2) = \frac{1}{|\xi_1|^a} \cdot \frac{1}{|\xi_2|^\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} q\left(\frac{\xi-\xi_1}{|\xi_1|^\rho}\right) \cdot q\left(\frac{\xi-\xi_2}{|\xi_2|^\rho}\right) a(z,\xi)d\xi ,$$

à partir de ce symbole on fabrique l'opérateur $a^F(D, z, D)$:

$$Op^F(a)u(x) = C_n \cdot \int e^{i\varphi(x,y,z,\xi_1,\xi_2)} a^F(\xi_1, z, \xi_2)a(y)dy\,dz\,d\xi_1\,d\xi_2$$

où $\varphi = \langle x-z|\xi_1\rangle + \langle z-y|\xi_2\rangle$, on vérifie alors facilement :

(i) $a^F \in S^0_{\rho,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{2n})$.

(ii) Sur $C_\varphi = \{\xi_1 = \xi_2 \ , \ x=y=z\}$, on a
$a(x,\xi_1) - a^F(\xi_1, z, \xi_2) \in S^{\rho-1}_{\rho,0}$ (Prop. 1.2.5 de [H]).

(iii) On en déduit par Hörmander que $Op(a) - Op^F(a)$ est d'ordre $\leq \rho - 1$.

(iv) Si $a \geq 0$, $Op^F(a) \geq 0$.

La seule vérification non routinière, est (iv) :
(et encore !)

$$(Op^F(a)u|u) = C_n \int a(z,\xi) \left| \int e^{iz\xi_1} \hat{a}(\xi_1) q\left(\frac{\xi - \xi_1}{|\xi_1|^\rho}\right) \cdot \frac{1}{|\xi_1|^\alpha} d\xi_1 \right|^2 dz d\xi \ ,$$

ce qui prouve la pointivité.

Pour (iii), la seule difficulté est de localiser le résultat dans Hörmander ; on peut aussi se le redémontrer.

En fait, il existe une excellente étude de ce problème dans le livre [T].

2. REPRESENTATION INTEGRALE.

Considérons maintenant pour $a \in C^\infty(S^*M)$ la correspondance qui, à a , associe $\mu_k(a) = \langle Op^F(a)\varphi_k | \varphi_k \rangle$ où on désigne encore par a la fonction (symbole) homogène de degré 0 sur $T^*X \backslash 0$ dont la restriction à S^*M est a . Il est clair que si $a \geq 0$, $\mu_k(a) \geq 0$: donc μ_k est une mesure ≥ 0 (de masse 1) sur S^*M . Cette mesure représente lorsque $k \to \infty$ la localisation de φ_k dans S^*X . Remarquons que si on n'avait pas la positivité, les μ_k seraient seulement des distributions, ce qui est beaucoup moins intéressant.

3. LE THEOREME D'EGOROV.

THEOREME. - <u>Pour tout</u> $a \in C^0(S^*M)$, <u>et pour tout</u> $t \in \mathbb{R}$, <u>on a</u> :

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{S^*M} (a - a\circ\varphi_t)\,d\mu_k = 0 \text{ , } \underline{\text{où}}$$

φ_t <u>désigne le flot géodésique de</u> (M,g) .

<u>Preuve</u>. - Pour tout opérateur pseudo-différentiel A , on a :

$$\langle A\varphi_k | \varphi_k\rangle = \int_{S^*M} a\,d\mu_k + O(\lambda_k^{\rho-1})$$

où a est le symbole principal de A , en particulier si $A_t = e^{-it\sqrt{\Delta}} A e^{it\sqrt{\Delta}}$, on a :

$$\sigma(A_t) = \sigma(A)\circ\varphi_t \quad \text{(Egorov)}$$

et donc :

$$\left\{\begin{array}{l} \langle A_t\varphi_k | \varphi_k\rangle = \int_{S^*M} \varphi_t^*(a)\,d\mu_k + O(\lambda_k^{\rho-1}) \\ \langle A_0\varphi_k | \varphi_k\rangle = \int_{S^*M} a\,d\mu_k + O(\lambda_k^{\rho-1}) \text{ ,} \end{array}\right.$$

on en déduit le théorème précédent.

4. CONVERGENCE EN MOYENNE.

On a : $\mathrm{Tr}(Ae^{-t\Delta}) = \Sigma e^{-t\lambda_k^2}\langle A\varphi_k, \varphi_k\rangle$,

par les méthodes classiques, on a :

$$\mathrm{Tr}(Ae^{-t\Delta}) / \mathrm{Tr}(e^{-t\Delta}) \underset{t\to 0^+}{\sim} \int a\,d\omega$$

et donc, pour $A \geq 0$, par le théorème taubérien de Karamata,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{N_\lambda} \sum_{\lambda_k \leq 1} \int a\,d\mu_k = 1 \text{ ,}$$

où $\quad N_\lambda = \#\{\lambda_k | \lambda_k \leq \lambda\}$.

On a donc une convergence vague, en moyenne de μ_k vers ω .

