

# SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

FRÉDÉRIC FAURE

**Mécanique quantique sur le tore et dégénérescences dans le spectre**

*Séminaire de Théorie spectrale et géométrie*, tome 11 (1992-1993), p. 19-63

[http://www.numdam.org/item?id=TSG\\_1992-1993\\_\\_11\\_\\_19\\_0](http://www.numdam.org/item?id=TSG_1992-1993__11__19_0)

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Chambéry-Grenoble), 1992-1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# MÉCANIQUE QUANTIQUE SUR LE TORE ET DÉGÉNÉRESCENCES DANS LE SPECTRE

*Frédéric FAURE*

## Table des Matières

### **1 Mécanique sur le tore**

- 1.1 Le tore en mécanique classique
- 1.2 Le tore en mécanique quantique

### **2 Les états cohérents standard**

- 2.1 Présentation et définition
- 2.2 Représentation de Bargmann et de Husimi
- 2.3 Distribution de Husimi des états stationnaires d'une dynamique intégrable

### **3 Indice de Chern pour caractériser la topologie des bandes d'énergie**

- 3.1 Introduction
- 3.2 Indice de Chern et dégénérescence entre niveaux

### **4 L'indice de Chern dans des modèles intégrables**

- 4.1 Modèle de Harper à séparatrice unique
- 4.2 Résonance entre deux trajectoires contractibles
  - 4.2.1 Deux modèles numériques
  - 4.2.2 Conditions pour l'apparition d'une dégénérescence
  - 4.2.3 Aspect qualitatif des lignes de dégénérescences

### **5 Dynamique chaotique et indices de Chern**

- 5.1 Modèle de "Harper pulsé"
- 5.2 Un modèle sans symétrie
- 5.3 Présence de dégénérescences dans le cas chaotique

Le travail présenté a été fait en collaboration avec P. Leboeuf de l'IPN d'Orsay.

### Introduction :

Les modèles auxquels nous nous intéresserons sont du type du modèle de Harper et sont une formulation de la mécanique quantique sur le tore en tant qu'espace de phase. Ce type de modèle trouve ses applications essentiellement en physique du solide, et notamment pour l'effet Hall quantique, à la suite du résultat remarquable de K. von Klitzing et al. [1] en 1980 concernant la quantification de la conductivité de Hall  $\sigma_{xy}$  pour des électrons "bi-dimensionnels".

En effet le modèle physique direct qui correspond à cette dynamique sur le tore est un modèle d'électrons confinés dans une fine couche ( $\sim 100 \text{ \AA}$ ) à l'interface entre des semi-conducteurs, à très faible température ( $1 - 4^\circ\text{K}$ ), et dans un champ magnétique élevé ( $3 - 15$  Tesla). On suppose de plus que dans le plan  $(x, y)$  où ils sont confinés, les électrons sont soumis à un potentiel extérieur  $V(x, y)$ , bi-périodique en  $x$  et  $y$ , [2]. Ce potentiel peut-être celui créé par les atomes d'un réseau cristallin, ou celui créé artificiellement par des nano-structures [3]. Lorsqu'un faible champ électrique uniforme est appliqué, D.J. Thouless et al. [4] ont montré que chaque bande d'énergie sous le niveau de Fermi, contribue à la conductivité de Hall par un multiple entier de  $e^2/h$ . Cet entier qui est responsable de la quantification de la conductivité est un invariant topologique, c'est à dire qu'il est invariant sous les faibles perturbations de l'Hamiltonien comme celles qui prennent en compte les impuretés, les interactions entre électrons..., ce qui explique l'incroyable précision de la quantification entière observée dans les expériences; précision jusqu'à  $10^{-8}$ . En mathématiques, cet entier s'appelle l'indice de Chern, et il est associé à chaque bande d'énergie. Un bon résumé de l'aspect topologique de l'effet Hall quantique et de son développement est par exemple celui de Y.S. Wu [5].

Pour des forts champs magnétiques, le couplage entre les différents niveaux de Landau peut-être négligé (c'est l'approximation du plus bas niveau de Landau) et le mouvement de l'électron est décrit par un Hamiltonien effectif  $H(q, p)$  périodique en position comme en impulsion. Par exemple, si  $V(x, y) = \cos(2\pi x) + \alpha \cos(2\pi y)$ , alors l'Hamiltonien effectif est  $H(q, p) = \cos(2\pi q) + \alpha \cos(2\pi p)$  (Hamiltonien de Harper). D'un point de vue dynamique le mouvement est intégrable, puisqu'il a un degré de liberté et que l'énergie est conservée.

Pour des champs magnétiques moins élevés, on s'attend à ce que le mouvement de l'électron soit chaotique.

Dans le processus de quantification, deux paramètres quantiques  $(\theta_1, \theta_2)$  peuvent être introduits, reliés à la périodicité de la fonction d'onde sous les translations d'une cellule élémentaire.

L'objet de cet exposé est de présenter le comportement des valeurs propres et des états stationnaires de systèmes classiquement intégrables ou chaotiques, pour des changements des conditions de périodicité  $(\theta_1, \theta_2)$ . On combinera principalement deux objets différents: l'indice de Chern et les distributions de Husimi. L'indice de Chern caractérise la sensibilité des états stationnaires aux changements des conditions de périodicité. Un état stationnaire ayant une faible dépendance (pas de sensibilité) a un indice de Chern nul. Il a été observé que dans un régime fortement chaotique, beaucoup de fonctions d'ondes ont un indice de Chern non nul [6].

D'un autre côté, la distribution de Husimi, qui fournit une représentation dans l'espace de phase des états quantiques, complète l'information apportée par l'indice de Chern. Tout d'abord parce qu'on peut souvent la comparer à des distributions classiques sur l'espace de phase, et aussi parce qu'elle permet une visualisation directe dans l'espace de phase des modifications induites sur un état stationnaire par le changement des conditions de périodicité. En particulier, D.P. Arovas et al. [7] ont montré comment l'indice de Chern s'exprime à partir des zéros de la distribution de Husimi.

Un autre aspect intéressant de l'indice de Chern qui sera mis en valeur, est son lien avec les dégénérescences entre niveaux : pour un problème dépendant d'un paramètre, la variation de l'indice de Chern est liée à la présence d'une dégénérescence. L'intérêt de l'indice de Chern dans l'étude des dégénérescences entre niveaux d'énergies est apparu avec l'introduction de la phase de Berry [8].

## 1 Mécanique sur le tore.

Dans cette section, nous présentons la mécanique classique sur le tore en tant qu'espace de phase, et la mécanique quantique associée.

### 1.1 Le tore en mécanique classique

Supposons donné un Hamiltonien  $\mathcal{H}(q, p)$  à un degré de liberté sur le plan  $\mathbb{R}^2$ , périodique en position et impulsion, de périodes respectives  $Q$  et  $P$ :

$$\mathcal{H}(q + Q, p) = \mathcal{H}(q, p + P) = \mathcal{H}(q, p) \quad (1)$$

Du fait de cette périodicité, la dynamique classique, définie par les équations de Hamilton, est elle-même périodique, ou plus précisément invariante par les translations  $\vec{Q} = (Q, 0)$  et  $\vec{P} = (0, P)$ .

Equations de Hamilton :

$$\begin{cases} \partial_t q(t) = \partial_p \mathcal{H}(q, p) \\ \partial_t p(t) = -\partial_q \mathcal{H}(q, p). \end{cases} \quad (2)$$

Exemple: modèle de Harper :

$$\mathcal{H}(q, p) = -\cos(2\pi q/Q) - \frac{1}{2} \cos(2\pi p/P) \quad (3)$$

Les trajectoires sont représentées sur la figure 1.

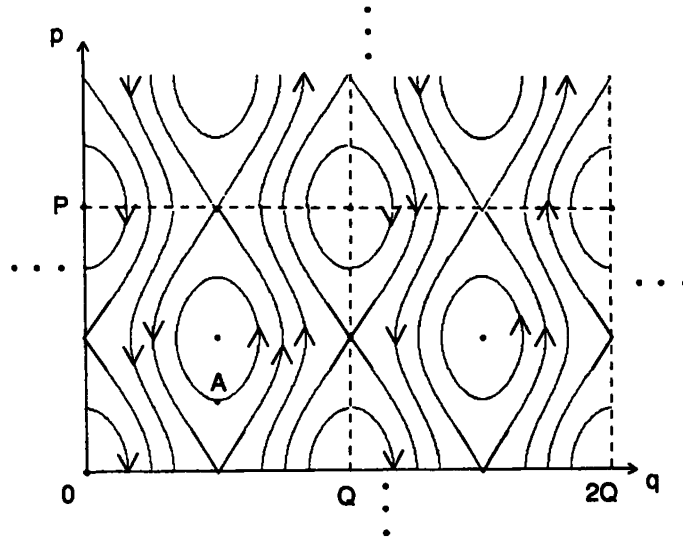


Figure 1: Trajectoires du modèle de Harper (3).

Remarque: d'après la conservation de l'énergie, et aussi du fait que ce soit un problème à un degré de liberté, les trajectoires sont localement identiques aux lignes de niveaux de la fonction  $\mathcal{H}(q, p)$ .

La propriété d'invariance de la dynamique sous les translations  $\vec{Q}$  et  $\vec{P}$  fait que nous ne perdons aucune information en identifiant les côtés opposés d'une cellule élémentaire de côtés  $(Q, P)$ , autrement dit, en identifiant tous les points du plan qui diffèrent entre eux d'une translation du type  $n_1 \vec{Q} + n_2 \vec{P}$ , avec  $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$ .

En faisant ces identifications, l'espace quotient obtenu est homéomorphe au tore  $T^2$ , et la dynamique classique sur ce tore est engendrée par le même Hamiltonien  $\mathcal{H}(q, p)$ . Afin de pouvoir étudier une dynamique plus riche, nous considérerons des Hamiltoniens

dépendants du temps au paragraphe 5. Il n'y aura plus alors les restrictions sur la dynamique imposées par la conservation de l'énergie. et nous pourrons observer dans de tels modèles une transition d'une dynamique régulière vers une dynamique chaotique.

## 1.2 Le tore en mécanique quantique

Nous supposons donné un Hamiltonien  $\hat{H}$  à un degré de liberté, opérateur hermitique sur l'espace de Hilbert  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ .

Dans les exemples que l'on traitera, un tel Hamiltonien sera donné par son expression à partir des opérateurs de position et d'impulsion  $\hat{q}$  et  $\hat{p}$  :

$$\hat{H} = \mathcal{H}(\hat{q}, \hat{p}) \quad (4)$$

(Nous rappelons que l'action des opérateurs  $\hat{q}$ . et  $\hat{p}$  sur  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  est définie par:

$$\hat{q}\Psi(x) = x\Psi(x), \quad \hat{p}\Psi(x) = -\frac{i}{\hbar}\partial_x\Psi(x) \quad (5)$$

Un vecteur de l'espace de Hilbert est noté  $|\Psi\rangle$ , et le vecteur dual correspondant est noté  $\langle\Psi|$ .)

De plus, nous supposons que l'Hamiltonien  $\hat{H}$  commute avec les opérateurs de translation en position et impulsion :

$$\hat{T}_Q = e^{-iQ\hat{p}/\hbar} \quad \hat{T}_P = e^{iP\hat{q}/\hbar}. \quad (6)$$

c'est à dire:

$$[\hat{T}_Q, \hat{H}] = [\hat{T}_P, \hat{H}] = 0, \quad (7)$$

Connaissant l'expression (4) de l'Hamiltonien, la condition de commutation (7) est vérifiée si cette expression est périodique en  $\hat{q}$  et  $\hat{p}$ :

$$\mathcal{H}(\hat{q} + Q, \hat{p}) = \mathcal{H}(\hat{q}, \hat{p} + P) = \mathcal{H}(\hat{q}, \hat{p}) \quad (8)$$

Par exemple l'Hamiltonien de Harper, obtenu par quantification de Weyl de l'Hamiltonien classique (3), vérifie de telles conditions:

$$\hat{H} = -\cos\left(2\pi\frac{\hat{q}}{Q}\right) - \frac{1}{2}\cos\left(2\pi\frac{\hat{p}}{P}\right) \quad (9)$$

Afin que, grâce aux propriétés d'invariance par translation, l'étude de la dynamique quantique puisse se simplifier, il faut supposer que les trois opérateurs  $\hat{H}$ ,  $\hat{T}_Q$  et  $\hat{T}_P$  commutent

entre eux. Car dans ce cas ces trois opérateurs sont diagonalisables simultanément.

En plus de l'équation (7), il faut donc supposer:

$$[\hat{T}_Q, \hat{T}_P] = 0 \quad (10)$$

Cette dernière équation est équivalente à:

$$QP = Nh \quad (11)$$

avec  $N \in \mathbb{N}$ , et en posant  $h = 2\pi\hbar$ .

(Pour montrer ce dernier point, nous utilisons la propriété:  $e^A e^B = e^{[A,B]} e^B e^A$ , vraie pour deux opérateurs  $A, B$  vérifiant :  $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$ ; appliquée ici à  $\hat{T}_Q = e^A \hat{T}_P = e^B$  )

La relation (11) s'interprète de la manière suivante : la surface  $QP$  du tore est un multiple entier de la constante de Planck  $h$ .

Une telle relation entre la surface de l'espace de phase classique et la constante de Planck se rencontre généralement lors de la quantification de surfaces compactes au moyen d'états cohérents [9].

Décomposons l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  en la somme directe des sous-espaces propres des opérateurs de translation  $\hat{T}_Q$  et  $\hat{T}_P$  :

$$\mathcal{H} = \iint \mathcal{H}_N(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \quad (12)$$

$$\mathcal{H}_N(\theta_1, \theta_2) = \left\{ |\Psi\rangle \in \mathcal{H} \quad \text{t.q.} \quad \begin{cases} \hat{T}_Q |\Psi\rangle = e^{i\theta_1} |\Psi\rangle \\ \hat{T}_P |\Psi\rangle = e^{i\theta_2} |\Psi\rangle \end{cases} \right\} \quad (13)$$

avec  $(\theta_1, \theta_2) \in [0; 2\pi]^2$ .

Chaque sous-espace propre  $\mathcal{H}_N(\theta_1, \theta_2)$  contient donc des fonctions d'ondes périodiques en position et impulsion (i.e. et dont la transformée de Fourier est aussi périodique), à des phases près  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . Et chaque sous-espace est de dimension finie  $N$ . (cela apparaîtra page 12, ou se montre en exhibant une base.)

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_N(\theta_1, \theta_2) = N \quad (14)$$

Ainsi, dans chaque sous-espace  $\mathcal{H}_N(\theta_1, \theta_2)$ , les états stationnaires, vecteurs propres de l'Hamiltoniens  $\hat{H}$  sont en nombre  $N$ , et le spectre est discret:

$$\hat{H} |\Psi_n(\theta_1, \theta_2)\rangle = E_n(\theta_1, \theta_2) |\Psi_n(\theta_1, \theta_2)\rangle \quad n = 1 \rightarrow N. \quad (15)$$

Par contre, à  $n$  fixé et pour  $(\theta_1, \theta_2)$  variant dans  $[0; 2\pi]^2$ , chaque niveau  $n$  d'énergie  $E_n(\theta_1, \theta_2)$  varie de façon continue et décrit une bande d'énergie (selon la terminologie de physique du solide, dans le cadre de la théorie de Bloch), c'est à dire un segment de  $\mathbb{R}$ . De la même façon, les vecteurs propres  $|\Psi_n(\theta_1, \theta_2)\rangle$  de chaque niveau  $n$  décrivent une surface dans l'espace projectif pour  $(\theta_1, \theta_2) \in [0; 2\pi]^2$ . La topologie de ce fibré en droites sera décrite dans la section 2.6, à l'aide de l'indice de Chern.

Le spectre global de  $\hat{H}$  est donc formé de  $N$  bandes.

D'après la relation (11), la limite classique  $\hbar \rightarrow 0$  est obtenue pour  $N \rightarrow +\infty$ .

On s'aperçoit qu'il y a une infinité de dynamiques quantiques d'Hamiltonien  $\hat{H}$ , une pour chaque valeur de  $(\theta_1, \theta_2) \in [0; 2\pi]^2$ , et interne à chaque sous-espace  $\mathcal{H}_N(\theta_1, \theta_2)$ . Toutes ces dynamiques ont une unique limite classique commune d'Hamiltonien  $\mathcal{H}(q, p)$  sur le tore. Mais y a-t-il une limite commune pour leur spectre et leurs états stationnaires (15) ?

