

# SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

BORIS KOLEV

## **Type de tresse d'orbites périodiques**

*Séminaire de Théorie spectrale et géométrie*, tome 11 (1992-1993), p. 73-84

[http://www.numdam.org/item?id=TSG\\_1992-1993\\_\\_11\\_\\_73\\_0](http://www.numdam.org/item?id=TSG_1992-1993__11__73_0)

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Chambéry-Grenoble), 1992-1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## TYPE DE TRESSE D'ORBITES PÉRIODIQUES

*Boris KOLEV*

**RÉSUMÉ .** — L'étude des orbites périodiques des homéomorphismes de surface a connu un développement important ces dernières années. Cet intérêt a deux origines. D'une part, la volonté d'obtenir des résultats analogues à ceux qui sont connus pour les applications continues de l'intervalle et d'autre part, la prise en compte des techniques très puissantes que fournit la théorie de Nielsen- Thurston. Dans le cas d'un homéomorphisme du disque, une orbite périodique est caractérisée par son "type de tresse".

### 1. Introduction

Un problème assez général en mathématiques est le suivant: on se donne une application

$$f : X \rightarrow X,$$

on itère cette application à partir d'un point  $x \in X$  et on s'intéresse aux propriétés de l'ensemble:

$$x, f(x), f^2(x) \dots$$

L'ensemble de ces points forme la trajectoire ou l'orbite du point  $x$  sous l'action de  $f$ . Dans le cas où  $f$  est bijective, on inclura, bien entendu, les images inverses de  $x$  par  $f$ :

$$\dots, f^{-2}(x), f^{-1}(x), x$$

Parmi l'ensemble des trajectoires, certaines sont plus remarquables que d'autres. Il y a par exemple, celles qui forment un cycle:

$$x, f(x), \dots, f^n(x) = x$$

Ce sont les points périodiques de  $f$ . On note  $Per(f)$ , l'ensemble de ces points.

Pratiquement, il est souvent difficile, voire impossible de décrire les trajectoires de tous les points de  $X$  sous l'action de  $f$ . Bien souvent, on ne connaît pas explicitement  $f$  et même dans ce cas, l'expression algébrique des itérés de  $f$  est souvent beaucoup trop compliquée pour permettre une analyse raisonnable. La plupart du temps, on ne connaît qu'un échantillon de l'ensemble des orbites de  $f$ , par exemple, une orbite périodique. La question naturelle qui se pose alors, est de savoir si à partir de cette petite source d'information, on peut quand même déduire des propriétés plus générales sur la dynamique de  $f$ : c'est-à-dire sur les trajectoires des autres points.

Ce problème a connu un développement important ces dernières années. De tous les résultats qui sont apparus, une idée majeure s'est imposée: certains types d'orbites entraînent la coexistence d'autres types d'orbites. Un exemple classique est le fameux théorème de Sarkovskii.

**THÉORÈME 1 (SARKOVSKII).** — *Définissons l'ordre suivant sur les entiers:*

$$3 \succ 5 \succ \dots \succ 3 \cdot 2 \succ 5 \cdot 2 \succ \dots \succ 3 \cdot 2^2 \succ 5 \cdot 2^2 \succ \dots \succ 2^3 \succ 2^2 \succ 2 \succ 1$$

*Alors si  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  est une application continue et possède une orbite périodique de période  $n$ , elle possède également une orbite périodique de période  $m$  pour tout  $n \succ m$ .*

Ce très beau théorème montre qu'il existe des types d'orbites périodiques, les orbites périodiques de période  $q \cdot 2^d$  ( $q$  impair), qui imposent une structure très complexe pour la dynamique de  $f$  alors que d'autres au contraire, les orbites périodiques de période  $2^d$  n'impose a priori que l'existence d'un nombre fini de périodes.

Des résultats analogues existent pour des homéomorphismes qui renversent l'orientation des surfaces compactes orientables ([10], [19]). Cependant, un instant de réflexion suffit pour réaliser qu'en général, la période ne suffit plus à rendre compte des propriétés essentielles d'une orbite périodique en dimension 2. Une rotation du disque d'angle  $2\pi/n$  autour de son centre possède des orbites de période  $n$  et un point fixe seulement.

