Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Liane Valère

Calcul du tenseur de Ricci d'une $K3$ particulière plongée dans $\mathbb{C}P^3$ pour la métrique induite par la métrique canonique

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 2 (1983-1984), exp. nº 9, p. 1-23
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1983-1984__2__A9_0>

Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie
CHAMBERY-GRENOBLE
1983-1984

CALCUL DU TENSEUR DE RICCI D'UNE K3 PARTICULIERE PLONGEE DANS $\mathbb{C}P^3$ POUR LA METRIQUE INDUITE PAR LA METRIQUE CANONIQUE.

par Liane VALERE

0 Introduction et résumé

On sait que la classe de Chern d'une K3 est nulle ([A-B] p. 157) et le théorème de Calabi atteste qu'il existe sur toute K3 une métrique de tenseur de Ricci nul, dans chaque classe de Kähler ([AST]).

Dans le but de calculer le tenseur de Ricci de la K3 définie par l'annulation du polynôme homogène

$$F(z) = z_o^4 + z_1^4 + z_2^4 + z_3^4$$

dans l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^3$ muni de la métrique de Fubini-Study, j'ai d'abord calculé le tenseur de Ricci riemannien réel r de la sous variété réelle M (sous jacente à la sous-variété complexe kählérienne $\tilde{M}$) de la variété réelle M' (sous jacente à la variété complexe kählérienne $\tilde{M}'$).

Ce calcul fournit la différence entre les tenseurs de Ricci r et r' respectivement de M et M' (p. 13 (7-1) et (7-2)) $r(X,X) = r'(X,X) - \delta(X,X)$ pour un vecteur X de $(T_pM)^{\mathbb{R}}_{2m}$. L'expression de $\delta(X,X)$ dans $(T_p'M)^{\mathbb{C}}_m$ muni du produit hermitien canonique adapté à la structure complexe ([LIC] chap. V et (7-3)) est

$$\delta(X,X) = 8 \left(\frac{||\nabla'_\xi \, df||^2}{||df||^2} - \frac{\big|\,\xi\,||df||^2\big|^2}{||df||^4}\right)$$

où $\xi = \frac{1}{2}(X - iJX)$

est le vecteur complexe associé au vecteur réel X .
Ce dernier résultat adapté au cas où M' est $\mathbb{C}P^{m+1}$ et M est respectivement $\mathbb{C}P^m$, et la surface K3 précédente avec $m = 2$, permet de retrouver que $\mathbb{C}P^m$ muni de la métrique induite par la métrique de Fubini-Study est bien d'Einstein (à classe de Chern positive) et que la K3 précédente admet comme tenseur de Ricci d'après (9-7) :

$$r(X,X) = 6\,\xi^\alpha \bar{\xi}^\beta \left[\left(\frac{1}{D} - \frac{12(u_\alpha \bar{u}_\beta)^2}{E}\right)\delta_{\alpha\beta} - \left(\frac{1}{D^2} - \frac{12|u_\alpha \bar{u}_\beta|^4}{E^2}\right) u_\beta \bar{u}_\alpha \right]$$

où X est un vecteur tangent à $(T_pM)^{\mathbb{R}}_{2m}$ et

$\xi = \frac{1}{2}(X-iJX)$ dans $(T_pM)^{\mathbb{C}}_{2m}$. Il est alors évident que r n'est pas nul.

Première partie

CALCUL EXPLICITE DU TENSEUR DE RICCI D'UNE HYPERSURFACE COMPLEXE DEFINIE PAR UNE FONCTION.