Dans les exemples que nous traiterons, nous verrons qu'au contraire, les états stationnaires peuvent avoir une forte dépendance en fonction des paramètres  $(\theta_1, \theta_2)$ , et cette dépendance sera quantitativement exprimée par l'indice topologique de Chern.

Les relations (11) et (14) s'interprètent comme le fait que le nombre d'états quantiques est égal au nombre de cellules de Planck (surface élémentaire  $h$ ) contenues dans l'espace de phase.

C'est aussi cette relation que l'on retrouve dans les formules asymptotiques de Bohr-Sommerfeld, de Weyl ou de Thomas-Fermi, pour la limite  $\hbar \rightarrow 0$  :

$$\begin{aligned} \text{cardinal} \{ \text{états} |\Psi_n\rangle \text{ t.q. } E_1 < E_n < E_2 \} = & \quad (16) \\ \frac{1}{h} (\text{Volume}(q, p) \text{ t.q. } E_1 < \mathcal{H}(q, p) < E_2) + o\left(\frac{1}{h}\right) & \end{aligned}$$

La condition (11) peut paraître très restrictive, car en effet  $Q, P$  étant fixés, elle ne permet d'étudier qu'un nombre discret de valeurs de  $h$  :

$$h = \frac{1}{N}QP \quad N \in \mathbb{N} \quad (17)$$

Nous pouvons cependant obtenir un nombre dense de valeurs de  $h$  dans  $\mathbb{R}$ , en posant :

$$h = \frac{t}{N}QP \quad (N, t) \in \mathbb{N} \quad (18)$$

qui s'écrit aussi:  $Nh = (tQ)P$ .

Nous obtenons donc à nouveau l'équation (11) et la décomposition qui s'en suit de l'espace de Hilbert en sous-espaces de dimension  $N$ , à la différence près que la décomposition se



fait, cette fois-ci avec les sous-espaces propres de  $\hat{T}_{(tQ)}$  et  $\hat{T}_P$ .

Classiquement, cela revient à considérer un espace de phase toroïdal, contenant  $t$  répliques de la cellule de base  $(Q, P)$ .

D'après (18), nous déduisons que lorsque  $h$  varie de façon continue parmi les réels, le spectre de l'Hamiltonien  $\hat{H}$  peut présenter une structure compliquée en cantor, pour la première fois mis en évidence par R.D. Hofstadter [2] et ensuite analysée par M. Wilkinson [10]. En effet, en prenant  $QP = 1$ , chaque fois que  $h$  est rationnel,  $h = \frac{t}{N}$ , le spectre est structuré en  $N$  bandes.

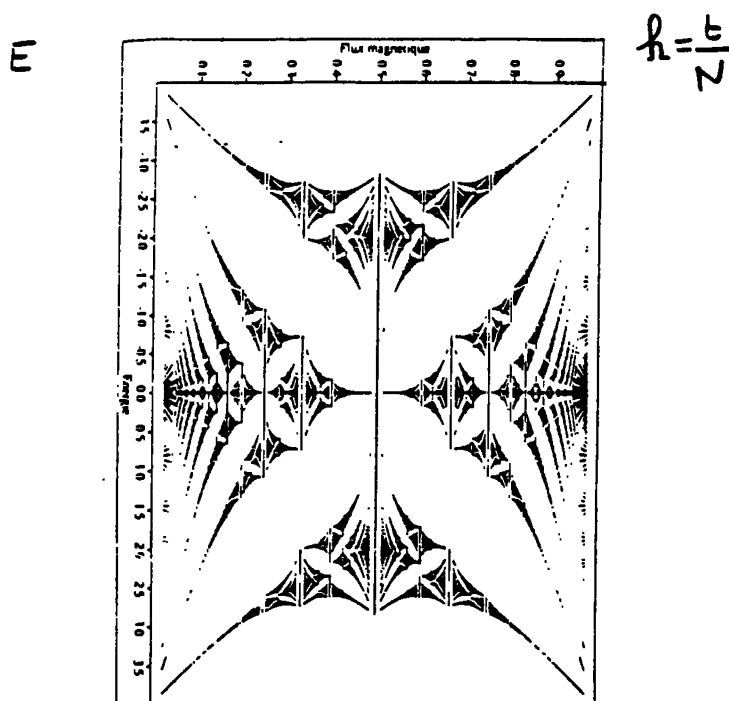


Figure 2: Structure en fractale du spectre "papillon de Hofstadter" du modèle de Harper (tirée de [11]). Pour  $h = \frac{t}{N}$ , fraction rationnelle irréductible donnée, le spectre est structuré en  $N$  bandes. Notons que si  $N$  est pair, les deux bandes centrales sont dégénérées.

## 2 Les états cohérents standard

Les états cohérents peuvent généralement être construits dans les problèmes habituels de mécanique quantique, traitant un système de particules dans l'espace, soumises à un potentiel. Ils apparaissent aussi en seconde quantification, dans le cas d'un champ bosonique, et sont ainsi beaucoup utilisés en physique nucléaire ou encore en optique

pour étudier le champ de photons [12].

Mais le concept d'états cohérents est assez général, et est associé à la représentation linéaire unitaire de groupes de Lie [9]. pour les états cohérents standard, il s'agit du groupe de Weyl  $\mathcal{W}$ . Les états cohérents touchent ainsi un large éventail de domaines en physique [13], et ont des propriétés particulièrement bien adaptées pour envisager la limite classique.

## 2.1 Présentation et définition.

Nous allons rappeler la définition et les propriétés générales des états cohérents du plan (ou standard), que l'on peut trouver dans le livre de A. Perelomov [9]. Pour un système à un degré de liberté, les opérateurs de position  $\hat{q}$  et d'impulsion  $\hat{p}$  vérifient:

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar Id \quad (19)$$

Il est commode de considérer les opérateurs de création  $a^+$  et d'annihilation  $a$  :

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\hat{q} + i\hat{p}), \quad a^+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\hat{q} - i\hat{p}) \quad (20)$$

qui vérifient:

$$[a, a^+] = Id \quad (21)$$

$(a, a^+, Id)$  ou  $(\hat{q}, \hat{p}, Id)$  sont des bases de l'algèbre de Weyl  $\mathcal{W}_1$ , et génèrent le groupe de Weyl  $\mathcal{W}_1$ . Une représentation unitaire irréductible du groupe de Weyl  $\mathcal{W}_1$  est obtenue au moyen des opérateurs  $T(g)$  agissant dans l'espace de Hilbert  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  :

$$T(g) = \exp(is Id)D(z), \quad s \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{Z}, g \in \mathcal{W}_1. \quad (22)$$

avec  $D(z) = \exp(za^+ - \bar{z}a)$ . L'espace de Hilbert qui est l'espace de représentation, est engendré par les vecteurs  $|n\rangle$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , (qui sont les états propres de l'oscillateur harmonique  $\hat{H}_0 = \hbar(a^+a + \frac{1}{2}) = \hat{q}^2 + \hat{p}^2$ ):

$$\begin{aligned} a|0\rangle_n &= 0 \\ |n\rangle_n &= \frac{1}{\sqrt{n!}}a^{+n}|0\rangle \\ Id &= \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle_n \langle n| \end{aligned} \quad (23)$$

Par définition, les états cohérents sont les états quantiques obtenus en faisant agir les éléments  $T(g)$  du groupe  $\mathcal{W}_1$  sur le vecteur normalisé  $|0\rangle$ . Le sous groupe d'isotropie

de cette action est  $H = \{\exp(is Id), s \in \mathbb{R}\}$  qui laisse l'état  $|0\rangle$  invariant. Les états cohérents standard forment donc une surface à deux dimensions réelles de l'espace projectif, paramétrisée par  $z \in \mathbb{C}$ , et dont les vecteurs normalisés représentants sont:

$$|z\rangle_n = D(z)|0\rangle, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (24)$$

La fonction d'onde d'un état cohérent standard (ou représentation position "x") est :

$$\Psi(x) = \left(\frac{1}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left[\frac{i}{\hbar}px\right] \exp\left[-\frac{(x-q)^2}{2\hbar}\right] \exp\left[-i\frac{qp}{2\hbar}\right] \quad (25)$$

avec:

$$z = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(q + ip). \quad (26)$$

Le module est donc une gaussienne de largeur  $\sim \sqrt{\hbar}$  centrée en  $x = q$ . Sa transformée de Fourier (ou représentation impulsion "p") est:

$$\tilde{\Psi}(y) = \left(\frac{1}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{i}{\hbar}qy\right] \exp\left[-\frac{(y-p)^2}{2\hbar}\right] \exp\left[-i\frac{qp}{2\hbar}\right] \quad (27)$$

dont le module est une gaussienne de largeur  $\sim \sqrt{\hbar}$  centrée en  $y = p$ . On note aussi les états cohérents par  $|q, p\rangle_n = |z\rangle_n$ . C'est cette propriété particulière d'être des états localisés en position et impulsion à la limite  $\hbar \rightarrow 0$  qui constitue l'intérêt des états cohérents dans l'approche semi-classique et qui fait aussi qu'on les surnomme états quasi-classiques.

L'action particulière de  $a$  sur l'état  $|0\rangle$ , voir (23), fait que l'on obtient une représentation holomorphe des états cohérents à partir de (24):

$$|z\rangle = e^{za^+} |0\rangle_n \quad (28)$$

Ces vecteurs  $|z\rangle$  ne sont pas normalisés, et:

$$|z\rangle_n = \frac{|z\rangle}{\langle z|z\rangle^{1/2}} \quad (29)$$

avec  $\langle z|z\rangle = e^{z\bar{z}}$ .

## 2.2 Représentation de Bargmann et de Husimi

Une relation importante est la relation de fermeture qui est une conséquence du lemme de Schur combiné au fait que  $W_1$  agit de façon irréductible dans  $\mathcal{H}$ :

$$Id = \int_{\mathbb{C}} d\mu(z) |z\rangle_n \langle z| \quad (30)$$

avec:  $d\mu(z) = \frac{1}{2\pi} idz \wedge d\bar{z}$ . Cette relation de fermeture exprime que les états cohérents forment une famille génératrice surcomplète de l'espace de Hilbert. Une représentation d'un état quantique  $|\Psi\rangle$  sur l'espace de phase s'obtient donc naturellement en considérant ses composantes  ${}_n\langle qp|\Psi\rangle$  dans la famille des états cohérents à l'aide de cette relation de fermeture.

Cela nous amène à deux représentations intéressantes:

1. La représentation de Bargmann  $\Psi(z) = \langle z|\Psi\rangle$  qui est une fonction anti-holomorphe en  $z = (q + ip)/\sqrt{2\hbar}$ . Des propriétés particulières en découlent, notamment concernant ses zéros (i.e. les lieux où elle est nulle).
2. La représentation de Husimi  $\mathcal{H}_\Psi(z) = |{}_n\langle z|\Psi\rangle|^2$  qui est une fonction positive sur l'espace de phase et qui permet de faire des correspondances assez directes avec la mécanique classique.

Bien qu'ils forment une base surcomplète, les états cohérents sont intéressants car ils deviennent orthogonaux à la limite  $\hbar \rightarrow 0$ :

$$|{}_n\langle q', p'|q, p\rangle_n|^2 = e^{-\frac{(q-q')^2 + (p-p')^2}{2\hbar}} \quad (\rightarrow 0 \text{ si } (q, p) \neq (q', p')) \quad (31)$$

En particulier la distribution de Husimi d'un état cohérent  $|q_0, p_0\rangle$  est:

$$\mathcal{H}_{q_0, p_0}(q, p) = e^{-\frac{1}{2\hbar}((q-q_0)^2 + (p-p_0)^2)} \quad (32)$$

C'est donc une gaussienne circulaire, de centre  $(q_0, p_0)$  et de largeur  $\sim \sqrt{\hbar}$ .

## Propriétés :

### 1. Les zéros des distributions de Bargmann et de Husimi

Les résultats qui suivent ont été obtenus par A. Voros et P. Leboeuf [14, 15]. Considérons un état  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_N(\theta_1, \theta_2)$ , avec  $\vec{\theta} \in [0, 2\pi]^2$ .

La représentation de Bargmann  $\Psi_{\vec{\theta}}(z) = \langle z|\Psi\rangle$  est une fonction thêta de Jacobi. Ses zéros sont périodiques dans le plan  $\mathbb{C}$ , de période  $\vec{Q}$  et  $\vec{P}$ .

Les zéros  $(z_k)_k$  situés dans une cellule vérifient :

$$\text{cardinal}(z_k) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\Psi'(z)}{\Psi(z)} d\bar{z} = N \quad (33)$$

Il y a donc  $N$  zéros dans une cellule. Et:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \bar{z}_k &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\bar{z}} \frac{\Psi'(z)}{\Psi(z)} d\bar{z} \\ &= -\frac{N}{2}(\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) + (\bar{\omega}_1 \frac{\theta_2}{2\pi} - \frac{\theta_1}{2\pi} \bar{\omega}_2) \end{aligned} \quad (34)$$

avec  $\omega_1 = \frac{Q}{\sqrt{2\hbar}}$  et  $\omega_2 = i\frac{P}{\sqrt{2\hbar}}$ . Le barycentre des zéros est donc fixé.

Finalement, comme l'ont mit en valeur P. Leboeuf et A. Voros [16, 15], signalons qu'un théorème de factorisation de Weierstrass affirme que la fonction  $\Psi(z)$  est déterminée (sauf sa phase globale) par l'emplacement des  $N$  zéros ( $z_k$ ) dans la cellule.

Remarquons au sujet des dimensions, que l'espace des  $N$ -uplets de zéros, vérifiant (34) est de dimension complexe  $(N - 1)$ . En rajoutant une dimension correspondant à la multiplication des fonctions par un nombre complexe (qui correspond à la liberté de phase globale), on retrouve le résultat (14), qui affirme que la dimension de  $\mathcal{H}_N(\theta_1, \theta_2)$  est  $N$ .

La distribution de Husimi  $\mathcal{H}_\Psi$  est périodique sur le plan et donc définie sur le tore. Les zéros de  $\mathcal{H}_\Psi(z)$  sont les zéros de  $\Psi(z)$ , qui caractérisent l'état quantique.

2. Evolution d'un état cohérent Une autre propriété qui fait que les états cohérents ont un rôle privilégié dans la limite classique est que un état cohérent reste approximativement un état cohérent lors de son évolution sous l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{d|\Psi(t)\rangle}{dt} = \hat{H}|\Psi(t)\rangle \quad |\Psi(0)\rangle = |q_0, p_0\rangle \quad (35)$$

La figure 3 montre par exemple la distribution de Husimi de l'évolution d'un état cohérent avec l'Hamiltonien de Harper (9).

### 2.3 Distribution de Husimi des états stationnaires d'une dynamique intégrable.

Pour une dynamique intégrable, générée par un Hamiltonien indépendant du temps, les méthodes semi-classiques comme la méthode W.K.B. montrent que certaines trajectoires périodiques (dites quantifiées) sont associés à des états stationnaires. Or les trajectoires se divisent en trois classes :

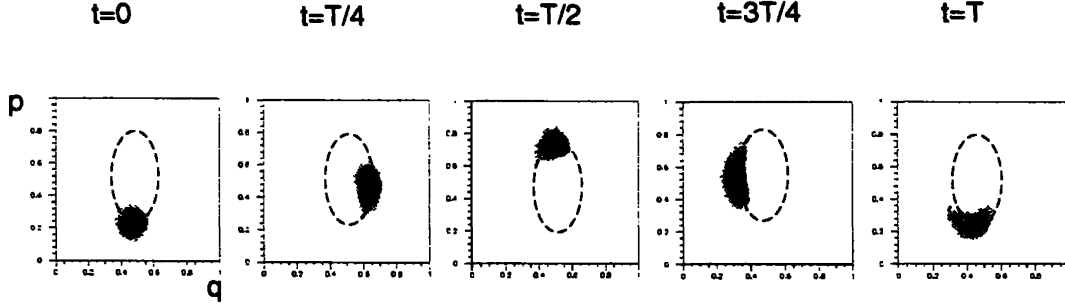


Figure 3:  $N = 41$ . Distribution de Husimi dans l'espace de phase de l'évolution d'un état initialement cohérent. Cet état est placé au point A de la figure 1. Les niveaux de gris correspondent à l'intensité de la fonction  $|\langle qp|\Psi(t)\rangle|^2$ . En première approximation, le centre de la distribution se déplace comme un point de l'espace de phase avec les équations classiques de Hamilton. sur une trajectoire périodique de période  $T=0.284$

1. Les trajectoires périodiques contractibles.
2. Les trajectoires périodiques non-contractibles.
3. Correspondant aux valeurs exceptionnelles de l'énergie où le Hessien de l'Hamiltonien est nul, il y a les points fixes (stables et instables) et les séparatrices.