En fait, ce phénomène existe déjà en dimension 1. Certaines orbites périodiques de période 4 d'une application continue de l'intervalle entraînent l'existence d'orbites périodiques de toutes les périodes alors que d'autres n'entraînent la coexistence que d'au moins une orbite de période 2 et d'un point fixe comme le requiert le théorème de Sarkovskii cité plus haut. Pour prendre en compte ces considérations, il faut caractériser une orbite périodique par un peu plus d'information.

## 2. Ordre dynamique

### 2.1. Cycle associé à une orbite périodique en dimension 1.

Dans le cas des applications continues de l'intervalle,  $I$ , c'est la permutation induite sur les points de l'orbite ordonnés sur l'axe réel qui nous permet de raffiner l'ordre mentionné plus haut ([1], [4], [5], [27]). Soit  $C_n$  le sous-ensemble de  $\mathcal{S}_n$ , le groupe des permutations, constitué par les  $n$ -cycles et

$$C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} C_n.$$

Étant donnée une application continue  $f$ , l'ensemble des cycles de  $f$  noté  $C(f)$  est défini de la manière suivante. Un  $n$ -cycle,  $\theta$ , appartient à  $C(f)$  s'il existe des réels

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n$$

tels que  $f(x_i) = x_{\theta(i)}$ . La relation suivante:

$$\theta \succ \eta \quad \text{ssi} \quad \forall f \in C^0(I, I), \theta \in C(f) \implies \eta \in C(f).$$

définit un ordre partiel sur  $C_n$  ([1], [2], [4], [6]). Elle est clairement réflexive et transitive et on montre qu'elle est antisymétrique [2]. Le pivot central sur lequel repose l'étude de cet ordre est la construction pour chaque élément  $\theta \in C$  d'une application "plus simple que les autres",  $f_\theta$ , dans la classe des applications telle que  $\theta \in C(f_\theta)$ , en l'occurrence une application linéaire par morceaux (voir Figure 1).

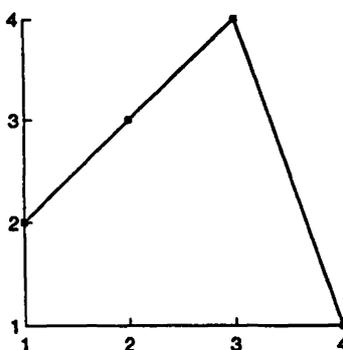


Figure 1 :  $\theta = (1234)$ .

Cette application est telle que  $C(f_\theta) = \{\eta; \theta \succ \eta\}$ , ce qui justifie l'appellation "plus simple que les autres".  $f_\theta$  possède une partition de Markov. Le calcul des successeurs de  $\theta$  s'effectue alors à l'aide de la matrice des recouvrements associé à  $f_\theta$  et de son graphe de Markov.

$$M(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans le cas d'un homéomorphisme  $f : D^2 \rightarrow D^2$ , le premier problème qui se pose est de caractériser les orbites périodiques. On ne peut plus associer à une orbite périodique  $P = \{P_1, \dots, P_n\}$  de  $f$  une permutation de façon naturelle comme la structure ordonnée de  $\mathbb{R}$  nous permet de le faire pour une application continue de l'intervalle. Il va donc falloir introduire un nouvel objet: le type de tresse de  $P$ .

## 2.2. Le groupe des tresses d'Artin.

Pour  $i \in \mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$ , soit  $Q_i = (2i/(n+1) - 1, 0)$ ,  $Q = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_n\}$  et  $\mathcal{A}_i = (\gamma_i(t), t) \in D^2 \times I$  un arc tel que  $\gamma_i(0)$  et  $\gamma_i(1)$  appartiennent à  $Q$  et  $\gamma_i(t) \text{Ne} \gamma_j(t)$  si  $i \text{Ne} j$ . L'ensemble  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \dots \cup \mathcal{A}_n$  est appelé une tresse géométrique.