I Préliminaires algébriques, coordonnées locales et notations

1°) Structure complexe

Soit $E_m^{\mathbb{C}}$ un espace vectoriel complexe de dimension m, et le même ensemble sous-jacent E, considéré comme un espace vectoriel réel $E_{2m}^{\mathbb{R}}$ muni d'une antiinvolution J telle que, pour tout élément X de l'ensemble E on ait la bijection :

$$\begin{array}{ccc} (a+ib)X & \longleftrightarrow & aX+bJX \qquad (a,b)\in\mathbb{R}^2 \\ \text{dans } E_m^{\mathbb{C}} & & \text{dans } E_{2m}^{\mathbb{R}} \end{array}$$

Soit $\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$ une base de $E_m^{\mathbb{C}}$, on considère cet ensemble de vecteurs dans E, ils sont, bien sûr, linéairement indépendants, en tant que vecteurs de $E_{2m}^{\mathbb{R}}$, on démontre que la famille $\{e_1,e_2,\ldots,e_m,Je_1,\ldots,Je_m\}$ constitue une base de $E_{2m}^{\mathbb{R}}$, on complexifie $E_{2m}^{\mathbb{R}}$ muni de cette base et $E_m^{\mathbb{C}}$ s'identifie alors avec le sous-espace propre associé à la valeur propre i de J prolongé naturellement à $E_{2m}^{\mathbb{C}}$.

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}$$

Il vient alors, comme base de vecteurs propres pour J dans $E_m^{\mathbb{C}}$

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{2}(e_\alpha - iJe_\alpha) \qquad e_\alpha = \varepsilon_\alpha + \bar{\varepsilon}_\alpha \qquad 1 \le \alpha \le m$$

Soit maintenant ζ un vecteur de $E_m^{\mathbb{C}}$ on aura

$$\zeta = \sum_{\alpha=1}^{m} \zeta^\alpha \varepsilon_\alpha$$

posons $\zeta^\alpha = x^\alpha + iy^\alpha \quad (x^\alpha, y^\alpha \in \mathbb{R})$

Si on écrit $Z = \sum_{\alpha=1}^{m} (x^\alpha e_\alpha + y^\alpha (Je_\alpha)) \in E_{2m}^{\mathbb{R}}$

on voit immédiatement que

$\zeta = \frac{1}{2}(Z - iJZ)$ dans $E_{2m}^{\mathbb{C}}$, ζ est vecteur propre de J pour la valeur propre i, il s'identifie avec un vecteur de $E_m^{\mathbb{C}}$ et est dit vecteur de type $(1,0)$, de façon similaire,

$\overline{\zeta} = \frac{1}{2}(Z + iJZ)$ dans $E_{2m}^{\mathbb{C}}$, $\overline{\zeta}$ est vecteur propre de J pour la valeur propre $-i$, il est dit vecteur de type $(0,1)$.

<u>Théorème</u> Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un vecteur ζ de $E_{2m}^{\mathbb{C}}$ soit de type $(1,0)$ (resp. de type $(0,1)$) est qu'il existe un vecteur réel Z de $E_{2m}^{\mathbb{R}}$ tel que

$$\zeta = \frac{1}{2}(Z - iJZ) \quad (\text{resp } \zeta = \frac{1}{2}(Z + iJZ))$$

La base $\{e_1, e_2, \dots, e_m, Je_1, \dots, Je_m\}$ de $E_{2m}^{\mathbb{R}}$ est dite <u>base adaptée à la structure complexe J</u>.

2°) <u>Structure métrique</u>

Soit h une forme hermitienne dans $E_m^{\mathbb{C}}$, on peut la prolonger en une forme bilinéaire symétrique sur $E_{2m}^{\mathbb{C}}$ telle que $h(J\zeta_1, J\zeta_2) = h(\zeta_1, \zeta_2)$ d'où :

$h(\zeta, \overline{\zeta}) > 0$ si ζ est de type $(1,0)$

$h(\zeta, \zeta) = 0$ si ζ est de type $(1,0)$ ou $(0,1)$

$h(\zeta, \overline{\eta}) = h(\eta, \overline{\zeta})$ si ζ et η sont de type $(1,0)$

La restriction de h à $E_{2m}^{\mathbb{R}}$ est alors un produit scalaire invariant par J. Il existe des bases orthonormées adaptées à la structure complexe J.

Il correspond à h une 2-forme sur $E_{2m}^{\mathbb{R}}$, invariante par J :

$$\boxed{\omega(X,Y) = h(X,JY)}$$

qui peut être prolongée à $\Lambda^{1,1}(E_{2m}^{\mathbb{C}})^*$.
(En effet J opère aussi sur $(E_{2m}^{\mathbb{C}})^*$ et induit deux sous-espaces propres pour les valeurs propres i et -i, dites des formes de type (1,0) et (0,1) respectivement).