Les articles [17, 18, 19] décrivent les états stationnaires en représentation de Husimi dans le cas d'une dynamique intégrable, à l'aide d'une méthode W.K.B. modifiée (en travaillant sur l'espace de phase, ce qui évite les problèmes de raccordements liés à la présence de caustiques, propres à la représentation en position). La méthode W.K.B. dans le cas à une dimension, permet de construire des quasi-modes associés à des trajectoires périodiques. Un quasi-mode est un état quantique  $\Psi$  dont les régions de fortes amplitudes de la distribution de Husimi sont localisées sur une trajectoire périodique, et ce quasi-mode vérifie l'équation de Schrödinger stationnaire  $\hat{H}|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$  à l'ordre  $\hbar^\nu$ , pour tout  $\nu \geq 2$ , et dans la limite  $\hbar \rightarrow 0$ .

Voici le résultat obtenu dans les articles [17, 18, 19]:

Dans la limite classique  $\hbar \rightarrow 0$ , une trajectoire  $\Gamma$  d'énergie  $E$  supporte un quasi-mode si elle vérifie la condition de quantification de Bohr-Sommerfeld:

$$\oint_{\Gamma} pdq = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar + o(\hbar) \quad n \in \mathbf{N} \quad (36)$$

Alors, la distribution de Husimi du quasi-mode est (à l'ordre  $\hbar$ ):

$$\mathcal{H}_{\Psi}(q, p) = \mathcal{N} \frac{1}{v(q, p)} \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \left(\frac{\mathcal{H}_W(q, p) - E}{v(q, p)}\right)^2\right) \quad (37)$$

où  $\mathcal{H}_W(q, p)$  est l'Hamiltonien classique (symbole de Weyl), et  $v(q, p)$  est la vitesse du point  $(q, p)$  sur l'espace de phase.

L'énergie du quasi mode est  $E$ , l'énergie de la trajectoire classique (à l'ordre  $\hbar$ ).

En général un quasi-mode est un état stationnaire à la limite  $\hbar \rightarrow 0$ , sauf dans le cas où plusieurs quasi-modes se trouvent avoir la même énergie  $E$ . Il y a alors un phénomène de résonance. Mais ce cas est exceptionnel en ce sens qu'il est non générique. Il est par exemple dû à des symétries de l'Hamiltonien, ou pour un Hamiltonien dépendant d'un paramètre, à des valeurs particulières du paramètre.

L'expression (37), nous renseigne sur la distribution de Husimi de l'état stationnaire seulement au voisinage de la trajectoire périodique quantifiée, mais P. Leboeuf et A. Voros [14, 16, 15], ont montré que l'on pouvait avoir des informations aussi sur la distribution dans des régions où elle est très faible en intensité, notamment là où elle s'annule. Plus précisément, nous avons vu d'après (33) que la distribution s'annule en  $N$  points de l'espace de phase. Lorsque la dynamique est intégrable, ces  $N$  zéros se situent sur des lignes et sont éloignés les uns des autres d'une distance de l'ordre de  $\hbar$ . L'argument, conforté par les expériences numériques, est basé sur l'expression semi-classique W.K.B. de l'état stationnaire.

De plus, la méthode W.K.B. montre que pour une trajectoire quantifiée vérifiant (36) avec  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction de Bargmann du quasi-mode vérifie:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\Psi'(z)}{\Psi(z)} d\bar{z} = n \quad (38)$$

et donc la fonction de Bargmann comme la distribution de Husimi contiennent  $n$  zéros à l'intérieur de la trajectoire (et  $N - n$  zéros à l'extérieur).

Remarquons que l'expression (37) ne fait pas intervenir les paramètres de périodicité de la fonction d'onde  $(\theta_1, \theta_2)$ . Par conséquent, l'état stationnaire  $|\Psi_n(\theta_1, \theta_2)\rangle$  (voir équation (15)) associé à une trajectoire contractible quantifiée, ne dépend pas de  $(\theta_1, \theta_2)$  (à tout ordre en  $\hbar$ ) pour  $\hbar \rightarrow 0$ , et son énergie  $E_n(\theta_1, \theta_2)$  est elle même constante (à  $\hbar^\infty$  près). Autrement dit, la bande d'énergie  $E_n(\theta_1, \theta_2)$  a une largeur exponentiellement faible  $\propto \hbar^\alpha \exp\left(-\frac{\epsilon}{\hbar}\right)$ , que M. Wilkinson [10] a évalué au moyen de corrections semi-classiques pour l'effet tunnel entre différentes cellules, et la distribution de Husimi de  $|\Psi_n(\theta_1, \theta_2)\rangle$  ne fluctue pas avec  $(\theta_1, \theta_2)$ . Elle est figée et concentrée sur la trajectoire classique.

Pour les trajectoires non contractibles, les résultats sont très proches, à la différence que l'énergie semi-classique dépend de  $\theta_1, \theta_2$ , [10].

### 3 Indice de Chern pour caractériser la topologie des bandes d'énergie.

#### 3.1 Introduction

Lorsque  $(\theta_1, \theta_2)$  varie dans le tore  $T_{\vec{\theta}}^2 = [0: 2\pi]^2$ , l'état stationnaire  $[\Psi_n(\vec{\theta})]$  de la bande  $n$  (15) varie et décrit en général une surface notée  $\mathcal{T}$  de dimension deux dans l'espace des rayons quantiques (l'espace projectif). On fait l'hypothèse qu'il ne se produit pas de dégénérescence. Cette surface  $\mathcal{T}$  est paramétrée par  $(\theta_1, \theta_2)$  et elle est donc topologiquement équivalente au tore  $T^2$ . Or à un rayon quantique donné  $[\Psi]$  (un point de l'espace projectif), correspond toute une famille d'états quantiques, vecteurs de l'espace de Hilbert, colinéaires entre eux ( $|\Psi\rangle \sim |\Phi\rangle$  si  $|\Psi\rangle = \lambda|\Phi\rangle$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ ). Cette famille isomorphe au plan complexe  $\mathbb{C}$ , est appelée la fibre de  $[\Psi]$ , et est notée  $\mathcal{F}_{\Psi}$ .

Lorsque le rayon  $[\Psi]$  varie de façon continue sur la surface  $\mathcal{T}$ , la famille de vecteurs  $\mathcal{F}_{\Psi}$  varie aussi de façon continue dans l'espace de Hilbert. Voir la figure 4. L'ensemble des fibres  $\mathcal{F}_n = \cup_{[\Psi] \in \mathcal{T}} \mathcal{F}_{\Psi}$ , est un espace fibré en droites complexes.  $\mathcal{T}$  est appelé l'espace de base, et  $\mathbb{C}$  est la fibre caractéristique, car chaque fibre  $\mathcal{F}_{\Psi}$  est isomorphe à  $\mathbb{C}$ .

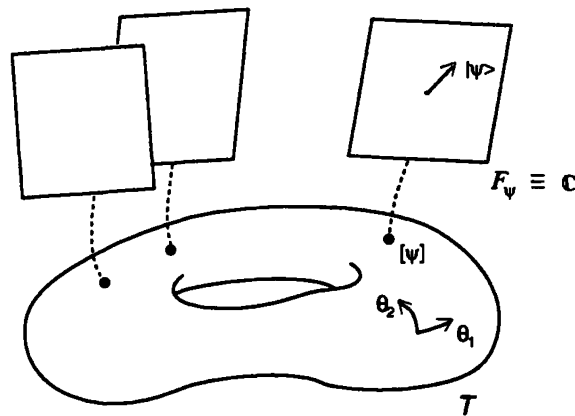


Figure 4: Espace fibré  $\mathcal{F}_n$  sur l'espace des rayons  $[\Psi_n(\vec{\theta})] \in \mathcal{T}$  de la bande d'énergie  $n$ .

Il est important de remarquer que deux espaces fibrés peuvent ne pas être topologiquement équivalents, bien que leur espace de base soit topologiquement équivalents (ici au



tore  $T^2$ ).

L'espace fibré est dit trivial, si il est topologiquement équivalent à l'espace produit direct:  $\mathcal{T} \times \mathbb{C}$ .

Pour distinguer les espaces fibrés non topologiquement équivalents, on leur associe des objets mathématiques appelés classes caractéristiques, qui sont des classes de cohomologie de l'espace de base [20, 21]. Dans le cas qui nous intéresse, la topologie de l'espace fibré  $\mathcal{F}_n$  est caractérisée par un nombre entier  $C_n \in \mathbb{Z}$  appelé indice de Chern de la bande  $n$ , qui caractérise l'entrelacement global des fibres de la figure 4.

Premièrement, l'indice de Chern s'exprime comme l'intégrale de la courbure de Berry sur le tore  $T_{\vec{\theta}}^2$ . Cette façon de calculer l'indice de Chern permet d'obtenir une formule applicable numériquement. et a permis à D.J. Thouless et al. [4] de le relier à la conductivité de Hall.

$$C_n = \frac{i}{2\pi} \iint_{\mathcal{T}} (\langle \partial_{\theta_2} \Psi_n | \partial_{\theta_1} \Psi_n \rangle - \langle \partial_{\theta_1} \Psi_n | \partial_{\theta_2} \Psi_n \rangle) d\theta_1 \wedge d\theta_2 \quad (39)$$

Deuxièmement, D.P. Arovas et al. [7] ont proposé une interprétation de l'indice de Chern au moyen des zéros de la distribution de Husimi des états stationnaires. Précisément, nous avons vu qu'un état stationnaire  $|\Psi_n(\vec{\theta})\rangle$  est caractérisé par les zéros de sa distribution de Husimi. Lorsque  $(\theta_1, \theta_2)$  varie, les zéros se déplacent sur l'espace de phase (le tore  $(q, p)$ ). L'indice de Chern est alors le nombre de fois, compté algébriquement, où un point donné de l'espace de phase est recouvert par les zéros de la distribution de Husimi. Par cette caractérisation, on peut interpréter l'indice de Chern comme mesurant la sensibilité de l'état stationnaire  $\Psi_n(\theta_1, \theta_2)$  avec les conditions de périodicité  $(\theta_1, \theta_2)$ . Par exemple, pour une dynamique régulière, les états stationnaires associés à une trajectoire contractible ont leur distribution de Husimi localisée sur la trajectoire. Lorsque  $(\theta_1, \theta_2)$  varie, les zéros ne peuvent donc pas passer sur cette trajectoire et *l'indice de Chern est nul*. Cela est une première correspondance que l'on peut faire entre la nature de la dynamique classique et la valeur de l'indice de Chern.

Nous verrons d'autres correspondances possibles autour d'exemples précis dans les sections suivantes. Il s'agira par exemple dans le cas régulier d'étudier l'indice de Chern pour des bandes d'énergie quantifiant une séparatrice non-contractible, ou des trajectoires présentant des résonances et de l'effet tunnel. Et lors de la transition d'une dynamique intégrable vers une dynamique chaotique, P. Leboeuf et al. [6] ont observé de même, au niveau quantique, un changement de régime net à travers les variations fréquentes des indices de Chern et la présence de nombreuses dégénérescences.

En supposant que chaque bande  $n$  est non dégénérée, et en notant  $C_n$  son indice de Chern,

il y a la relation suivante :

$$\sum_{n=1}^N C_n = 1 \quad (40)$$

Cette formule est démontrée à l'aide de la formule de Berry dans [6], et à l'aide d'arguments plus géométriques par Yves Colin de Verdières [22].

### 3.2 Indice de Chern et dégénérescence entre niveaux.

L'étude des dégénérescences dans un spectre au moyen de la phase de Berry et de l'indice de Chern a vraiment débuté autour du célèbre article de M.V.Berry [8, 23] et de l'interprétation géométrique donnée par B. Simon [24].

L'indice de Chern d'une bande est un invariant topologique. Seule la présence d'une dégénérescence entre niveaux peut donc causer une variation de l'indice de Chern.

Pour une famille d'opérateurs hermitiques (ou unitaires), dépendants continument de plusieurs paramètres réels, l'ensemble des paramètres pour lesquels il y a une dégénérescence entre deux niveaux, est génériquement de codimension 3.

Dans notre étude de la dynamique quantique sur le tore, l'équation aux valeurs propres (15) dépend déjà de deux paramètres  $(\theta_1, \theta_2)$ . C'est pourquoi, si l'on considère une famille à un paramètre d'Hamiltoniens  $\hat{H}(\gamma)$ , des dégénérescences entre niveaux se produisent génériquement pour des valeurs isolées  $(\theta_1^*, \theta_2^*, \gamma^*)$ . Si l'on suit la valeur de l'indice de Chern d'une bande donnée, en fonction de  $\gamma$ , elles sera constante sur des intervalles délimités par la présence des dégénérescences, en  $(\gamma_1^*, \gamma_2^*, \dots)$ .

Si cette famille  $\hat{H}(\gamma)$  est générique, sans symétrie particulière, la variation de l'indice de Chern d'une bande au passage d'une dégénérescence est  $\Delta C = \pm 1$ .

Remarquons que pour une famille d'Hamiltoniens dépendant de deux paramètres,  $\hat{H}(\gamma_1, \gamma_2)$ , et pour un niveau donné, le lieu des dégénérescences sont des lignes (de codimension un). L'indice de Chern du niveau est défini hors de ces lignes, et il varie de  $\pm 1$ , en les traversant. Ces lignes sont ainsi transversalement orientées.

Dans les sections suivantes, nous nous intéresserons particulièrement à l'aspect qualitatif que prennent ces lignes de dégénérescence selon la nature de la dynamique classique. Nous verrons que pour une dynamique intégrable, et pour le phénomène de résonance entre deux trajectoires contractibles, les lignes de dégénérescences forment des boucles de petit diamètre, et ces boucles sont alignées, voir figure 19.

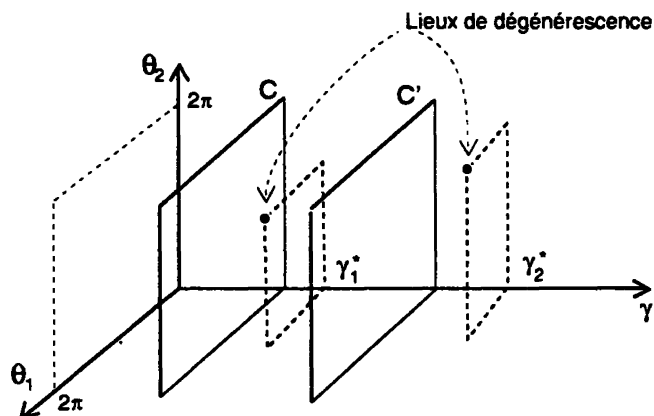


Figure 5: Espace des paramètres  $(\theta_1, \theta_2, \gamma)$ , et présence de dégénérescences. L'indice de Chern est défini sur chaque plan  $\gamma = \text{constante}$ . A une dégénérescence en  $\gamma_i^*$  correspond une variation de l'indice de Chern  $\Delta C = C' - C$ .

Par contre pour une dynamique chaotique, les lignes ne sont plus refermées sur elles-mêmes, et se développent sur l'espace des paramètres avec une certaine densité.

## 4 L'indice de Chern dans des modèles intégrables

Les propriétés des distributions de Husimi à la limite semi-classique, et l'indice de Chern ayant été présentés séparément dans les sections précédentes, nous allons maintenant étudier l'indice de Chern dans la limite semi-classique, autour de quelques exemples.

Dans cette section, nous allons nous limiter à une dynamique classique intégrable sur le tore (définie par un Hamiltonien indépendant du temps), et nous essayerons de dégager des règles de correspondance entre la dynamique classique d'une part et la valeur des indices de Chern d'autre part. Au premier paragraphe, l'indice de Chern non nul est associé à une trajectoire non contractible particulière, puisqu'il s'agit d'une séparatrice. Nous étudierons ensuite autour d'exemples, le cas d'une résonance entre deux trajectoires contractibles en dégagant une règle qualitative pour une famille d'Hamiltoniens à deux paramètres, montrant que les lignes de dégénérescence forment des boucles très petites et alignées.