On définit, sur l'ensemble des tresses géométriques, la relation d'équivalence suivante:  $\mathcal{A} \sim \mathcal{A}'$  si il existe une famille continue  $\mathcal{A}(s) = \mathcal{A}_1(s) \cup \mathcal{A}_2(s) \cup \dots \cup \mathcal{A}_n(s)$  ( $s \in I$ ) de tresses géométriques telles que  $\mathcal{A}(0) = \mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}(1) = \mathcal{A}'$ . L'opération de concaténation habituelle est compatible avec cette relation d'équivalence et munit l'ensemble quotient  $B_n$  d'une structure de groupe.  $B_n$  est le groupe des tresses d'Artin. Un élément de  $B_n$  est appelé tout simplement une tresse.

On peut fermer  $\beta$  en connectant les extrémités supérieures de la tresse à ses extrémités inférieures. On obtient de cette façon une tresse fermée  $\hat{\beta}$ . Deux tresses fermées  $\hat{\beta}$  et  $\hat{\beta}'$  sont équivalentes (i.e définissent deux courbes simples fermées isotopes dans le tore solide  $D^2 \times S^1$ ) si et seulement si  $\beta$  et  $\beta'$  sont conjuguées dans  $B_n$  [9].

Une façon plus formelle de construire  $B_n$  est la suivante. Soit:

$$W_n = \{ \{x_1, x_2, \dots, x_n\}; x_i \in \text{int}(D^2), x_i \text{Ne} x_j \},$$

l'ensemble des  $n$ -uplets non ordonnés de points distincts dans  $D^2 \setminus \partial D^2$ . Alors  $B_n = \pi_1(W_n, Q)$ .

$B_n$  est un groupe de type fini ayant pour générateurs  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$  avec les

relations  $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$  pour  $|i - j| \geq 2$  et  $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ .

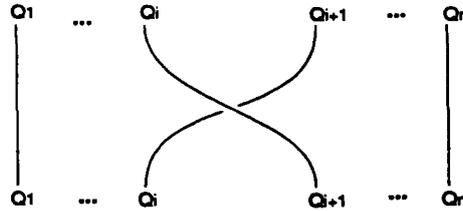


Figure 2 : le générateur  $\sigma_i$ .

Le centre  $Z(B_n)$  de  $B_n$  est le sous-groupe infini cyclique engendré par  $\theta_n = (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1})^n$  (qui correspond à un "twist" complet).

### 2.3. Type de tresse d'une orbite périodique.

Il semble que ce soit R. Bowen [12] (voire également [13],[14]) qui ait le premier caractérisé une orbite périodique  $P$  d'un homéomorphisme  $f$  d'une surface  $M$  par la classe d'isotopie de  $f$  relativement à l'orbite périodique  $P$ . Soit  $f \in \text{Homéo}^+(D^2)$ , préservant l'orientation et

$$P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\} \subset D^2 \setminus \partial D^2$$

une orbite périodique de  $f$ . Pour pouvoir comparer différentes orbites, il est nécessaire de se ramener à un modèle standard de  $(D^2, P)$ . La donnée d'un homéomorphisme  $h : (D^2, P) \rightarrow (D^2, Q)$  détermine un élément  $f_P^h = h \circ f \circ h^{-1}$  de  $\text{Homéo}^+(D^2, Q)$  le groupe des homéomorphismes  $f \in \text{Homéo}^+(D^2)$  tels que  $f(Q) = Q$ . Un choix différent de  $h$  revient à remplacer  $f_P^h$  par un homéomorphisme qui lui est conjugué. Par suite, la classe de conjugaison  $\langle \alpha \rangle$  de la classe d'isotopie  $\alpha = [f_P^h]$  de  $f_P^h$  dans le groupe d'homéotopie  $\text{Aut}(D^2, Q)$ , des homéomorphismes de  $D^2$  qui préservent  $Q$ , est indépendante de  $h$ .

Le lien avec le groupe des tresses  $B_n$  est le suivant. Soit

$$\epsilon : \begin{cases} \text{Homéo}^+(D^2) & \rightarrow W_n \\ f & \mapsto \{f(Q_1), \dots, f(Q_n)\} \end{cases}$$

Il n'est pas difficile de voir que  $\epsilon$  est surjectif et que  $\epsilon(f) = \epsilon(g)$  ssi  $f^{-1}g \in \text{Homéo}^+(D^2, Q)$ . Ceci nous permet d'identifier  $W_n$  avec l'espace quotient:

$$\text{Homéo}^+(D^2) / \text{Homéo}^+(D^2, Q).$$

L'existence d'une section locale de  $\epsilon$  au point  $Q = \epsilon(Id)$ , permet d'établir que  $\epsilon$  est une fibration:

$$\text{Homéo}^+(D^2, Q) \xrightarrow{i} \text{Homéo}^+(D^2) \xrightarrow{\epsilon} W_n$$