3°) Le cas des variétés

Soit M une variété complexe de dimension m, $(TM)^{\mathbb{C}}$, le fibré tangent, $(T_pM)_m^{\mathbb{C}}$ la fibre au-dessus du point p de M, espace vectoriel complexe de dimension m.
On considère un système de coordonnées locales $\{z^1,\dots,z^m\}$ et la base de $(T_pM)_m^{\mathbb{C}}$, $\{\frac{\partial}{\partial z_1},\dots,\frac{\partial}{\partial z_m}\}$; soit $z^\alpha = x^\alpha + iy^\alpha$, par analogie avec ce qui précède, il vient dans $(T_pM)_{2m}^{\mathbb{R}}$

$$\{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\ ,\ \frac{\partial}{\partial y^\alpha}\ ;\ \alpha = 1,\dots,m\}\quad \text{est une base,}$$

avec

$$\partial/\partial y^\alpha = J\ \partial/\partial x^\alpha \qquad \partial/\partial x^\alpha = -J\partial/\partial y^\alpha$$

on complexifie $(T_pM)_{2m}^{\mathbb{R}}$ comme précédemment, il vient

$$(T_pM)_{2m}^{\mathbb{C}} = (T_pM)_{(1,0)} \oplus (T_pM)_{(0,1)}$$

4°) Une structure métrique ici est donnée par une forme bilinéaire symétrique B sur $(T_pM)_{2m}^{\mathbb{C}}$, invariante par $J = \begin{pmatrix} iI & 0 \\ 0 & -iI \end{pmatrix}$ et telle que

$$\begin{cases} g_{\alpha\bar\beta} = g(\frac{\partial}{\partial z^\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar z^\beta}) \qquad g_{\alpha\bar\alpha} > 0 \\ g_{\alpha\beta} = \underline{g_{\bar\alpha\bar\beta}} = 0 \\ g_{\alpha\bar\beta} = g_{\beta\bar\alpha} \end{cases}$$

Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & G \\ \overline{G} & 0 \end{pmatrix}$, $\overline{G} = {}^tG$

ceci définit une forme hermitienne sur $(T_pM)^{\mathbb{C}}_m \cong (T_pM)_{(1,0)}$

$$\tilde{g}\left(\frac{\partial}{\partial z^\alpha}, \frac{\partial}{\partial z^\beta}\right) = g_{\alpha\overline{\beta}} = \tilde{g}_{\alpha\beta}$$

$$\tilde{g}_{\beta\alpha} = g_{\beta\overline{\alpha}} = \overline{g_{\alpha\overline{\beta}}} = \overline{\tilde{g}_{\alpha\beta}}$$

on note $G = (g_{\alpha\overline{\beta}})$ $\quad 1 \leq \alpha \leq m$

$\qquad\qquad\qquad\qquad 1 \leq \beta \leq m$

Ceci définit une forme euclidienne sur $(T_pM)^{\mathbb{R}}_{2m}$, invariante par J de matrice

(1-1) $$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(G+\overline{G}) & -\frac{i}{2}(G-\overline{G}) \\ -\frac{i}{2}(\overline{G}-G) & \frac{1}{2}(G+\overline{G}) \end{pmatrix}$$

ici $J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ +I & 0 \end{pmatrix}$, dans la base $\{\partial/\partial x^\alpha \ , \ \partial/\partial y^\alpha \ ; \ 1 \leq \alpha \leq m\}$

5°) En coordonnées locales, on identifie $(T_pM)^{\mathbb{R}}_{2m}$ avec un sous-ensemble de $(T_pM)^{\mathbb{C}}_{2m}$, repéré par

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \ , \ \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \quad 1 \leq \alpha \leq m \right\}$$

ce qui donne les relations : $dz^\alpha = dx^\alpha + idy^\alpha$

$$\frac{\partial}{\partial z^\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} - i\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right) \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}^\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} + i\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial}{\partial z^\alpha} + \frac{\partial}{\partial \overline{z}^\alpha} \qquad \frac{\partial}{\partial y^\alpha} = i\left(\frac{\partial}{\partial z^\alpha} - \frac{\partial}{\partial \overline{z}^\alpha}\right)$$