## 4.1 Modèle de Harper à séparatrice unique

Le modèle suivant est une extension à un paramètre du modèle de Harper (3). Voici l'Hamiltonien classique dépendant du paramètre  $D \in [0, 1]$ :

$$\mathcal{H}_S(q, p) = -\cos(2\pi p) - \cos(2\pi q) - D \cos(2\pi(q - p)) \quad (41)$$

La figure 6 montre les trajectoires (i.e. les lignes de niveau de  $\mathcal{H}_S$ ) pour différentes valeurs de  $D$ .

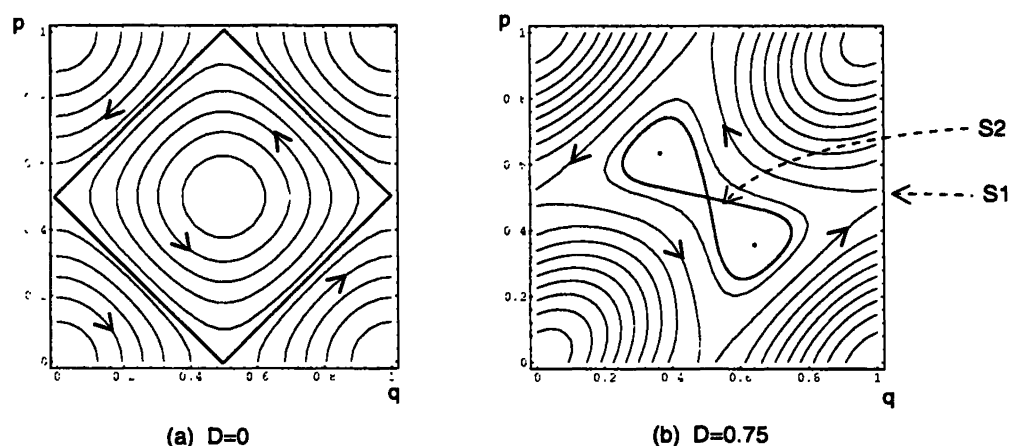


Figure 6: Trajectoires de l'Hamiltonien  $\mathcal{H}_S$ , (41).

L'intérêt réside dans le fait que la dynamique ne possède que des trajectoires contractibles hormis une séparatrice  $S_1$  (et deux points fixes instables). D'après la propriété qui est que l'indice de Chern associé à une trajectoire contractible est nul, et le fait que la somme des indices de Chern est égal à un (40), on déduit que les indices de Chern des bandes sont nuls sauf pour une (ou éventuellement plusieurs) bande, d'énergie voisine de l'énergie de la séparatrice.

Une nouvelle séparatrice  $S_2$  et deux maxima apparaissent pour  $D > \frac{1}{2}$ . La figure 7 montre l'énergie classique des différents points fixes en fonction de  $D$ .

Nous allons dans la suite nous intéresser à la séparatrice non contractible  $S_1$ . Le fait essentiel est que lorsque  $D$  augmente, le volume d'espace de phase des trajectoires contractibles d'énergie  $E < E_{S_1}$  augmente. Cela est visible sur la figure (6). Il en découle d'après la formule semi-classique de Weyl (16), que le nombre d'états stationnaires d'énergie  $E < E_{S_1}$  augmente, et ainsi que l'indice de Chern non nul, passe tour à tour

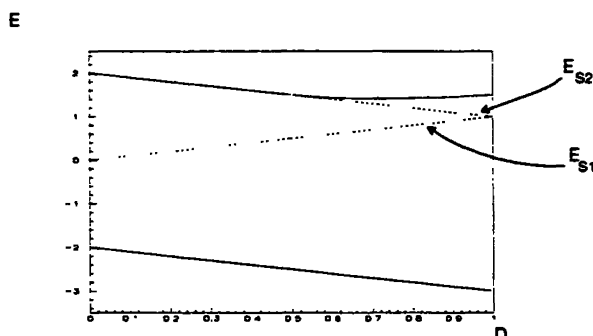


Figure 7: Points fixes de l'Hamiltonien  $\mathcal{H}_S$ , (41).

—: point fixes stable (minimum et maximum de  $\mathcal{H}$ ).

.....: point fixe instable (et séparatrices).

d'une bande d'énergie à la bande supérieure lorsque  $D$  augmente, de façon à rester associée à une bande d'énergie voisine de  $E_{S_1}$ . Nous avons vu que le changement d'indice de Chern implique une dégénérescence entre niveaux, et donc le spectre quantique doit présenter une série de dégénérescences localisées près de l'énergie de la séparatrice.

La figure (8). résultat d'un calcul numérique. montre que cela se produit effectivement. On y observe que l'énergie des dégénérescences suit de très près l'énergie de la séparatrice. De plus, comme prévu par des méthodes semi-classique, la largeur des bandes d'énergie quantifiant des trajectoires contractibles est très étroite, sauf au voisinage de la séparatrice non contractible.

Sur la figure 9, on peut observer la distribution de Husimi des états de la bande  $\Psi_{13}$  pour  $D = 0.5$ . et différentes valeurs de  $(\theta_1, \theta_2)$ . L'indice de Chern est non nul  $C_{13} = 1$ . Lorsque  $(\theta_1, \theta_2)$  varie, les zéros recouvrent une fois l'espace de phase, et en particulier la figure 9 montre des états pour lesquels les zéros sont situés aux points fixes instables. On remarque de plus que un zéro franchit la séparatrice lorsque  $\vec{\theta}$  varie : pour  $\vec{\theta} = (\pi, \pi)$ , il y a 8 zéros à "l'intérieur" de la séparatrice et 13 à l'extérieur, Pour  $\vec{\theta} = (0, 0)$ , il y a 9 zéros à l'intérieur et 12 à l'extérieur.

## 4.2 Résonance entre deux trajectoires contractibles

Dans ce paragraphe, nous allons nous intéresser à la valeur que peut prendre l'indice de Chern si il y a un effet de résonance entre deux trajectoires contractibles quantifiées. Cet effet de résonance s'observe par exemple pour une dynamique possédant "deux puits" et lorsque ceux-ci sont symétriques, ou s'ils sont dissymétriques mais dépendant d'un paramètre, et la résonance se produit pour des valeurs particulières du paramètre.

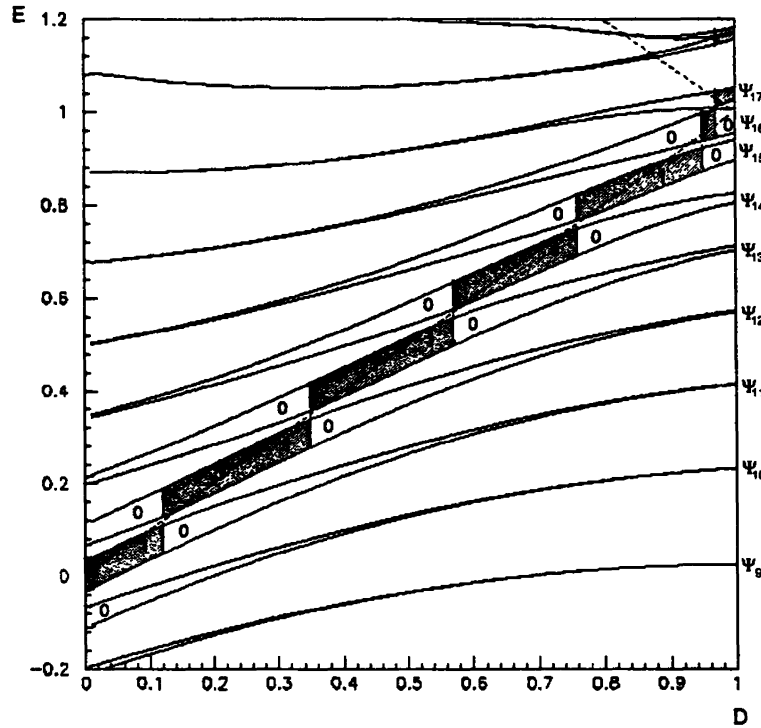


Figure 8: Bandes d'énergie et leur indice de Chern pour l'Hamiltonien  $\mathcal{H}_S$ , (41). L'énergie des séparatrices classiques  $S_1$  et  $S_2$ , reportée de la figure 7, est en ligne pointillée. Un segment vertical indique la présence d'une dégénérescence. (A cause d'une trop faible discrétisation en  $(\theta_1, \theta_2)$ , sur la figure les bandes ne se touchent pas lors d'une dégénérescence. Elles sont en réalité légèrement plus larges et se touchent.)

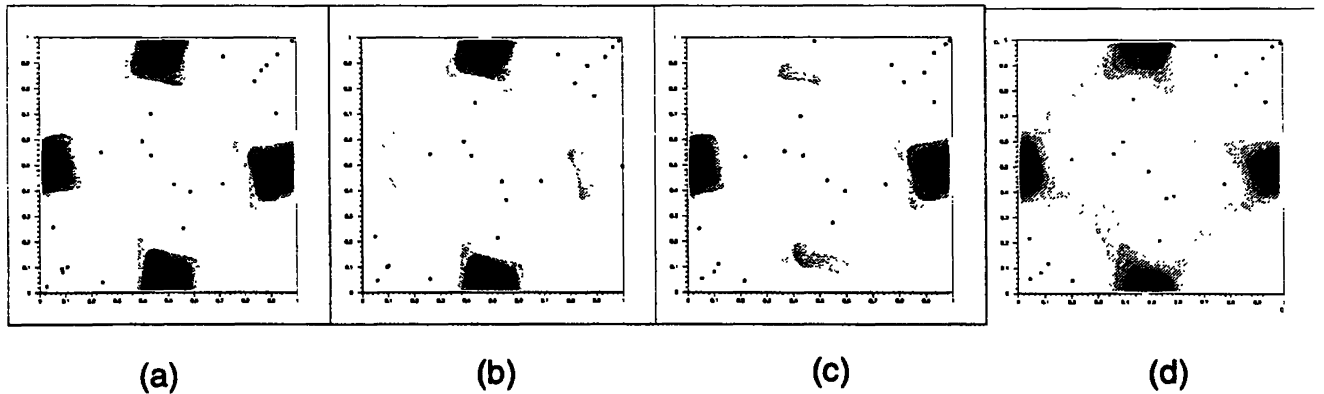


Figure 9: Distribution de Husimi de la bande  $\Psi_{13}$ , avec un indice de Chern égal à un.  $D = 0.5$ ,  $N = 21$ . Les étoiles marquent les zéros de la distribution.

(a)  $\vec{\theta} = (\pi, \pi)$ : il y a une forte intensité sur chaque point fixe et 8 zéros sont au centre.

(b)  $\vec{\theta} = (0, \pi)$ : un zéro se trouve sur le point fixe instable  $(q, p) = (0, 0.5)$ .

(c)  $\vec{\theta} = (\pi, 0)$ : un zéro se trouve sur l'autre point fixe instable  $(q, p) = (0.5, 0)$ .

(d)  $\vec{\theta} = (0, 0)$ : il y a une forte intensité sur chaque point fixe et 9 zéros sont au centre.

La symétrie entre les deux puits peut être une symétrie par translation ou par réflexion. Nous allons tout d'abord expérimenter numériquement trois Hamiltoniens correspondant à ces différents cas de résonance. Nous présenterons ensuite une règle générale qui se dégage de ces résultats.

#### 4.2.1 Deux modèles numériques

##### A) Deux puits symétriques par translation

Considérons l'Hamiltonien suivant dépendant du paramètre  $V \in [0, 1/2]$ :

$$\mathcal{H}_T(q, p) = -\cos(2\pi q) - \cos(4\pi p) - \frac{1}{4}\cos(4\pi q + \frac{\pi}{4}) - V\cos(8\pi p + \frac{\pi}{2}) \quad (42)$$

La figure 10 montre les trajectoires. Cet Hamiltonien est choisi tel que pour  $V = 0$ , les deux puits (de maximum) au centre de la figure soient symétriques à la fois par la translation  $T_{p=1/2}$  et par réflexion par rapport à la droite  $p = 1/2$ . Ensuite pour  $V > 0$ , la symétrie par réflexion est brisée, et ne subsiste que la symétrie par translation. Ce sont donc les bandes dans les extrémités du spectre qui nous intéressent.

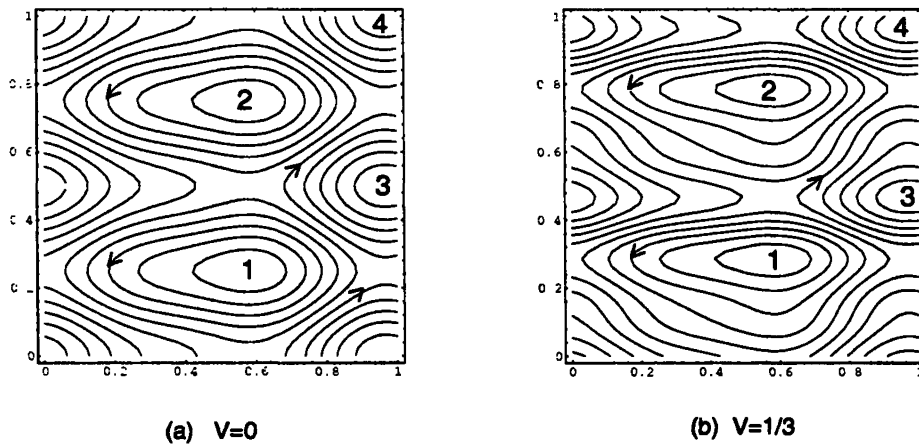


Figure 10: Trajectoires de l'Hamiltonien  $\mathcal{H}_T$  (42).

La figure 11 montre le spectre en bande ainsi que leur indice de Chern, en fonction de  $V$ , pour  $N = 11$ .

L'observation principale est que les indices de Chern ne sont pas affectés par la brisure de la symétrie par réflexion. Ils prennent les valeurs prédites par D.J.Thouless et al. [4],  $\pm 1$  par doublet de bande (la valeur  $+1$  est prise par la bande d'énergie extrême).

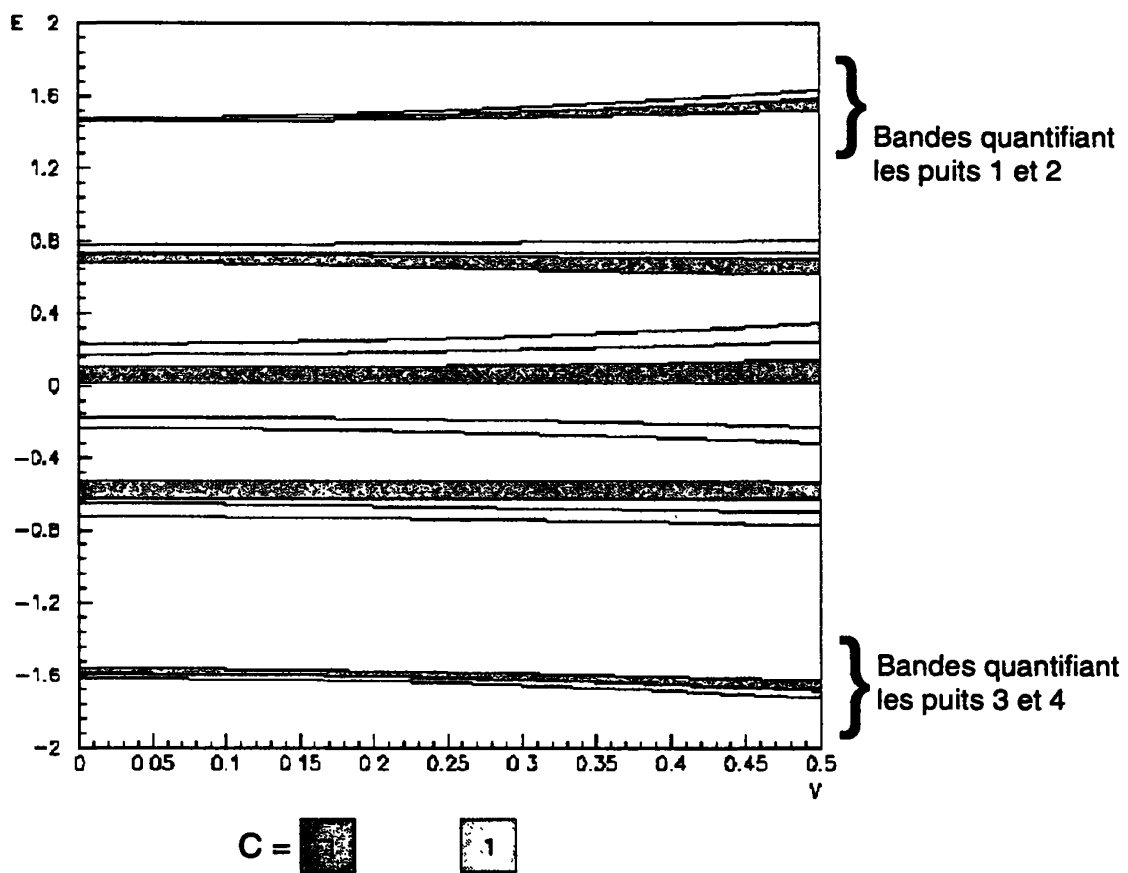


Figure 11: Bandes d'énergie et indice de Chern de  $\mathcal{H}_T$ . (42).  $N = 11$ . Les indices de Chern sont constants. Il n'y a pas de dégénérescence .