En utilisant la suite exacte longue sur les groupes d'homotopies pour cette fibration et en se rappelant que  $B_n = \pi_1(W_n, Q)$  et  $Aut(D^2, Q) = \pi_0(Homéo^+(D^2, Q))$ , on construit un morphisme surjectif  $m : B_n \rightarrow Aut(D^2, Q)$  dont le noyau  $ker(m)$  est exactement  $Z(B_n)$ , d'où le théorème [9].

**THÉORÈME 2.** —  $Aut(D^2, Q) \cong B_n/Z(B_n)$ .

Cet isomorphisme induit une bijection canonique entre les classes de conjugaison des deux groupes. On peut donc identifier  $\langle \alpha \rangle$ , la classe de conjugaison de  $[f_P^h]$  dans  $Aut(D^2, Q)$  à une classe de conjugaison  $\tilde{\beta}$  dans  $B_n/Z(B_n)$ .

**DÉFINITION 1.** —  $bt(P, f) = \tilde{\beta}$  est le type de tresse de l'orbite périodique  $P$ .

Soit  $CB_n$ , l'ensemble des tresses dont la fermeture possède une seule composante. On définit  $BT_n$  comme l'ensemble des classes de conjugaison de  $CB_n$  et on pose:

$$BT = \bigcup_{n \geq 1} BT_n.$$

$BT$  est l'ensemble des types de tresses des orbites périodiques des homéomorphismes de  $D^2$ . Si  $f \in Homéo^+(D^2)$ , on pose  $BT(f) = \{bt(P, f); P \in Per(f)\}$  et on définit sur  $BT$  la relation de forCage suivante [13],[14],[15]:

$$\tilde{\beta}_1 \succ \tilde{\beta}_2 \quad \text{ssi} \quad \forall f \in Homéo^+(D^2), \tilde{\beta}_1 \in BT(f) \implies \tilde{\beta}_2 \in BT(f).$$

**THÉORÈME 3.** — La relation  $\succ$  est un ordre partiel sur  $BT$ .

Le problème est alors d'expliciter cet ordre partiel. En particulier:

— Étant donné  $\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2 \in BT$ , reconnaître si  $\tilde{\beta}_1 \succ \tilde{\beta}_2$  ou  $\tilde{\beta}_2 \succ \tilde{\beta}_1$ .

— Déterminer  $\{\tilde{\alpha}; \tilde{\beta} \succ \tilde{\alpha}\}$ .

Ces problèmes font l'objet de recherches actuelles. Signalons toutefois que des résultats intéressants ont été obtenus si l'on se restreint à l'ordre induit sur un sous-ensemble de  $BT$ . T. Matsuoka [25] a résolu ce problème pour les types de tresses de période 3 ( $BT_3, \succ$ ) et T. Hall [18] l'a résolu pour  $(BT(H), \succ)$ , l'ensemble des types de tresses du fer à cheval de Smale.

### 3. Application de la théorie de Nielsen-Thurston à l'étude des types de tresses

#### 3.1. La théorie de Nielsen-Thurston.

Thurston ([11], [17], [20], [26], [30]) (complétant un programme commencé par Nielsen ([28], [29])) a donné une très belle description des classes d'isotopie des homéomorphismes d'une surface compacte. Deux types d'homéomorphismes servent de briques pour la construction d'un représentant canonique dans chaque classe.

— Le premier type est constitué par les isométries pour une métrique hyperbolique sur  $M$ . Étant donné une métrique hyperbolique fixée, le groupe des isométries est fini [31]. Par conséquent, pour chaque isométrie  $f : M \rightarrow M$ , il existe un entier  $n > 0$  tel que  $f^n = Id$ .