$\frac{\partial}{\partial z^\alpha}$ est bien de type $\frac{1}{2}(X-iJX)$, donc (1,0) avec $X = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$

Si $\zeta = \sum_{\alpha=1}^{m} \zeta^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha}$ est un vecteur quelconque de $(T_pM)^{\mathbb{C}}_m$

on peut poser $\zeta^\alpha = X^\alpha + iY^\alpha$ il vient alors.

$$\zeta = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{m}\left\{\left(X^\alpha\frac{\partial}{\partial x^\alpha} + Y^\alpha\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right) - i\,J\left(X^\alpha\frac{\partial}{\partial x^\alpha} + Y^\alpha\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)\right\}$$

ce qui donne l'expression de la matrice A.

Si $\zeta = \sum_{\alpha=1}^{m} \zeta^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha}$, on lui fait correspondre ses normes

$$||\zeta||_m^{\mathbb{C}} = (g_{\alpha\overline{\beta}}\ \zeta^\alpha\ \overline{\zeta}^\beta)^{1/2} = [{}^t\zeta G\overline{\zeta}]^{1/2}$$

$$= ||\zeta||_{2m}^{\mathbb{R}} = ||X^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + Y^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha}|| = [(X\ Y)\ A\binom{X}{Y}]^{1/2} \quad (*)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ ||\zeta + \overline{\zeta}||_{2m}^{\mathbb{C}} = [{}^t\zeta B\overline{\zeta}]^{1/2} \text{ dans } (T_pM)_{2m}^{\mathbb{C}}$$

II Vecteurs normaux à une hypersurface complexe

Si $\tilde{M}'$ est une variété complexe et $\tilde{M}$ une hypersurface complexe de $\tilde{M}'$ définie par $f(z_1,\dots,z_m) = 0$.
La variété sous-jacente M réelle est de codimension 2 dans M', définie par $\operatorname{Re} f(z_1,\dots,z_m) = 0$ et $\operatorname{Im} f(z_1,\dots,z_m) = 0$

$$\text{i.e.}\begin{cases} \frac{1}{2}(f(z_1,\dots,z_m)+\overline{f}(\overline{z_1},\dots,\overline{z_m})) = 0 = F_1(x_1\dots x_m, y_1\dots y_m) \\ \frac{1}{2i}(f(z_1,\dots,z_m)-\overline{f}(\overline{z_1},\dots,\overline{z_m})) = 0 = F_2(x_1\dots x_m, y_1\dots y_m) \end{cases}$$

Ces deux équations réelles définissent deux vecteurs réels normaux à M en p linéairement indépendants N_1 et N_2 dont les formes associées s'écrivent

$$N_1^\flat : \left\{ \frac{\partial F_1}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial z^\alpha} + \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}^\alpha}\right),\ \frac{\partial F_1}{\partial y^\alpha} = \frac{i}{2}\frac{\partial f}{\partial z^\alpha} - \frac{i}{2}\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}_\alpha} \right\}$$

$$N_2^\flat : \left\{ \frac{\partial F_2}{\partial x^\alpha} = -\frac{i}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial z^\alpha} - \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}^\alpha}\right),\ \frac{\partial F_2}{\partial y^\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial z^\alpha} + \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}^\alpha}\right) \right\}$$

à N_1 correspond le vecteur ν_1 dans $(T_pM')_{2m}^{\mathbb{C}}$ tel que

$$\nu_1 = \frac{1}{2}(N_1 - iJN_1)$$

(*) A partir de maintenant, on utilise la convention de sommation d'Einstein.