Puisque l'indice de Chern est non nul, cela signifie que les zéros de la distribution de Husimi recouvrent tout l'espace de phase. lorsque  $(\theta_1, \theta_2)$  varie et entre autre que la présence de l'état stationnaire varie dans chacun des puits. allant jusqu'à l'annulation. La figure 12 montre l'intensité de la distribution de Husimi en chacun des puits pour la bande  $\Psi_{11}$ . On note  $|q_1, p_1\rangle$  et  $|q_2, p_2\rangle$  les états cohérents situés au centre des puits notés 1 et 2 sur la figure 10. Les valeurs de  $(\theta_1, \theta_2)$  pour lesquelles cette intensité est nulle correspond au passage d'un zéro au fond du puits.

On observe sur la figure 13 la distribution de Husimi sur tout l'espace de phase, pour les valeurs particulières de  $(\theta_1, \theta_2)$  où cette distribution est nulle dans un puits. Une conséquence au niveau de la dynamique est que l'effet tunnel créé par les états  $\Psi_{10}$  et  $\Psi_{11}$  est supprimé pour ces valeurs particulières de  $(\theta_1, \theta_2)$  (et au voisinage).

Cette description concerne la bande  $\Psi_{11}$ , mais la bande  $\Psi_{10}$  qui forme un doublet avec  $\Psi_{11}$  présente des fluctuations semblables, mais en opposition.

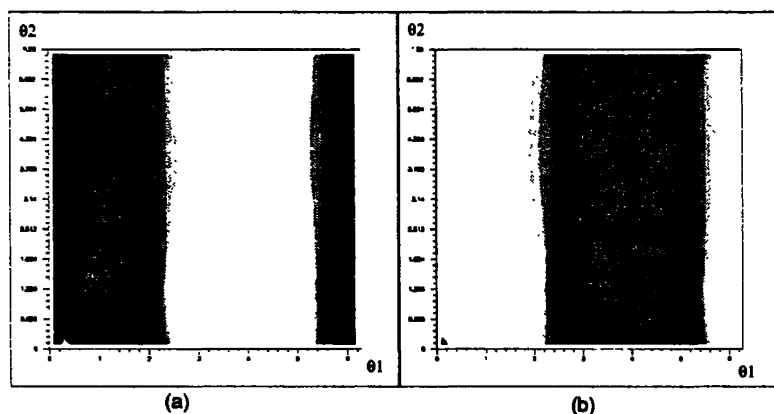


Figure 12: Intensité de la distribution de Husimi de l'état  $\Psi_{11}$  au fond des puits 1 et 2.  $N = 11$ ,  $V = 1/3$ .

(a) puits 1, représentation de  $|\langle q_1, p_1 | \Psi_{11}(\vec{\theta}) \rangle|^2$  avec  $(q_1, p_1) = (0.56, 0.26)$ .

(b) puits 2, représentation de  $|\langle q_2, p_2 | \Psi_{11}(\vec{\theta}) \rangle|^2$  avec  $(q_2, p_2) = (0.56, 0.78)$ .

## B) Deux puits symétriques par réflexion .

Considérons maintenant l'Hamiltonien dépendant du paramètre  $V \in [0, 2]$ ,

$$\mathcal{H}_R(q, p) = -\cos(2\pi q) - \cos(4\pi p) - \frac{1}{4} \cos\left(4\pi q + \frac{\pi}{4}\right) - V \cos(2\pi p) \quad (43)$$

La figure 14 montre les trajectoires. Pour  $V = 0$ , les Hamiltoniens  $\mathcal{H}_T$  et  $\mathcal{H}_R$  sont identiques, mais pour  $V > 0$ , la symétrie par translation est brisée, seule reste la symétrie

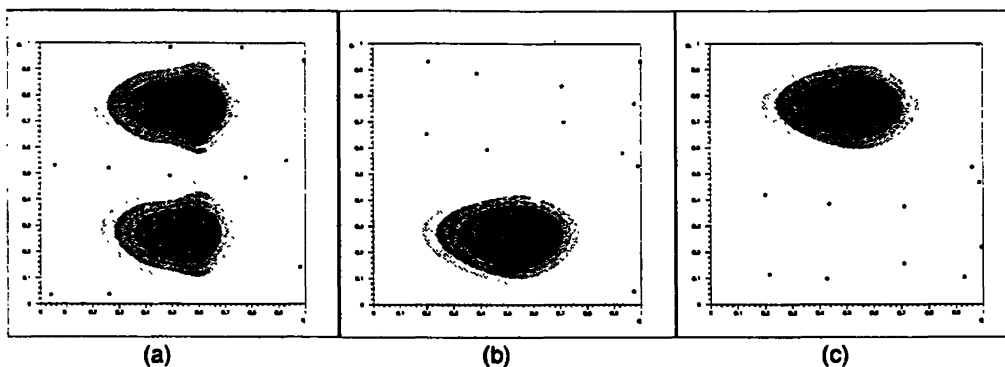


Figure 13: Distribution de Husimi de l'état  $\Psi_{11}$ .  $V = 1/3$ ,  $N = 11$ .

(a)  $(\theta_1, \theta_2) = (2.5, 4.4)$ .

(b)  $(\theta_1, \theta_2) = (0.9, 1.256)$ . (suppression de l'effet tunnel).

(c)  $(\theta_1, \theta_2) = (3.14, 1.256)$ . (suppression de l'effet tunnel).

par réflexion, si bien qu'il doit toujours y avoir résonance entre les deux puits d'énergie maximum.

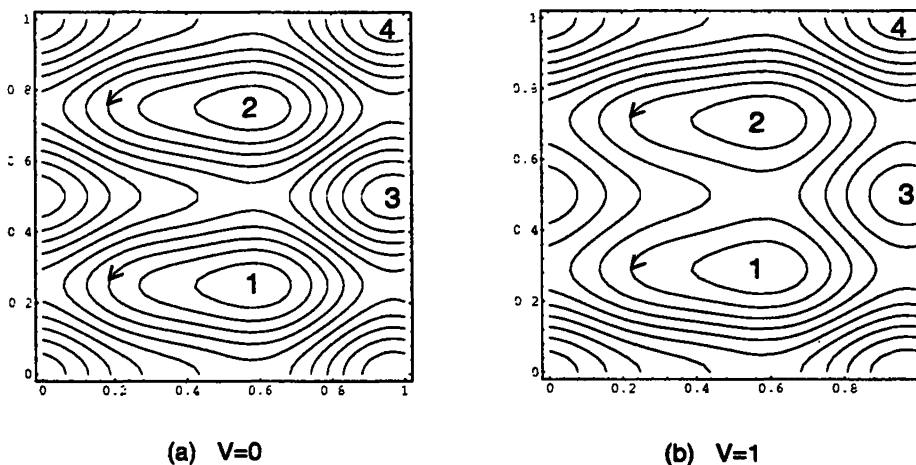


Figure 14: Trajectoires de l'Hamiltonien  $\mathcal{H}_R$ , (43).

Remarquons que près de l'énergie minimale, les deux puits ne sont pas symétriques, et ainsi  $V > 0$  doit lever l'effet de résonance dans le bas du spectre. Le spectre en bande de l'Hamiltonien quantique en fonction de  $V$ , et pour  $N = 11$ , est montré sur la figure 15.

Cette fois-ci dans le haut du spectre, les bandes  $\Psi_{10}$  et  $\Psi_{11}$  vont par doublet mais pour  $V = V^*$  proche de zéro, une dégénérescence se produit et ensuite l'indice de Chern est nul. On remarque aussi que les bandes deviennent plus étroites. La situation est donc bien différente de la précédente. On s'attend à ce que la distribution de Husimi des états  $\Psi_{10}$

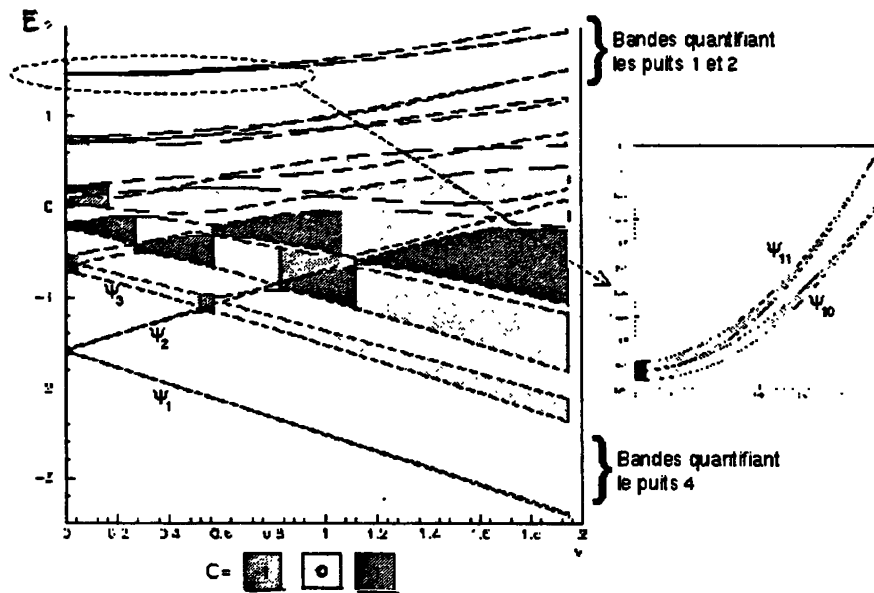


Figure 15: Bandes d'énergies et indice de Chern de  $\mathcal{H}_R$  (43).  $N = 11$ . Pour  $V = 0$ , les spectres et les indices de Chern de  $\mathcal{H}_R$  et  $\mathcal{H}_T$  sont identiques. Il faut remarquer sur le détail que en  $V = 0$ , les indices de Chern sont  $C = \pm 1$ , et qu'une dégénérescence se produit en  $V^* \neq 0$ .

et  $\Psi_{11}$  fluctue peu avec  $(\theta_1, \theta_2)$  pour  $V > 0$ . On observe en effet qu'à partir de  $V > V^*$ , les zéros ne pénètrent plus au sommet des puits, c'est à dire que les distributions de  $\Psi_{10}$  et  $\Psi_{11}$  fluctuent mais ne vont pas jusqu'à s'annuler au sommet des puits. Et pour  $V$  assez grand, les distributions fluctuent très peu, et restent dans la configuration "habituelle" du double puits avec des intensités égales dans chaque puits.

Les deux puits 3 et 4 d'énergie minimum correspondant au bas du spectre ne sont pas symétriques, c'est pourquoi les deux bandes  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$  s'écartent en respectant chacune la quantification W.K.B. d'un des deux puits. Avant de s'écarter, une dégénérescence se produit pour  $V$  proche de zéro, et l'indice de Chern des bandes devient nul, conformément au fait que les fonds de puits sont contractibles, et qu'il n'y a plus de résonance. Pour  $V \sim 0.6$ , le fondamental  $\Psi_2$  du puits 3 le plus élevé croise le deuxième niveau  $\Psi_3$  du puits 4 et une résonance de produit à nouveau, encadrée ici par deux dégénérescences entre lesquelles les indices de Chern sont  $\pm 1$  pour les bandes  $\Psi_2$  et  $\Psi_3$ . Cela signifie toujours que la distribution de Husimi fluctue entre les deux supports de trajectoire).

#### 4.2.2 Conditions pour l'apparition d'une dégénérescence .

Plus généralement, par une étude de l'effet tunnel entre deux puits 1 et 2, on s'aperçoit que les indices de Chern d'un couple de quasi-modes en résonance peut être non nul à condition que les deux conditions suivantes soient réalisées. On note respectivement  $|1\rangle$  et  $|2\rangle$  des quasi-modes correspondant aux puits 1 et 2 dans le plan.

1. Condition de résonance:  $\langle 1|\hat{H}|1\rangle \approx \langle 2|\hat{H}|2\rangle$ , (vérifiée si il y a une symétrie, de translation ou réflexion ou lorsque deux bandes semi-classiques se croisent.).
2. Condition "d'équidistance" : Il faut que les deux plus proches représentants du quasi-mode  $|2\rangle$  soient à égale distance ("distance tunnel" liée à la barrière énergétique) du quasi-mode  $|1\rangle$  (dans le plan), et que le troisième représentant ne soit pas aligné avec les deux précédents. Voir figure 16.

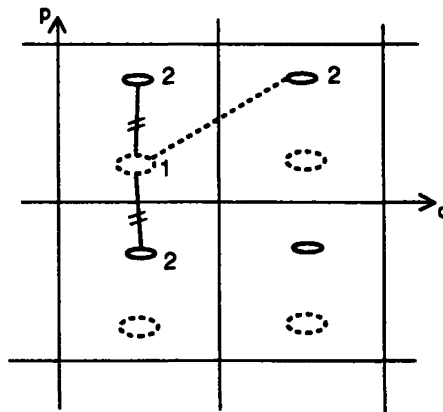


Figure 16: *Illustration des conditions pour avoir  $C = \pm 1$ .*

#### C) Analyse des résultats de l'Hamiltonien $\mathcal{H}_R$ .

Pour ce qui concerne le haut du spectre, il est clair avec la figure (14) que les deux puits symétriques par réflexion ne vérifient pas la condition "d'équidistance" illustrée par la figure (16). Au contraire, dès que la symétrie par translation est brisée ( $V > 0$ ), leur distance minimale est atteinte de façon unique, voir la figure (17)(a). Cela explique pourquoi l'indice de Chern des bandes  $\Psi_{10}$  et  $\Psi_{11}$  devient rapidement nul (par passage d'une dégénérescence), pour  $V > 0$ , sur la figure (15).

En ce qui concerne le bas du spectre, les deux puits 3 et 4 ne sont pas symétriques, mais pour  $V \approx 0.6$ , une résonance se produit entre les bandes  $\Psi_2$  (niveau fondamental du

puits 3) et  $\Psi_3$  (premier niveau excité du puits 4). La configuration des deux trajectoires contractibles est celle de la figure 17 (b). Les deux distances minimales sont égales, ce qui explique la variation d'indice de Chern  $\pm 1$ , et les deux dégénérescences qui accompagnent cette résonance.

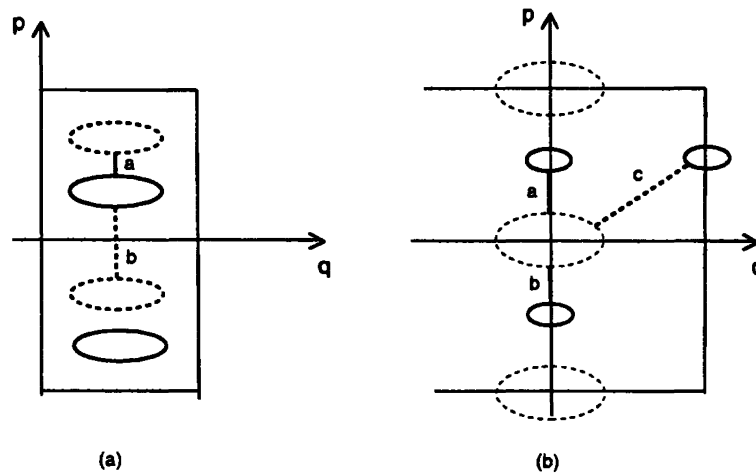


Figure 17: Distance minimale entre les deux puits de l'Hamiltonien  $\mathcal{H}_R$ .

(a) Dans le haut du spectre, une distance est minimale,  $d_a > d_b$ , donc l'indice de Chern est nul.  
 (b) Dans le bas du spectre, deux distances minimales sont équivalentes  $d_a = d_b$ , (et la troisième image est non alignée). L'indice de Chern peut être non nul.