5. FIN DE LA PREUVE : UTILISATION DE L'ERGODICITE.

Pour $a \in C^\infty(S^*M)$, on note $a_{T_0}(z) = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} a\circ\varphi_t(z)dt$, $\bar{a} = \int_{S^*M} a d\omega$ et $\hat{a}_{T_0}(z) = a_{T_0}(z) - \bar{a}$. On suppose $\|a\|_{L^\infty} = 1$.

L'ergodicité implique $\lim_{T\to\infty} a_T(z) - \bar{a} = 0$ presque partout.

<u>Soit $\epsilon_0 > 0$</u> et φ_{ϵ_0} une fonction plateau, $\varphi_{\epsilon_0}(t) \equiv 0$ pour $t < \frac{\epsilon_0}{2}$ et $\varphi_{\epsilon_0}(t) \equiv 1$ pour $t \geq \epsilon_0$, et $\forall t$, $0 \leq \varphi_{\epsilon_0}(t) \leq 1$, on a :

$$\lim_{T\to\infty} \int_{S^*M} \varphi_{\epsilon_0}(|\hat{a}_T(z)|).d\omega = 0 ,$$

<u>on choisit</u> $T_0 > 0$ tel que cette intégrale est $\leq \epsilon_0/2$. Si $\bar{\mu}_\lambda = \frac{1}{N_\lambda} \sum_{\lambda_k\leq\lambda} \mu_k$, on utilise la convergence vague de $\bar{\mu}_\lambda$ vers ω .

<u>Pour</u> $\lambda \geq \lambda_0$, on a $\int_{S^*X} \varphi_{\epsilon_0}(|\hat{a}_{T_0}|).d\bar{\mu}_\lambda \leq \epsilon_0$ et donc $\bar{\mu}_\lambda\{|\hat{a}_{T_0}| \geq \epsilon_0\} \leq \epsilon_0$.

On a alors :

$$\int_{S^*M} |\hat{a}_{T_0}| d\bar{\mu}_\lambda \leq \int_{|\hat{a}|\leq\epsilon_0} + \int_{|\hat{a}|\geq\epsilon_0}$$

La première intégrale est majorée pour ϵ_0 , car $\int d\mu_k = 1$, la seconde par $2\epsilon_0$, car $\|\hat{a}\|_{L^\infty} \leq 2$.

Donc :

$$\int_{S^*M} |\hat{a}_{T_0}| d\bar{\mu}_\lambda \leq 3\epsilon_0 .$$

Par Chebychev, on a :

$$\frac{1}{N_\lambda} \# \{\lambda_k \leq \lambda \mid \int |\hat{a}_{T_0}| d\mu_k \geq \sqrt{3\epsilon_0}\} \leq \sqrt{3\epsilon_0} ,$$

donc si $B_{\epsilon_0} = \{\lambda_k \mid \int |\hat{a}_{T_0}| d\mu_k \leq \sqrt{3\epsilon_0}\}$, on a densité$(B_{\epsilon_0}) \geq 1 - \sqrt{3\epsilon_0}$

Soit $C_{\epsilon_0} = \{\lambda_k \mid |\int (a(z)-\bar{a}) d\mu_k| \leq 2\sqrt{3\epsilon_0}\}$, on a :

$$C_{\epsilon_0} \supset B_{\epsilon_0} \cap \{\lambda_k \mid |\int (a_{T_0}(z) - a(z)) d\mu_k| \leq \sqrt{3\epsilon_0} .$$

La densité de ce dernier ensemble est 1 , car :

$$\int (a_{T_0} - a)d\mu_k \longrightarrow \int (a_{T_0} - a)\omega = 0 \quad , \text{ quand } \quad k \to \infty \ .$$

Donc :

$$\text{densité}(C_{\varepsilon_0}) \geq 1 - \sqrt{3\varepsilon_0} \ .$$

On en déduit le théorème par le lemme facile :

LEMME. - S'il existe $\varepsilon_n \to 0$ tel que
densité$\{|c_k| \leq \varepsilon_n\} \geq 1 - \varepsilon_n$,
il existe un ensemble B de densité 1 tel que
$\lim\limits_{k \in B} c_k = 0$.

Ceci conclut la démonstration et l'exposé.

BIBLIOGRAPHIE

[CV1] Y. COLIN DE VERDIERE, Quasi-modes sur les variétés riemanniennes.
Inventiones Math. 43, pp. 15-52, 1977.

[CV2] Y. COLIN DE VERDIERE, Spectre conjoint d'opérateurs qui commutent. I. Le cas non intégrable.
Duke Math. J. 46, 169-182 (1978).

[H] L. HÖRMANDER, Fourier Integral operators I.
Acta Mathematica 127, pp. 80-183 (1971).

[S] A. SCHNIRELMAN, Ergodic Properties of Eigenfunctions.
Usp. Math. Nauk 29, pp. 181-182 (1974).
The Asymptotic Multiplicity of the Spectrum of the Laplace Operator.
Usp. Math. Nauk 30, pp. 265-266 (1975).

[T] M. TAYLOR, Pseudo-differential operators.
Princeton University Press (1981)
Chapitre VII : The sharp Garding Inequality.

[Z] S. ZELDITCH, Eigenfunctions on Compact Riemann Surfaces of $g \geq 2$.
Preprint 1984 (New-York).