— Le second type d'homéomorphisme a été baptisé *pseudo-Anosov* par analogie avec les difféomorphismes Anosov du tore. Un homéomorphisme pseudo-Anosov  $f$  d'une surface fermée est un homéomorphisme qui préserve deux feuilletages transverses  $\mathcal{F}^s$  et  $\mathcal{F}^u$  dont les singularités sont des "selles" ayant au moins 3 séparatrices, ces deux feuilletages admettant respectivement des mesures transverses  $\mu^s$  et  $\mu^u$  telles que  $f(\mathcal{F}^s, \mu^s) = (\mathcal{F}^s, \lambda^{-1}\mu^s)$  et  $f(\mathcal{F}^u, \mu^u) = (\mathcal{F}^u, \lambda\mu^u)$  où  $\lambda$  est un réel  $> 1$ . Dans le cas où  $\partial M \neq \emptyset$ , on demande de plus que chaque composante de  $\partial M$  soit un cycle de feuilles de  $\mathcal{F}^s$  et de  $\mathcal{F}^u$  séparées par des singularités de type "épine" et que chaque composante de  $\partial M$  possède au moins une singularité de chacun des deux feuilletages.

— Enfin, un homéomorphisme  $f : M \rightarrow M$  est *réductible* par un système  $\Gamma$  de courbes simples, fermées, disjointes  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$  si:

1.  $\Gamma_i$  n'est homotope ni à un point ni à une composante de  $\partial M$ .
2.  $\Gamma_i$  n'est pas homotope à  $\Gamma_j$  si  $i \neq j$ .
3.  $\Gamma$  est invariant par  $f$ .

**THÉORÈME 4.** — Soit  $f : M \rightarrow M$  un homéomorphisme alors  $f$  est isotope à  $\phi : M \rightarrow M$ , où  $\phi$  vérifie l'une des propriétés suivantes:

1.  $\phi$  est une isométrie pour une métrique hyperbolique sur  $M$ , ou bien

2.  $\phi$  est pseudo-Anosov. Sinon

3.  $\phi$  est réductible par un système de courbes  $\Gamma$ .

Dans ce dernier cas on a, de plus, les propriétés suivantes:  $\Gamma$  possède un voisinage tubulaire  $\eta(\Gamma)$  invariant par  $\phi$ . Si  $S_1, \dots, S_p$  désignent les composantes de  $M \setminus \eta(\Gamma)$  et  $n_i$  le plus petit entier positif tel que  $\phi^{n_i}(S_i) = S_i$ , alors,  $\phi^{n_i}/S_i$  satisfait (1) ou (2). Si  $\eta_1, \dots, \eta_q$  désignent les composantes de  $\eta(\Gamma)$  et  $m_j$  le plus petit entier tel que  $\phi^{m_j}(\eta_j) = \eta_j$ , alors  $\phi^{m_j}/\eta_j$  est un twist. (Ce twist n'est pas nécessairement un twist de Dehn car  $f^{m_j}/\partial\eta_j$  n'est pas nécessairement l'identité.)

Une classe est dite irréductible si elle possède un représentant de type (1) ou (2), les deux possibilités s'excluant mutuellement. En particulier, si une classe d'isotopie est d'ordre fini, elle possède un représentant de type (1) [32]. On dit alors que cette classe est périodique. Si une classe est d'ordre infini, ou bien elle possède un représentant pseudo-Anosov, on dit alors qu'elle est de type pseudo-Anosov, ou bien elle possède un représentant de type (3) et on dit qu'elle est réductible, les deux cas s'excluant mutuellement.

### 3.2. Classification des types de tresses.

Appelons  $\bar{D}_n$  la compactification de  $D_n = D^2 \setminus Q$ , obtenue en remplaçant chaque point  $Q_i$  de  $Q$  par un cercle  $S_i$ , le cercle des vecteurs unitaires tangents en ce point, et soit  $p : \bar{D}_n \rightarrow D^2$ , l'application qui envoie  $S_i$  sur  $Q_i$ . Si  $f$  est un  $C^1$ -difféomorphisme, la restriction  $f_Q$  de  $f$  à  $D_n$  s'étend en un homéomorphisme  $\bar{f}_Q$  de  $\bar{D}_n$  en posant:

$$\bar{f}_Q(u) = D_{Q_i} f \cdot u / \|D_{Q_i} f \cdot u\| \quad u \in S_i. \quad (1)$$

On peut alors caractériser  $(Q, f)$  par la classe d'isotopie de  $\bar{f}_Q$  dans  $\bar{D}_n$ .