Il vient $N_1^b = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial z^\alpha} + \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}^\alpha}\right) \frac{dz^\alpha + d\overline{z}^\alpha}{2} + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial z^\alpha} - \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}^\alpha}\right) \frac{dz^\alpha - d\overline{z}^\alpha}{2i}$

Soit $N_1^b = (\mathrm{Re}\,\partial_\alpha f)\,dx^\alpha - \mathrm{Im}(\partial_\alpha f)\,dy^\alpha$

Donc :

$$\boxed{df = \partial_\alpha f dz^\alpha} \quad \text{et} \quad \boxed{N_1^b = \frac{1}{2}(df + \overline{df})}$$

Or c'est le champ de vecteurs normaux que nous voulons.
Soit en coordonnées locales pour $N_1 = X^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + Y^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(g_{\alpha\overline{\beta}} + g_{\beta\overline{\alpha}})X^\beta - \frac{i}{2}(g_{\alpha\overline{\beta}} - g_{\beta\overline{\alpha}})Y^\beta = \mathrm{Re}\,\partial_\alpha f \\ \frac{i}{2}(g_{\alpha\overline{\beta}} - g_{\beta\overline{\alpha}})X^\beta + \frac{1}{2}(g_{\alpha\overline{\beta}} + g_{\beta\overline{\alpha}})Y^\beta = -I_m \partial_\alpha f \end{cases} \qquad \text{(Voir(1-1))}$$

On note maintenant $\partial_\alpha f = \frac{\partial f}{\partial z^\alpha}$

$$\text{Soit} \begin{cases} \mathrm{Re}\, g_{\alpha\overline{\beta}}\, X^\beta + \mathrm{Im}\, g_{\alpha\overline{\beta}}\, Y^\beta = \mathrm{Re}(\partial_\alpha f) \\ -\mathrm{Im}\, g_{\alpha\overline{\beta}}\, X^\beta + \mathrm{Re}\, g_{\alpha\overline{\beta}}\, Y^\beta = -\mathrm{Im}(\partial_\alpha f) \end{cases}$$

Si on multiplie la deuxième équation par (-i), il vient

$$g_{\alpha\overline{\beta}}\, X^\beta - i\, g_{\alpha\overline{\beta}}\, Y^\beta = \partial_\alpha f$$

soit $g_{\alpha\overline{\beta}}\, \overline{\nu}_1^\beta = \partial_\alpha f$ dans $(T_p M')^{\mathbb{C}}_{2m}$

$$\boxed{\overline{\nu}_1^\beta = g^{\alpha\overline{\beta}}\, \partial_\alpha f}$$

Pour $N_2 = JN_1$ on obtient $\nu_2 = i\nu_1 = i\, g^{\alpha\overline{\beta}} \partial_{\overline{\beta}} f\, \partial_\alpha$

$$N_2^b = -\frac{i}{2}(\partial_\alpha f - \partial_{\overline{\alpha}} \overline{f}) \frac{dz^\alpha + d\overline{z}^\alpha}{2} + \frac{1}{2}(\partial_\alpha f + \partial_{\overline{\alpha}} \overline{f}) \frac{dz^\alpha - d\overline{z}^\alpha}{2i}$$

$$= -\frac{i}{2}\partial_\alpha f\, dz^\alpha + \frac{i}{2}\partial_{\overline{\alpha}}\overline{f}\, d\overline{z}^\alpha = -\frac{i}{2}(df - d\overline{f}) = \mathrm{Im}\, df.$$

$$\boxed{N_2^b = -\frac{i}{2}(df - \overline{df})}$$

Il vient :

$$\boxed{\nu_2^{\bar\beta} = -i\, g^{\alpha\bar\beta}\partial_\alpha \bar f}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \nu_2^\alpha &= i\, g^{\alpha\bar\beta}\partial_{\bar\beta}\bar f \\ \nu_1^\alpha &= g^{\alpha\bar\beta}\,\partial_{\bar\beta}\bar f \end{aligned}}$$

en tant que vecteurs complexes de type (1,0), on a $\nu_2 = J\nu_1 = i\nu_1$, on a aussi

$$(2\text{-}1)\qquad \begin{aligned} ||\nu_1||_m^{\mathbb{C}} &= ||N_1||_{2m}^{\mathbb{R}} = ||\nu_1||_{2m}^{\mathbb{C}} \\ &= ||N_2||_{2m}^{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

on notera dans la suite $F = ||N_1||^2 = ||N_2||^2 = g^{\alpha\bar\beta}\partial_\alpha f\partial_{\bar\beta}\bar f = ||\nu_1||^2$