#### 4.2.3 Aspect qualitatif des lignes de dégénérescences.

Voyons ce que la règle page 27 peut nous permettre de déduire sur l'apparition possible d'indice de Chern non nul, entre deux trajectoires contractibles, pour une famille d'Hamiltoniens dépendant de plusieurs paramètres  $\hat{H}(\gamma_1, \gamma_2, \dots)$ . (on met de côté le cas de trajectoires non contractibles). La première condition de résonance est de codimension un, c'est à dire qu'elle peut être réalisée en faisant varier un paramètre. Par exemple l'action d'une trajectoire, notée  $\mathcal{A}$ . La deuxième condition qui exige que le puits 1 se trouve sur la "médiatrice" entre deux images du puits 2, est aussi de codimension 1. Ce paramètre est par exemple la composante en impulsion de la distance mutuelle entre les deux trajectoires, notée  $\mathcal{P}$ . Seulement pour des valeurs particulières de ces paramètres  $(\mathcal{A}, \mathcal{P}) = (\mathcal{A}^*, \mathcal{P}^*)$ , l'indice de Chern des bandes considérées peut être non nul ( $\pm 1$ , génériquement). en fait, il est non nul dans un voisinage exponentiellement étroit ( $\sim \exp(-\delta N)$ ), et hors de ce voisinage, l'indice de Chern retrouve sa valeur générique, zéro. A la limite de ce voisinage, il y a une ligne de dégénérescence qui accompagne le changement d'indice de Chern. Cela

est illustré sur la figure (18). La condition de résonance est vérifiée sur la ligne  $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ . La condition d'égle distance est vérifiée pour  $\mathcal{P} = \mathcal{P}^*$ .

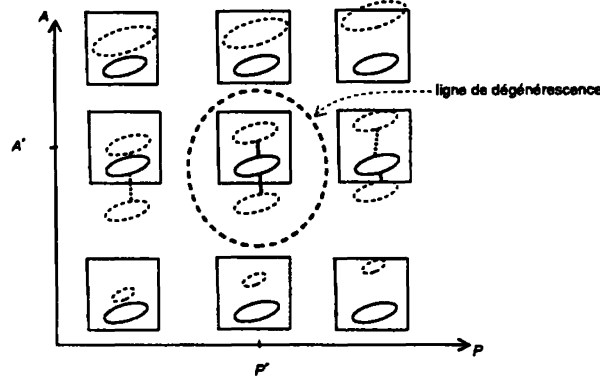


Figure 18: Diagramme montrant deux familles de trajectoires contractibles (au voisinage de  $E = \mathcal{H}(q,p)$ ) pour un Hamiltonien dépendant de deux paramètres  $(\mathcal{A}, \mathcal{P})$ . L'indice de Chern est  $C = \pm 1$  dans un voisinage de  $(\mathcal{A}^*, \mathcal{P}^*)$  limité par une ligne fermée de dégénérescence, hors de laquelle  $C = 0$ .

Notons de plus que si  $\mathcal{A}$  varie, la condition de résonance va à nouveau se réaliser entre deux autres niveaux quantifiés (qui sont distants de  $\Delta\mathcal{A} \sim \hbar$ ) et une autre boucle de dégénérescence apparaît.

En conclusion, l'occurrence de dégénérescence pour une bande d'énergie associée à une trajectoire contractible (et à une énergie telle que la couche d'énergie  $E = \mathcal{H}(q,p)$  n'ait que des composantes connexes contractibles), pour une famille générique d'Hamiltoniens, se produit localement sur des "tubes de codimension 2" de diamètre exponentiellement petit ( $\sim e^{-\delta N} \sim e^{-\delta/\hbar}$ ) qui sont alignés et distants de l'ordre de ( $\sim \hbar \sim \frac{1}{N}$ ).

Les trois directions  $(\mathcal{A}, \mathcal{P}, \gamma)$  apparaissent dans les exemples étudiés ci dessus. La variable  $\gamma$  correspond à la variable  $V$  de l'Hamiltonien  $\mathcal{H}_T$ , figure 11; la variable  $\mathcal{P}$  correspond à la variable  $V$  de l'Hamiltonien  $\mathcal{H}_R$ , et pour le haut du spectre, figure 15. La variable  $\mathcal{A}$  correspond à la variable  $V$  de l'Hamiltonien  $\mathcal{H}_R$ , mais pour le bas du spectre.

Cette disposition des lignes de dégénérescence dans le cas intégrable est très particulière et contraste fortement avec la disposition que prennent les lignes de dégénérescence dans le cas chaotique, comme nous le verrons au paragraphe suivant.

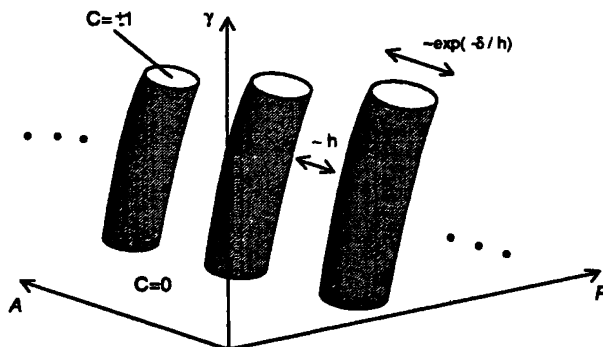


Figure 19: Valeur de l'indice de Chern d'une bande, et tubes de dégénérescence dans un espace à trois paramètres  $(A, P, \gamma)$ . À l'intérieur  $C = \pm 1$ , à l'extérieur,  $C = 0$ .

## 5 Dynamique chaotique et indices de Chern.

Afin de pouvoir étudier simplement les propriétés quantiques correspondant à une dynamique classique non intégrable, M.V. Berry et al. ont proposé de traiter une dynamique classique dépendant du temps de façon périodique [25]. La dynamique classique s'analyse à l'aide des sections stroboscopiques des trajectoires (type section de Poincaré), et la dynamique quantique s'analyse en terme de quasi-énergies et d'états quasi-stationnaires, qui sont le spectre du propagateur sur une période.

Dans le cas intégrable, nous avons vu que les indices de Chern et les dégénérescences sont fortement contraints par la régularité de la dynamique. Nous allons maintenant observer l'influence d'une dynamique chaotique sur le spectre et les dégénérescences, au travers des indices de Chern. Cette étude se fera tout d'abord sur le modèle de "Harper pulsé" (48), puis sur un modèle analogue qui ne possède pas les symétries particulières du Harper pulsé. Dans le régime chaotique, il n'est plus possible de construire des quasi modes vérifiant l'équation de Schrödinger à tout ordre en  $\hbar$ . Des expressions semi-classiques comme la formule des traces ou la formule de Gutzwiller montrent, que dans ce cas la totalité des orbites périodiques "participent" à la valeur de chaque niveau d'énergie ainsi qu'à la structure des états stationnaires.

Beaucoup d'études analytiques et numériques ont été faites dans ce sens, et notons en particulier celles concernant les distributions de Husimi des états quasi stationnaires ([26, 14, 27, 16, 15]) et leur zéros. Les auteurs observent que contrairement au cas intégrable où les zéros sont alignés et distants de  $\propto \hbar$ , dans le cas ergodique, les zéros semblent génériquement répartis sur l'espace de phase et distants de  $\propto \sqrt{\hbar} \propto \frac{1}{\sqrt{N}}$ , (puisque il y a  $N$  zéros au total sur l'espace de phase). Les régions où la distribution de Husimi est

importante en intensité sont les régions où il n'y a pas de zéro.

Le phénomène appelé "cicatrice", "scars", qui est une localisation de la distribution de Husimi autour d'une trajectoire instable, correspond donc en terme des zéros à une trajectoire instable évitée par les zéros. Ce phénomène observé assez couramment numériquement, voir E.J. Heller dans [28], est en fait non générique à la limite semi-classique (c'est à dire exceptionnel, de mesure nulle parmi les états quasi-stationnaires). Un théorème mathématiques [29] montre que la distribution de Husimi de presque tous les états stationnaires converge vers la distribution invariante de Liouville, qui elle est uniforme sur la section stroboscopique. Notons que le phénomène de cicatrice n'est pas observé dans tous les modèles [30]. Et si il se produit, on doit observer une décroissance logarithmique de la densité de la distribution de Husimi le long des variétés stables et instables de la trajectoire, comme pour le point fixe instable du double puits [31].

Lorsque  $(\theta_1, \theta_2)$  varient, les zéros qui sont répartis de façon désordonnée sur l'espace de phase, se déplacent avec une forte dépendance contrairement au cas intégrable. L'indice de Chern a la propriété de caractériser quantitativement et topologiquement cette dépendance, et P. Leboeuf et al. [6] ont suggéré qu'il mesure de ce fait l'influence du chaos classique sur la mécanique quantique et ont observé qu'il prend des valeurs non nulles lorsque la dynamique classique devient chaotique, dans le modèle du Harper pulsé [6].

## 5.1 Modèle de "Harper pulsé".

Le modèle de Harper pulsé est défini par le Hamiltonien dépendant du temps:

$$\mathcal{H}(q, p, t) = -\cos(2\pi \frac{p}{P}) - \cos(2\pi \frac{q}{Q})K(t) \quad (44)$$

avec le "peigne de Dirac" :

$$K(t) = \tau \sum_{n \in \mathbf{Z}} \delta(t - n\tau) \quad (45)$$

En intégrant les équations de Hamilton sur une période  $t \in ]0, \tau[ \cup \tau$ , on obtient l'expression de l'application stroboscopique  $(q_n, p_n) \rightarrow (q_{n+1}, p_{n+1}) = M_{0+}(q_n, p_n)$ :

$$M_{0+} \begin{cases} x_{n+1} = x_n + \gamma \sin(2\pi y_n) \\ y_{n+1} = y_n - \gamma \sin(2\pi x_{n+1}). \end{cases} \quad (46)$$

en introduisant les variables:

$$x = \frac{q}{Q} \quad y = \frac{p}{P} \quad \gamma = \frac{2\pi\tau}{QP} \quad (47)$$



La figure 20 montre les sections stroboscopiques (46) de quelques trajectoires, pour différentes valeurs de  $\gamma$ .

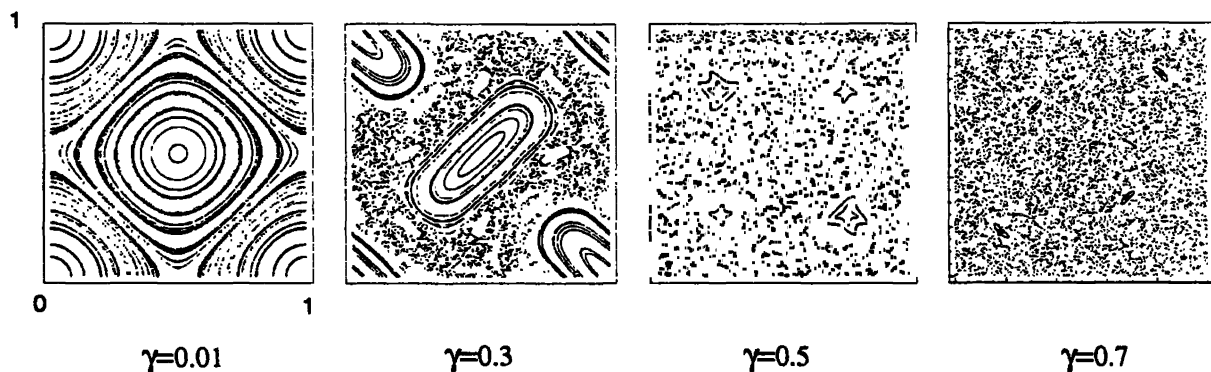


Figure 20: *Section stroboscopique classique du "Harper pulsé"*

Pour  $\tau$  ou  $\gamma \rightarrow 0$ , la dynamique converge vers la dynamique intégrable.

Le paramètre  $\gamma \in \mathbb{R}^+$  permet donc d'observer une transition progressive entre une dynamique intégrable et une dynamique chaotique.

Par quantification canonique de l'Hamiltonien classique (44), nous obtenons l'opérateur Hamiltonien quantique:

$$\hat{H} = -\cos\left(2\pi\frac{\hat{p}}{P}\right) - \cos\left(2\pi\frac{\hat{q}}{Q}\right)K(t) \quad (48)$$

Nous pouvons considérer la transformation unitaire  $\hat{U}$ , appelé propagateur, qui fait évoluer un vecteur quantique sur une période:

$$|\Psi(\tau^+) \rangle = \hat{U}|\Psi(0^+) \rangle \quad (49)$$

Nous déduisons l'expression de  $\hat{U}$  par intégration de l'équation de Schrödinger:

$$i\hbar\partial_t|\Psi(t) \rangle = \hat{H}(t)|\Psi(t) \rangle \quad (50)$$

d'où:

$$\hat{U} = e^{iN\gamma \cos(2\pi\frac{\hat{q}}{Q})} e^{iN\gamma \cos(2\pi\frac{\hat{p}}{P})} \quad (51)$$

Le spectre de  $\hat{U}$  est fini dans chaque sous-espace  $\mathcal{H}_N(\theta_1, \theta_2)$ ,  $(\theta_1, \theta_2) \in [0; 2\pi]^2$ .

$$\hat{U}|\Psi_n(\vec{\theta}) \rangle = e^{i\phi(\vec{\theta})}|\Psi_n(\vec{\theta}) \rangle \quad n = 0 \rightarrow N - 1 \quad (52)$$

$|\Psi_n(\vec{\theta}) \rangle$  est appelé état quasi-stationnaire et  $\phi(\vec{\theta})$  quasi-énergie (nombre réel modulo  $2\pi$ ).

Ce sont des états qui reviennent identiques à eux-même à chaque période.  
Les symétries de ce modèle sont nombreuses.

### Spectre et indices de Chern

La figure 21 montre le spectre et les indices de Chern des bandes des états quasi-stationnaires pour  $N = 11$  états et sur l'intervalle  $\gamma \in [0; 1.16]$ . Les indices de Chern ont été obtenus numériquement au moyen de l'intégrale de courbure.

On note que la variation de l'indice de Chern lors d'une dégénérescence est souvent plus d'une unité. Ce comportement qui est non générique, est dû aux nombreuses symétries du problème.

On peut distinguer principalement trois régimes différents en fonction de  $\gamma$ :

1. Premier régime, pour  $\gamma \in [0, 0.16(\approx \frac{\pi}{2N})]$ :

Avant le premier croisement entre les bandes de quasi-énergies, la dynamique classique est quasiment régulière, et les indices de Chern coïncident avec ceux du modèle de Harper non perturbé (figure 8,  $D = 0$ ).

2. Deuxième régime  $\gamma \in [0.16, 0.4]$ : région régulière.

A partir de  $\gamma = 0.16(\approx \frac{\pi}{2N})$ , des croisements entre bandes d'énergies commencent à apparaître (prévisibles d'après l'expression (51), ou par une méthode semi-classique de quantification des quasi-énergies [32]). Dans cette région, la dynamique quantique est dominée par une dynamique classique régulière, et les bandes d'énergies quantifient des trajectoires stables de l'espace de phase. Les bandes extrêmes, les plus fines, quantifient le coeur des deux régions stables, et la bande centrale correspond à ce qui reste de la séparatrice.

Du fait que les quasi-énergies soient définies sur le cercle  $] - \pi, \pi[$ , les bandes se croisent, et c'est ainsi que la bande fine qui quantifie le point fixe stable  $(q, p) = (0, 0)$  traverse pour la première fois toutes les bandes en les coupant, (à la montée sur la figure 21), suivi de la bande du premier niveau excité, etc.... Cela forme ainsi une structure en traillis, qui dans la limite  $N \rightarrow \infty$ , a tendance à devenir plus dense, et à se rapprocher de  $\gamma = 0$ .