**PROPOSITION 1.** — La projection  $p : \bar{D}_n \rightarrow D^2$  induit un isomorphisme canonique entre  $Aut(\bar{D}_n)$  et  $Aut(D^2, Q)$ .

Soit  $\bar{\beta} \in BT_n$ , une classe de conjugaison dans  $Aut(D^2, Q) \cong Aut(\bar{D}_n)$ . Le type de Thurston d'un élément de  $Aut(\bar{D}_n)$  étant invariant par conjugaison, on dit que  $\bar{\beta}$  est pseudo-Anosov (resp. périodique, réductible) si la classe de conjugaison que  $\bar{\beta}$  représente est pseudo-Anosov (resp. périodique, réductible).

Soit  $f \in Homéo^+(D^2, Q)$  et  $\bar{\beta}(f, Q)$  son type de tresse. Si  $n \geq 2$  alors  $\chi(\bar{D}_n) = 1 - n < 0$ . Un représentant canonique  $\bar{\phi}_\beta \in Homéo^+(\bar{D}_n)$  induit un

homéomorphisme  $\phi_\beta \in \text{Homéo}^+(D^2, Q)$  isotope à  $f$  (rel. à  $Q$ ) tel que  $p \circ \bar{\phi}_\beta = \phi_\beta \circ p$  (où  $p : \bar{D}_n \rightarrow D^2$  est la projection canonique). En particulier, si  $\bar{\phi}_\beta$  est pseudo-Anosov, on dira, par abus de langage que  $\phi_\beta$  est pseudo-Anosov (rel. à  $Q$ ), bien qu'il n'y ait pas d'homéomorphisme pseudo-Anosov, à proprement parler, sur  $D^2$ . On note  $IBT_n$ , l'ensemble des éléments irréductibles de  $BT_n$  et  $IBT = \bigcup_n IBT_n$ .

Si  $\bar{\beta}$  est périodique, il existe un entier  $m \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\phi_\beta^m = Id$ . Alors d'après un théorème de Kerekjarto ([16], [21]), si  $m$  est minimal,  $\phi_\beta$  est conjugué à une rotation d'angle  $2k\pi/m$  ( $0 < k < m$ ). En particulier,  $n = m$  (car  $\phi_\beta(Q) = Q$ ).  $\beta$  est donc conjugué à  $\alpha_{k/n} = (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1})^k$ . Il y a donc seulement  $\varphi(n)$  éléments périodiques dans  $BT_n$  ( $\varphi(n)$  étant le nombre d'entiers premiers avec  $n$  et compris entre 1 et  $n$ ).

Supposons  $\bar{\beta}$  réductible. Soit  $\{S_0, S_1, \dots, S_p\}$ , la décomposition de  $D^2$  en sous-surfaces invariantes par  $\phi_\beta$ ,  $S_0$  étant la composante qui contient  $\partial D^2$  et  $\{S_1, \dots, S_p\}$  les composantes dont la frontière rencontre  $S_0$ . Quitte à effectuer une conjugaison, on peut supposer que  $S_1, S_2, \dots, S_p$  sont comme sur la figure 3.

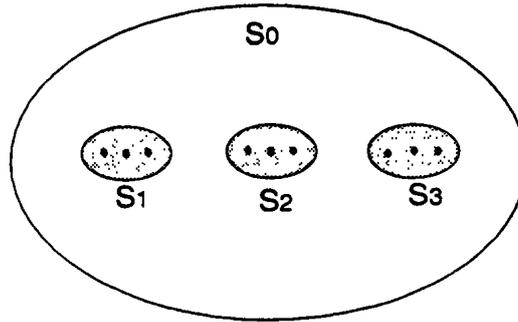


Figure 3 : sous-surfaces invariantes par un élément réductible

Posons  $q = \frac{n}{p}$ . On a  $\phi_\beta(S_0) = S_0$  et  $\phi_\beta^q(\Delta_i) = \Delta_i$  (remarquer que  $\phi_\beta^q/\Delta_i$  et  $\phi_\beta^q/\Delta_j$  sont conjugués). Soit  $\tilde{\gamma}_1 \in BT_q$ , la classe de conjugaison de  $[\phi_\beta/S_0]$  dans  $\text{Aut}(D^2 \setminus \bigcup_{i=1}^q \Delta_i)$  et  $\tilde{\beta}'$  la classe de conjugaison de  $[\phi_\beta^q/\Delta_i]$  dans  $\text{Aut}(D^2, Q \cap \Delta_i)$ . On écrit:

$$\bar{\beta} = [\tilde{\gamma}_1, \tilde{\beta}']$$

(remarquer que  $\tilde{\gamma}_1$  et  $\tilde{\beta}'$  sont déterminés de manière unique). Par construction,  $\tilde{\gamma}_1$  est irréductible. On peut alors faire la même décomposition pour  $\tilde{\beta}'$  (voir Figure 4).

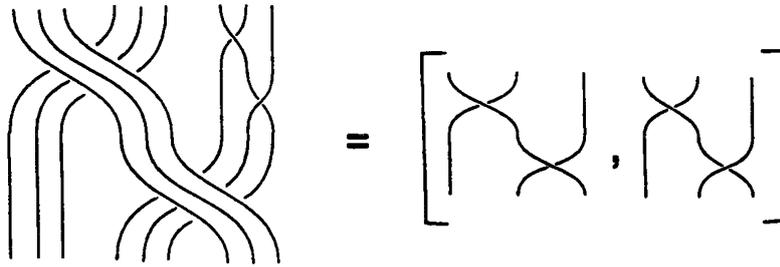


Figure 4 : décomposition en facteurs irréductibles

THÉORÈME 5. — Chaque  $\tilde{\beta} \in BT$  admet une unique décomposition

$$\tilde{\beta} = [\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_r]$$

où  $\tilde{\gamma}_i$  est irréductible.

Remarquer que si  $\tilde{\beta} = [\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_r]$  et  $\tilde{\gamma}_i \in BT_{q_i}$ , alors  $n = q_1 q_2 \dots q_r$ . En particulier, si  $n$  est premier, on a donc:  $BT_n = IBT_n$ .

THÉORÈME 6. — Soient  $\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_r, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in IBT$ , alors:

1.  $[\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_r] \succ [\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_{r-1}]$ .
2.  $[\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_r, \tilde{\alpha}] \succ [\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_r, \tilde{\beta}] \iff \tilde{\alpha} \succ \tilde{\beta}$ .

En ce qui concerne les calculs effectifs dans  $(BT, \succ)$ , on peut donc proposer les étapes suivantes:

1. Étant donné un type de tresse  $\tilde{\beta} \in BT$ , déterminer s'il est périodique, pseudo-Anosov ou réductible et dans ce dernier cas, calculer la décomposition de  $\tilde{\beta}$  en facteurs irréductibles. Un algorithme pour répondre à cette question existe [3].

2. Étant donné  $\gamma \in IBT$  déterminer  $\{\alpha; \gamma \succ \alpha\}$ . Ce dernier problème demeure l'objet de recherches actuelles ([7], [8], [22], [23], [24]).

## Références

- [1] L. ALSEDA, J. LLIBRE and M. MISIUREWICZ. — Combinatorial Dynamics and Entropy in Dimension One, Advanced Series in Nonlinear Dynamics. World Scientific, 1993.
- [2] S. BALDWIN. — Generalizations of a theorem of Sarkovskii on orbits of continuous real-valued functions, Discrete Math. 67 (1987), 111–127.