En conclusion

$$(2\text{-}2)\qquad \left\{\begin{aligned} \nu_1 &= \tfrac{1}{2}(N_1 - iJN_1) \qquad N_1 = \tfrac{1}{2}(df+d\bar f)^{\#} \\ \nu_2 &= \tfrac{1}{2}(N_2 - iJN_2) \qquad N_2 = -\tfrac{i}{2}(df-d\bar f)^{\#} = JN_1 \end{aligned}\right.$$

III Forme de Ricci d'une variété complexe kählerienne $\tilde{M}_m$ plongée dans une autre $\tilde{M}'_{m+p}$

La référence pour les techniques utilisées ici est [KN].

Soit M_{2m} la variété réelle sous-jacente à $\tilde{M}_m$ et $M'_{2(m+p)}$ la variété réelle sous-jacente à $\tilde{M}_{m+p}$.
Notons g,g',R,R',r,r' respectivement les tenseurs riemanniens métriques, de courbure, de Ricci, respectivement de M_{2m} et $M'_{2(m+p)}$. g étant la métrique induite par g'.

Soit $\{V_1,V_2,\dots,V_{m+p},JV_1,\dots,JV_{m+p}\}$ une base orthonormale de $T_p\, M'_{2(m+p)}$, telle que $\{V_1,V_2,\dots,V_m,JV_1,\dots,JV_m\}$ soit une base orthonormale de T_pM_{2m}.

Il vient alors, pour un champ X de $(TM)^{\mathbb{R}}_{2m}$

$$r(X,X) = \sum_{i=1}^{m+p} (R'(V_i,X,V_i,X)+R'(JV_i,X,JV_i,X)-2\sum_{i=1}^{m} g'(\alpha(V_i,X),\alpha(V_i,X)) \tag{3-1}$$

([KN] p 177)

α est la deuxième forme fondamentale du plongement, soit

$$\alpha(X,Y)= \sum_{i=m+1}^{m+p} g'(\nabla_X Y,V_i)V_i + \sum_{i=m+1}^{m+p} g'(\nabla_X Y,JV_i)JV_i$$

La simplification introduite dans (3-1) est dûe à la propriété kählerienne :

$$\alpha(JX,Y) = \alpha(X,JY)\ (=J\alpha(X,Y))$$

d'où

$$\alpha(JX,JY) = -\alpha(X,Y)$$

ainsi les termes $g'(\alpha(V_i,V_i),\alpha(X,X))$ et $g'(\alpha(JV_i,JV_i),\alpha(X,X))$ se détruisent.

Dans le cas d'une variété ambiante M' à courbure sectionnelle holomorphe constante c (le cas de $\mathbb{C}P^{m+p}$ que l'on va examiner par la suite), on a en coordonnées locales :

$$R'_{\alpha\bar\beta\gamma\bar\delta} = -\frac{1}{2}\,c\,(g'_{\alpha\bar\beta}\ g'_{\gamma\bar\delta} + g'_{\alpha\bar\delta}\ g'_{\bar\beta\gamma})$$

Donc si $N \in (T_pM)^{\perp}$ et $X \in T_pM$, il vient

$$R'(N,X,N,X) = R'(JN,X,JN,X) = \frac{c}{2}||X||^2||N||^2$$

Dans ce cas $r' = \frac{1}{2}(m+p+1)cg'$ ([KN] p. 167 et 168)

(3-2) $$r(X,X) = r'(X,X) - \frac{pc}{2}\,g'(X,X) - 2\sum_{i=1}^{m} g'(\alpha(V_i,X),\ \alpha(V_i,X))$$

(3-3) soit $r(X,X) = \frac{1}{2}(m+1)cg(X,X) - \delta(X,X)$

Il reste donc à calculer le terme correctif δ qui mesure le défaut de M à être une variété d'Einstein à courbure holomorphe sectionnelle constante c .

IV Introduction d'une 2ème forme généralisée β

1°) Définition de β

Soit $X \in (T_pM)^R_{2m}$ plongée

$Y \in (T_pM')^R_{2(m+p)}$ ambiante

on a $\nabla'_Y X = (\nabla'_Y X)^T + (\nabla'_Y X)^N$ en p .