Hors de ces croisements, l'indice de Chern est toujours nul. Et lors du croisement de deux bandes d'énergies, l'indice de Chern change, et deux dégénérescences se produisent de part et d'autre de ce changement sur un intervalle de  $\gamma$  très faible (relié

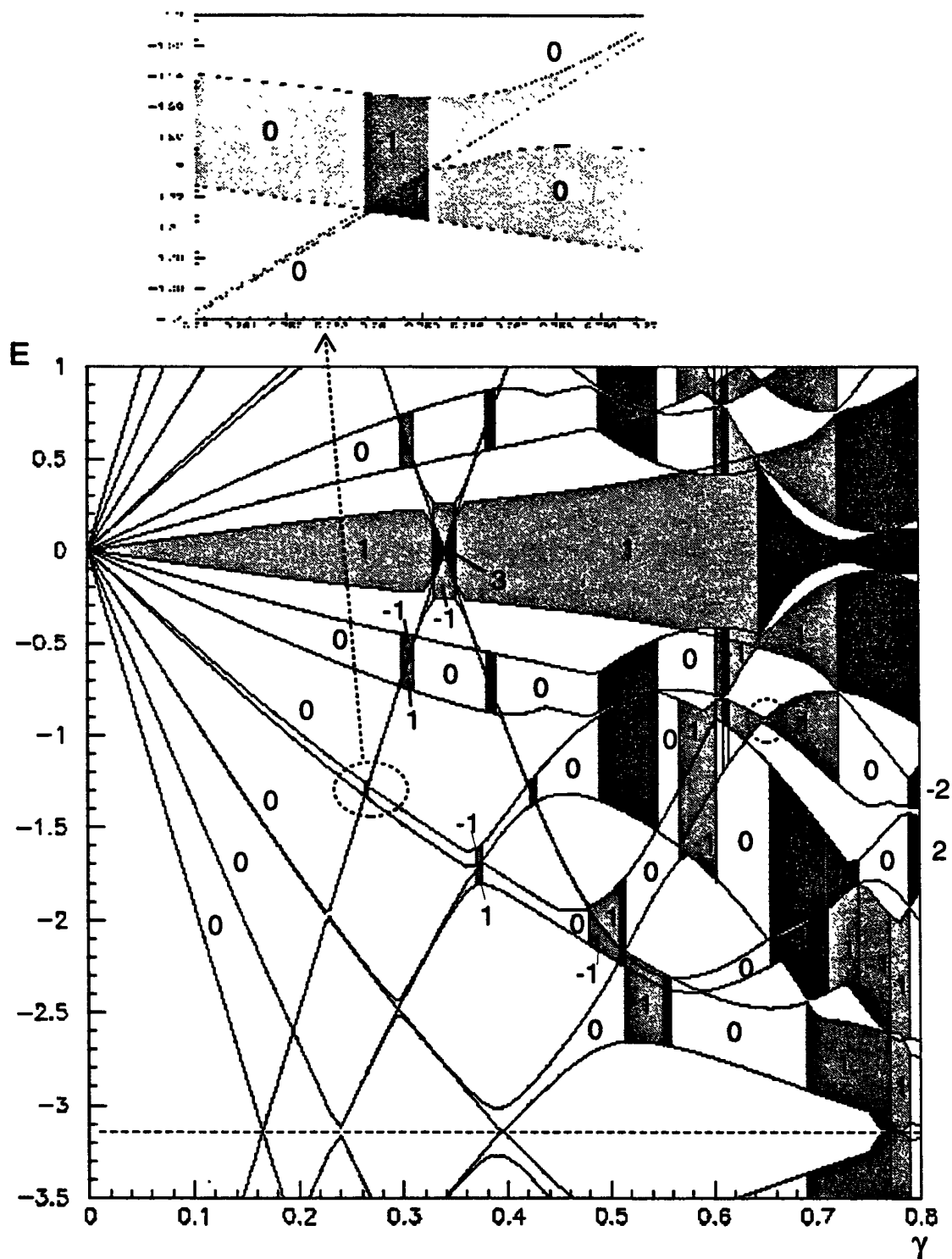


Figure 21: Bandes de quasi-énergies et leur indice de Chern pour le modèle de Harper pulsé (51).

Le spectre de quasi-énergies est symétrique par rapport à  $\phi = 0$ . Lorsque les bandes se recouvrent, la couleur indiquée est celle de la bande d'énergie inférieure.

à la largeur des bandes). La présence de ces dégénérescences peut se comprendre comme un phénomène de résonance entre deux tores classiques invariants quantifiés, dont l'analyse a été présentée au paragraphe précédant.

Par exemple, le détail de la figure 21, présente une résonance entre la bande très fine  $\Psi_4$  qui quantifie le point fixe stable  $(q, p) = (0, 0)$  et la bande moins fine  $\Psi_3$  qui quantifie le troisième niveau excité autour du point fixe stable  $(q, p) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . La figure 22 montre la distribution de Husimi de l'état  $\Psi_3(\theta_1, \theta_2)$  pour différentes valeurs de  $(\theta_1, \theta_2)$ . Cette distribution fluctue entre les deux tores invariants avec un indice de Chern  $C = +1$ , de la même façon que pour les deux puits symétriques par translation, figure 13.

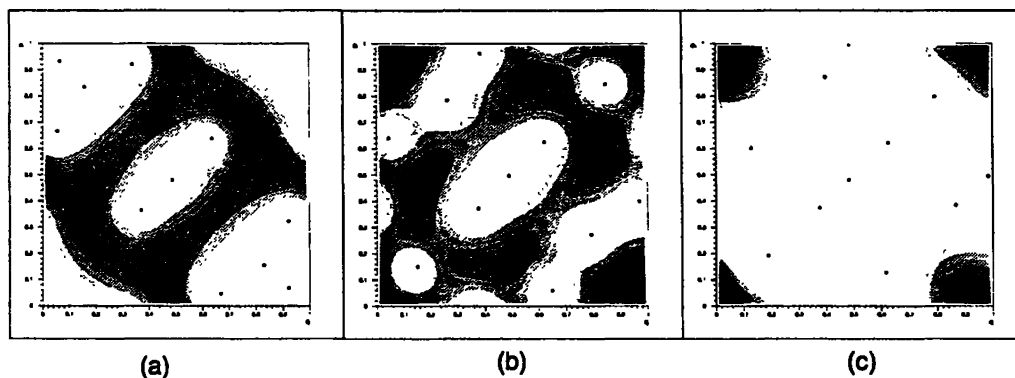


Figure 22: Distribution de Husimi de l'état  $\Psi_3(\theta_1, \theta_2)$  qui résonne entre deux tores quantifiés, pour  $\gamma = 0.2645$   $N = 11$ , et différentes valeurs de  $(\theta_1, \theta_2)$ :

- (a):  $(\theta_1, \theta_2) = (0, 0)$ . La distribution est sur un tore ( $3^{\text{ème}}$  niveau excité d'une famille).
- (b):  $(\theta_1, \theta_2) = (1, 1)$ . Superposition
- (c):  $(\theta_1, \theta_2) = (\pi, \pi)$ . La distribution est sur un tore (fondamental d'une famille).

La situation de ces deux tores invariants sur l'espace de phase est une situation symétrique, similaire à celle de la figure 17 (b), c'est à dire que la distance minimale entre eux-deux est atteinte deux fois. Cela explique la variation d'indice de Chern et les deux dégénérescences sur un intervalle de largeur très faible ( $\Delta\gamma \sim \exp(-cN)$ ). Ces dégénérescences se produisent à chaque croisement, à l'exception des niveaux  $\Psi_1$  et  $\Psi_{11}$  pour lesquels la symétrie et la conservation de la somme des indices de Chern lors d'une dégénérescence interdit une variation de ceux-ci. Notons aussi les variations non génériques  $\Delta C = \pm 2$ , lors des derniers croisements, probablement dues à l'approche du régime chaotique.

En conclusion, lors des croisements, les dégénérescences peuvent s'interpréter comme

le fait que le chemin du paramètre  $\gamma$  coupe une série de tubes de dégénérescences similaires à ceux de la figure 19.

### 3. Troisième régime. $\gamma > 0.4$ .

La dynamique classique est dominée par le chaos. Il y a maintenant plusieurs dégénérescences entre les bandes, les indices de Chern sont pour la plupart non nuls, et la largeur des bandes a considérablement augmenté par rapport aux régimes précédents. Pour les dégénérescences, il n'y a visiblement plus les restrictions propres aux régimes réguliers.

Notons la présence de bandes étroites et d'indice de Chern non nul (comme la bande  $\Psi_4$  pour  $\gamma = 0.66$ ) qui témoigne d'une distribution de Husimi qui fluctue entre des configurations de même quasi-énergie. La figure 23 montre les distributions de Husimi de la bande  $\Psi_4$  pour  $\gamma = 0.66$  qui a un indice de Chern  $C = 1$ . La distribution fluctue entre la région régulière (en  $\vec{\theta} = (0, 0)$ ) et le point fixe instable (en  $\vec{\theta} = (\pi, \pi)$ ). La figure 24 montre que pour toutes les valeurs de  $\vec{\theta}$ , la distribution de Husimi est répartie principalement sur ces deux trajectoires (comme un effet de résonance). Nous avons observé numériquement que pour  $\gamma = 0.66$ , chaque bande du spectre peut de la sorte s'interpréter comme une superposition de quelques trajectoires stables ou instables.

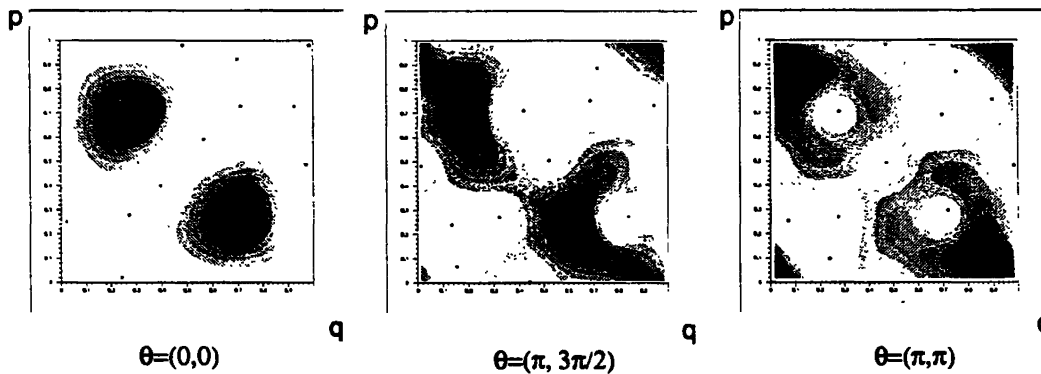


Figure 23: *Distribution de Husimi de la bande  $\Psi_4$ ,  $\gamma = 0.66$ .  $N = 11$  d'indice de Chern  $C = 1$ . (la bande  $\Psi_4$  est indiquée par un cercle sur la figure (21)). On observe que la distribution fluctue entre le point fixe instable  $(q, p) = (0, 0)$  et la trajectoire périodique stable  $(q, p) = (0.7, 0.25)$ . Pour  $(\theta_1, \theta_2) = (\pi, 3\pi/2)$  la distribution est une superposition des deux autres distributions.*

Notons aussi la présence de bandes larges ayant un indice de Chern nul ce qui témoigne de la fluctuation de la distribution de Husimi, mais d'une fluctuation

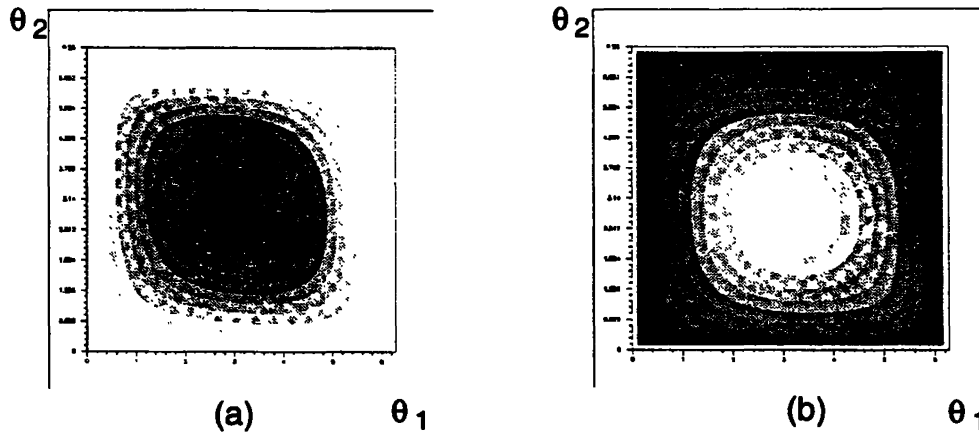


Figure 24: Pour  $\gamma = 0.66$ . Intensité de la distribution de Husimi de la bande  $\Psi_4$  sur:

(a) le point fixe instable  $(q, p) = (0, 0)$ .

(b) la trajectoire périodique stable  $(q, p) = (0.7, 0.25)$

Ces deux images sont complémentaires. On déduit que l'état  $\Psi_4$  est essentiellement une superposition de ces deux structures.

"contractible" (en terme des zéros). La figure 25 montre par exemple les distributions de Husimi de la bande  $\Psi_3$  pour  $\gamma = 0.88$  qui a un indice de Chern  $C = 0$ . Il apparaît tout de même que la distribution fluctue avec  $\vec{\theta}$ .

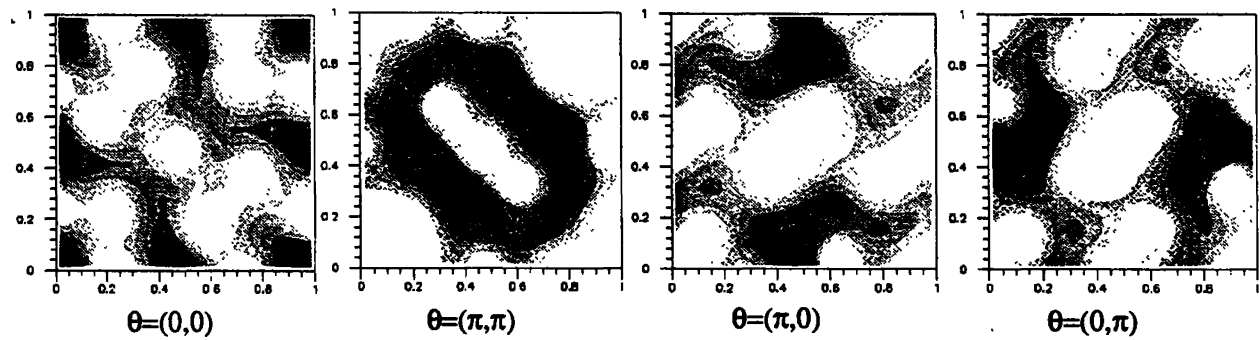


Figure 25: Distribution de Husimi de la bande  $\Psi_3$  pour  $\gamma = 0.88$ , ayant un indice de Chern  $C = 0$ . La distribution fluctue néanmoins avec  $\vec{\theta}$ .

Pour une "cicatrice" localisée sur une trajectoire contractible pour toute valeur de  $\vec{\theta}$ , la bande de quasi-énergie serait étroite et d'indice de Chern nul. On n'observe rien de tel. Mais si le phénomène de cicatrice ne se produit que pour des valeurs particulières de  $(\theta_1, \theta_2)$ , cela n'apparaît pas sur la figure 21. Par exemple, la distribution de Husimi de la figure 23 peut s'interpréter comme une cicatrice localisée

sur la trajectoire instable  $(q, p) = (0, 0)$  pour  $\vec{\theta} = (0, 0)$  seulement.

## 5.2 Un modèle sans symétrie.

Le Hamiltonien suivant est légèrement différent de celui du Harper pulsé, et a l'avantage de ne pas posséder les nombreuses symétries de celui-ci. Nous verrons les différences que cela implique au niveau du spectre et des indices de Chern.

$$\mathcal{H}(q, p, t) = -\cos(2\pi q) - \frac{1}{4}\cos(4\pi q + \frac{\pi}{4}) - [\cos(2\pi p) + \frac{1}{2}\cos(4\pi p + \frac{\pi}{2})]K(t) \quad (53)$$

La figure 26 montre l'allure des sections stroboscopiques pour différentes valeurs de  $\gamma$ . On y observe à nouveau une transition progressive du régime régulier vers un régime chaotique.