- [3] D. BERNADETE, M. GUTIERREZ and Z. NITECKI. — *Braids and the Nielsen-Thurston Classification*, 1991.
- [4] C. BERNHARDT. — *Simple permutations with order a power of two*, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* 4 (1984), 79–186.
- [5] C. BERNHARDT. — *The ordering on permutations induced by continuous maps of the real line*, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* 7 (1987), 155–160.
- [6] C. BERNHARDT, E. COVEN, M. MISIUREWICZ and I. MULVEY. — *Comparing periodic orbits of maps of the interval*, *Trans. of the Amer. Math. Soc.* 333 (2) (1992), 701–707.
- [7] M. BESTIVNA and M. HANDEL. — *Train tracks and automorphisms of surfaces*, preprint, 1991.
- [8] M. BESTIVNA and M. HANDEL. — *Train tracks and automorphisms of free groups*, *Annals of Math.* 135 (1992), 1–5.
- [9] J. BIRMAN. — *Braids, Links and Mapping Class Groups*, volume 81 of *Annals of Math. Studies*, Princeton Univ. Press, 1974.
- [10] P. BLANCHARD and J. FRANKS. — *The dynamical complexity of orientation reversing homeomorphisms of surfaces*, *Inv. Math.* 62 (1980), 333–339.
- [11] S. BLEILER and A. CASSON. — *Automorphisms of Surfaces after Nielsen and Thurston*, volume 9, LMS Student Texts, 1988.
- [12] R. BOWEN. — *Entropy and the fundamental group*, In *The Structure of Attractors in Dynamical Systems*. Springer, LNIM 668, 1978.
- [13] P. BOYLAND. — *Braid types and a topological method of proving positive entropy*, Preprint.
- [14] P. BOYLAND. — *An analog of sarkovskii's theorem for twist maps*, *Contemporary Math.* 81 (1988), 119–133.
- [15] P. BOYLAND. — *Rotation sets and monotone periodic orbits for annulus homeomorphisms*, *Comment. Math. Helvetici* 67 (1992), 3–213.
- [16] S. EILENBERG. — *Sur les transformations périodiques de la surface de sphère*, *Fund. Math.* 22 (1934), 28–44.
- [17] A. FATHI, F. LAUDENBACH and V. POÉNARU. — *Travaux de Thurston sur les Surfaces*, volume 66-67, Astérisque, 1979.
- [18] T. HALL. — *Coexistence theorems for periodic orbits of horseshoe type*, Preprint, Cambridge, 1990.
- [19] M. HANDEL. — *The entropy of orientation reversing homeomorphisms of surfaces*, *Topology* 21 (3) (1982), 291–296.
- [20] M. HANDEL and W. THURSTON. — *New proofs of some results of Nielsen*, *Adv. in Math.* 56 (1985), 173–191.
- [21] B. DE KERÉKJARTO. — *Sur la structure des transformations topologiques des surfaces en elles-mêmes*, *L'Enseignement Math.* 35 (1936), 297–316.
- [22] J. E. LOS. — *Periodic orbits, partial order, entropy and train-tracks in the disk*, Prépublication de l'Université de Nice n° 254, 1989.
- [23] J. E. LOS. — *Link invariants for braided links in 3-manifolds fibered over the circle via dynamical systems*, Prépublication de l'Université de Nice n° 265, 1990.
- [24] J. E. LOS. — *Pseudo-anosov and invariant train-tracks in the disk: a finite algorithm*, Prépublication de l'Université de Nice n° 266, à paraître dans *Proc. Lond. Math. Soc.*, 1990.

- [25] T. MATSUOKA. — *Braids of periodic points and a two dimensional analogue of sarkovskii's ordering*, Dynamical Systems and Nonlinear oscillations, 1985.
- [26] R. T. MILLER. — *Geodesic laminations from nielsen's viewpoint*, Adv. in Math. 45 (1982), 189–212.
- [27] M. MISIUREWICZ and Z. NITECKI. — *Combinatorial patterns for maps of the interval*, Preprint, 1989.
- [28] J. NIELSEN. — *Surface transformation classes of algebraic finite type*, Det Kg. Danske Videnskoberness Selskab, Math-Fysike Meddelelser XXI (2) (1944), Voir aussi: Collected Papers of J. Nielsen, Vagn Lundsgaard Hansen (1986).
- [29] J. NIELSEN. — *Investigations in the topology of closed orientable surfaces, i, ii and iii*, In Jakob Nielsen :Collected Mathematical Papers. Birkhäuser, 1986, Translation by John Stillwell of: Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flaichen.
- [30] W. THURSTON. — *On the geometry and dynamics of surfaces*, Bull. of the A.M.S. 19, 1988.
- [31] ZIESCHANG, VOGT and COLDEWEY. — *Surfaces and Planar Discontinuous Groups*, Springer, LNM. 835, 1980.
- [32] H. ZIESCHANG. — *Finite Groups of Mapping Classes of Surfaces*, Springer, LNM 875, 1981.

B. KOLEV  
I.N.L.N.  
06108 Nice Cedex (France)