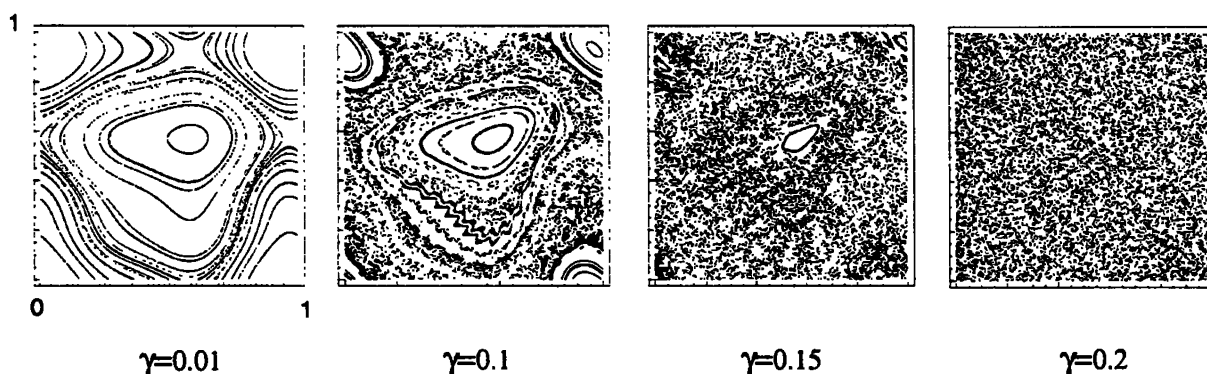


Figure 26: *Sections stroboscopiques des trajectoires classiques de l'Hamiltonien sans symétrie (53).*

La figure 27 montre les bandes de quasi-énergie et leur indice de Chern, pour  $N = 11$ , et sur l'intervalle  $\gamma \in [0, 1.04]$ . L'ergodicité classique apparaît pour des faibles valeurs de  $\gamma$ , et dans cet essai numérique, lorsque les premiers croisements ont lieu, la dynamique classique est déjà dominée par le chaos. Le paramètre de limite classique  $N$  n'est en fait pas assez élevé pour observer clairement le régime régulier associé à une dynamique classique quasi-intégrable. Néanmoins on observe:

1. Un régime régulier  $\gamma < 0.4$ , pour lequel il y a répulsion cette fois-ci entre les bandes de quasi-énergie quantifiant des tores invariants, sans apparition de dégénérescence ni variation de l'indice de Chern (sauf quelques cas limites). Toujours à la lueur des

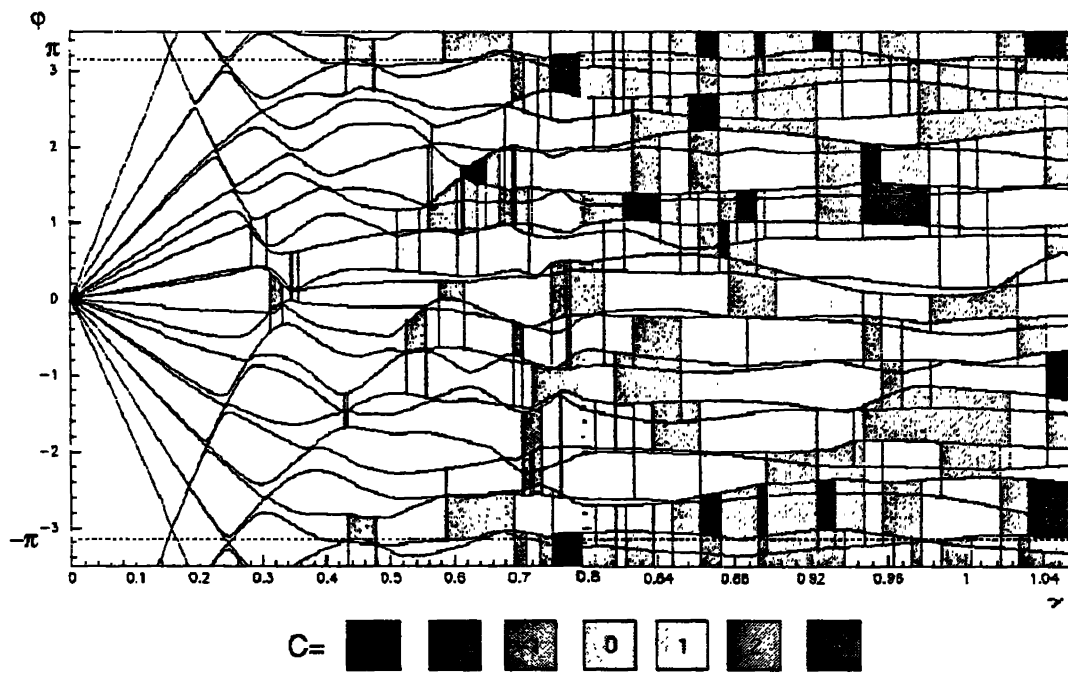


Figure 27: Bandes de quasi-énergies et indices de Chern du modèle sans symétrie (53).



résultats de la section précédente. cela s'explique par le fait que les résonances se produisent entre des tores quantifiés qui ne sont pas placés de façon symétrique dans l'espace de phase et entre lesquels il y a une unique "distance" minimale, comme schématisé sur la figure 17(a).

Les bandes dans cette région ne sont pas très fines, cela est dû au fait que la dynamique classique est déjà assez ergodique pour ces valeurs de  $\gamma$ .

2. Dans le régime chaotique  $\gamma \geq 0.4$ , les bandes deviennent plus larges, mais cette fois-ci les variations de l'indice de Chern sont  $\pm 1$ , comme pour le cas générique. On observe de plus une faible dispersion de la valeur de l'indice de Chern autour de la valeur  $C = 0$ , et l'indice de Chern est même nul très fréquemment.

### 5.3 Présence de dégénérescences dans le cas chaotique.

Dans ce paragraphe, nous allons poursuivre la description des lignes de dégénérescences entreprise autour de la figure 18. Pour une famille de Hamiltoniens dépendant de deux paramètres  $H(\gamma_1, \gamma_2)$ , et pour une dynamique intégrable, il est apparu que lorsque la couche d'énergie est composée de trajectoires contractibles, les lignes de dégénérescence forment des petites boucles à l'extérieur desquelles l'indice de Chern est nul.

Cette description nous permet d'interpréter les résonances avec dégénérescence dans le régime régulier du modèle de Harper pulsé symétrique comme une intersection de ces boucles. Elle nous permet aussi d'interpréter les résonances sans dégénérescence dans le régime régulier du modèle sans symétrie comme un passage "à côté" de ces boucles, sans les intercepter.

Lorsque le régime devient plus chaotique, les figures 21 et 27 ont tendance à montrer que ces boucles de dégénérescence deviennent plus larges jusqu'à finalement déborder les unes sur les autres et cesser d'être un phénomène exponentiellement localisé. Ainsi les premières dégénérescences du modèle sans symétrie peuvent s'interpréter comme une intersection du chemin  $H(\gamma)$  avec le bord de ces boucles qui deviennent plus larges.

Dans le régime chaotique, la multitude des dégénérescences témoigne de multiples intersections du chemin  $H(\gamma)$  avec des lignes de dégénérescences. Cela porte à penser que contrairement au régime intégrable, les lignes de dégénérescence sont cette fois-ci dans une configuration "ouverte", ne formant pas de boucles, et sont dispersées comme aléatoirement sur un plan à deux paramètres  $(\gamma_1, \gamma_2)$ .

Cela signifie que lorsque la dynamique classique passe d'un régime régulier à un régime

chaotique. ces lignes de dégénérescences subissent une "*transition de phase*", en passant d'une configuration régulière, en boucles très petites et alignées, à une configuration de lignes ouvertes pouvant se couper. Il s'agit d'une transition analogue à celle observée par A. Voros et P. Leboeuf sur les zéros de distributions de Husimi ou celle observée dans la statistique des niveaux.

Afin de représenter quelques-unes de ces lignes, nous avons considéré l'Hamiltonien à deux paramètres  $V_1, V_2$  suivant:

$$H(q, p, t) = -\cos(2\pi q) - V_1 \cos(4\pi q + \frac{\pi}{4}) - [\cos(2\pi p) + V_2 \cos(4\pi p + \frac{\pi}{4})]K(t) \quad (54)$$

Nous avons calculé l'indice de Chern des différentes bandes pour  $N = 11$  niveaux et  $\gamma = 0.51$ . en discrétisant le domaine  $(V_1, V_2) \in [0, 0.4]^2$ .

Les lignes de dégénérescences entre deux niveaux apparaissent comme étant la frontière entre deux domaines d'indices différents.

La figure 28 montre le résultat pour la bande  $\Psi_1$ , qui met en évidence deux lignes de dégénérescences génériques ( $\Delta C = \pm 1$ ) se coupant. et pour les bandes  $\Psi_7$  et  $\Psi_8$  montrant des lignes de dégénérescences communes et d'autres qui sont en commun avec les bandes  $\Psi_6$  et  $\Psi_9$ . Certains détails échappent à la discrétisation. On observe des croisements entre les différentes lignes.

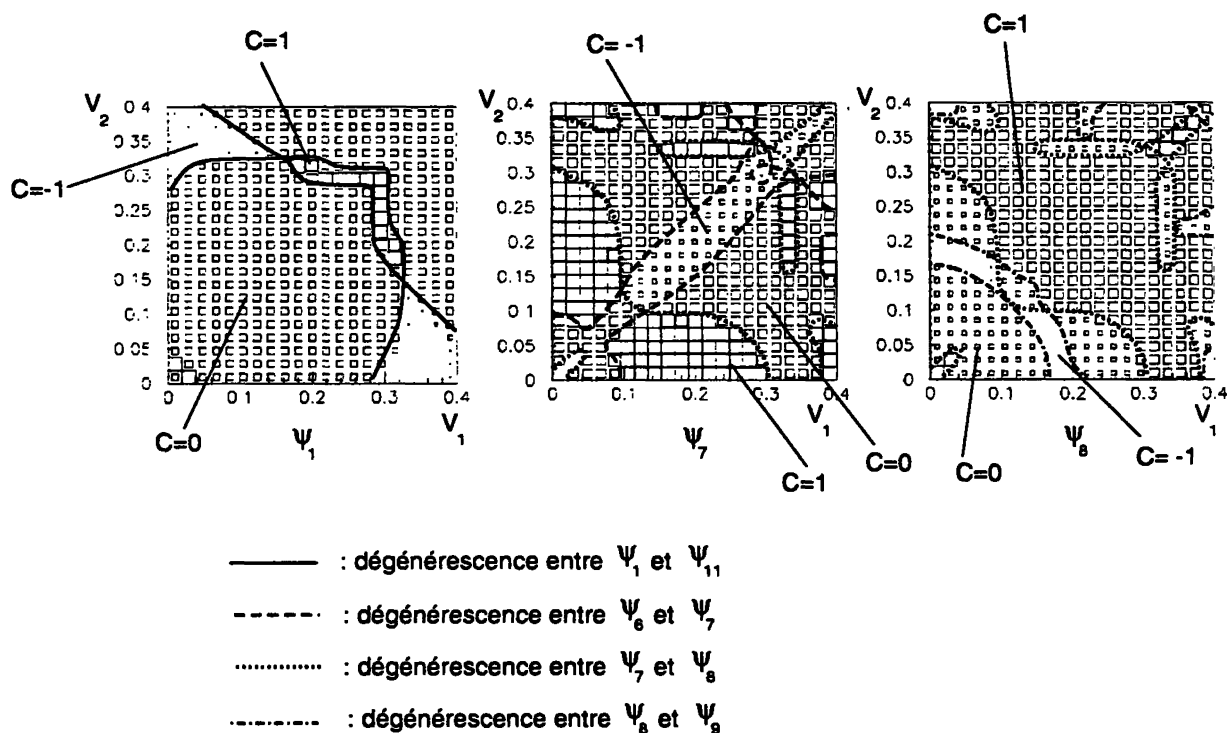


Figure 28: Indices de Chern de l'Hamiltonien  $H(V_1, V_2)$  (54) pour les trois bandes  $\Psi_1$ ,  $\Psi_7$  et  $\Psi_8$ . Les lignes de dégénérescences entre les bandes correspondent aux frontières des domaines. La taille des carrés correspond à la valeur de l'indice de Chern calculée numériquement.

## Références

- [1] K.V. Klitzing. G. Dorda. M. Pepper. *Phys. Rev. Lett.* **45**, 494 (1980). "New method for high-Accuracy Determination of the fine structure constant based on quantized Hall resistance".
- [2] D.R. Hofstadter, "Energy levels and wave functions of Bloch electrons in rational and irrational magnetic fields" *Phys. Rev. B* **14**, 6, 2239 (1976).
- [3] "L'avènement de la nano-électronique" La recherche 237, Nov. 1991, 1298.
- [4] D. J. Thouless. M. Kohmoto. M. P. Nightingale, and M. den Nijs, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 405 (1982). "Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential".
- [5] Y.S. Wu "Topological aspects of the quantum Hall effect" Proceedings at NATO Advanced Summer institute "Physics, Geometry and topology" at Banff, Alberta, Canada, August 14-25,1989.
- [6] P. Leboeuf, J. Kurchan. M. Feingold and D. P. Arovas. *Phys. Rev. Lett.* **65**, 3076 (1990); *Chaos* **2** 125 (1992). "Phase-space localization: topological aspects of quantum chaos".
- [7] D. P. Arovas, P. N. Bhatt. F. D. M. Haldane, P. B. Littlewood and R. Rammal, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 619 (1988). "Localization, Wave function topology, and the integer quantized Hall effect".
- [8] M.V. Berry "Quantal phase factors accompanying adiabatic changes" *Proc. Roy. Soc. Lond.* **392**, 45 (1984).
- [9] A. M. Perelomov, "Generalized coherent states and their applications" (Springer. Berlin) 1986.
- [10] M. Wilkinson. "Critical properties of electron eigenstates in incommensurate systems" *Proc. R. Soc. Lond. A* **391**, 305 (1984).
- [11] These de Armelle Barelli "Approche algébrique de la limite semi-classique. Electrons bidimensionnels en champs magnétique et localisation dynamique". Université Paul Sabatier de Toulouse n° 1250.

- [12] W. M. Zhang, D. H. Feng and R. Gilmore, "*Coherent states: theory and some applications*" *Rev. of Modern Phys.* **62**, 867 (1990).
- [13] J.R. Klauder and B.S. Skagerstam *Coherent states. Applications in physics and mathematical physics*, World Scientific (1984).
- [14] P. Leboeuf and A. Voros "*Chaos-revealing multiplicative representation of quantum eigenstates*" *J. Phys. A: Math. Gen.* **23**, 1765 (1990).
- [15] P. Leboeuf, A. Voros. "*Quantum nodal points as fingerprints of classical chaos*" Preprint.
- [16] A. Voros, P. Leboeuf. "*Multiplicative formulation of quantum mechanics*" Preprint Saclay Spht /91-179.
- [17] A. Voros "*Wentzel-Kramers-Brillouin method in the Bargmann representation*" *Phys. Rev. A* **40**, 6814 (1989).
- [18] J. Kurchan, P. Leboeuf, M. Saraceno "*Semiclassical approximation in the coherent state representation*" *Phys. Rev. A* **40**, 6800 (1989).
- [19] T. Paul, A Uribe " *A construction of quasi-modes using coherent states*" to appear in *Ann. Inst. H. Poincaré, Phys. théor.*
- [20] M. Nakahara, "*Geometry, topology and physics*", graduate students series in physics, Adam Hilger, Bristol and N.Y.
- [21] J. W. Milnor "*Characteristic classes*" Princeton university press 1974.
- [22] Exposé de Yves Colin de Verdière "*Fibrés en droites et valeurs propres multiples*" à l'institut Fourier de Grenoble. le 17 déc. 1993.
- [23] "*Geometric phases in physics*" A. Shapere and F. Wilczek Advanced Series in Math. Physics Vol. 5.
- [24] B. Simon, "*Holonomy, the quantum adiabatic theorem and Berry's phase*" *Phys. Rev. Lett.* **51**, 2167 (1983).
- [25] M.V. Berry, N.L. Balazs, M. Tabor, A. Voros. "*Quantum maps*" *Ann. of Phys. (N.Y.)* **122** . 26, (1979).

- [26] P. Leboeuf "*Phase space approach to quantum dynamics*" *J. Phys. A: Math. Gen.* **24**, 4575 (1991).
- [27] E. Bogomolny, O. Bohigas, P. Leboeuf, "*Distribution of roots of random polynomials*" *Phys. Rev. Lett.* **68**, 2726 (1992).
- [28] "*Chaos and Quantum Physics*", edited by M.J. Giannoni, A. Voros, and J. Zinn-Justin, Les Houches Session LII, 1989 (Elsevier, Amsterdam,1991).
- [29] Yves Colin de Verdière, *Comm. Math. Phys.*, **102**, 497 (1985).
- [30] R. Aurich and F. Steiner "*Quantum eigenstates of a strongly chaotic system and the scar phenomenon*" Preprint desy 93-057 (1993).
- [31] B. Parisse and Y. Colin de Verdiere, Preprint.
- [32] F. Bensch, H.J. Korsch, B.Mirbach, V. Ben-Tal "*E.B.K. quantization of quasi-energies*" *J. Phys. A: Math. Gen.* **25**, 6761, (1992).

Frédéric FAURE  
Institut des Sciences Nucléaires  
38026 GRENOBLE