(décomposition en partie tangente à M et partie normale à M).

Prolongeons localement tout champ V de NM, le fibré normal de M, par un champ $\tilde V$ de TM' tangent au flot normal dans un voisinage tubulaire de M et prolongeons un champ X tangent à M par un champ $\tilde X$ orthogonal au flot normal (le prolongement est radial autour de p).

On pose $\beta(X,Y) = (\nabla'_{\tilde{Y}}\tilde{X})^N$, $\beta_p \in T_pM^* \otimes T_pM'^* \otimes N_pM^*$

La restriction de β à $TM^* \otimes TM^*$ est bien α.

Il vient

$$\beta(X,Y) = \sum_{i=m+1}^{m+p+1} g'(\nabla'_Y X, V_i)V_i + \sum_{i=m+1}^{n+p+1} g'(\nabla'_Y X, JV_i)JV_i$$

où les V_i, JV_i constituent une base orthonormale de la fibre de NM en p adaptée à la structure complexe.

Comme on a supposé $g'(\tilde{X},\tilde{V}_i) = 0$ et $g'(\tilde{X},\tilde{J}\tilde{V}_i) = 0$

$$\beta(X,Y) = -\sum_i g'(X,\nabla'_Y V_i)V_i - \sum_i g'(X,\nabla'_Y JV_i)JV_i$$

Donc le résultat ne dépend que des valeurs de X et Y en p.

2°) <u>Cas d'une hypersurface complexe</u>

dans le cas d'une hypersurface si on pose

$$F = ||N_1||^2 = ||JN_1||^2 \quad \text{(voir (2-1))}$$

$$F\,\beta(X,Y) = g'(\nabla'_Y X,N_1)N_1 + g'(\nabla'_Y X,JN_1)JN_1$$

Etudions la représentation de β dans $(TM')^{\mathbb{C}}_{2(m+p)}$, soit A

$$(4\text{-}1)\quad \left\{\begin{aligned} FA &= \tfrac{1}{2}F\,\{\beta(X,Y)-iJ\beta(X,Y)\} = \tfrac{1}{2}g'(\nabla'_Y X,N_1+iJN_1)(N_1-iJN_1) \\ &= \tfrac{1}{2}g'(\nabla'_Y X-iJ\nabla'_Y X,N_1+iJN_1)\ \tfrac{1}{2}(N_1-iJN_1) \\ &= 2\ g'(\nabla'_Y\xi,\bar{\nu})\nu \end{aligned}\right.$$

où l'on a posé : $\xi = \frac{1}{2}(X-iJX) \in (T_pM)^{\mathbb{C}}_{2m}$

$$\nu = \frac{1}{2}(N_1-iJN_1) \in (T_pM')^{\mathbb{C}}_{2(m+p)}$$

et où g' est le produit bilinéaire symétrique dans $(T_pM')^{\mathbb{C}}_{2(m+p)}$.

La formule finale, devient donc, en tenant compte que dans $(T_pM')^{\mathbb{C}}_{2(m+p)}$ $\quad Y = \eta+\bar{\eta}$ et $\nabla'_Y\xi = \nabla'_\eta\xi$

$$(4\text{-}2)\qquad \boxed{||\beta(X,Y)||^2 = ||A||^2 = \frac{4}{F}|g'(\nabla'_\eta\xi,\bar{\nu})|^2}$$

V Calcul d'une trace sur TM'

Les formules (3-2) et (3-3) nous montrent que le terme $\delta(X,X)$ du tenseur de Ricci pour la métrique induite et un champ X, est égal à la trace de la forme quadratique

$$||\alpha(.,X)||^2$$

sur $(T_p(M))^{\mathbb{R}}_{2m}$

Pour calculer cette trace nous allons utiliser la 2° forme fondamentale généralisée β et écrire que

(5-1) $$\mathrm{Tr}||\alpha(.,X)||^2 = \mathrm{Tr\,tot}||\beta(X,.)||^2 - \mathrm{Trn}\,||\beta(X,.)||^2$$

où Trtot désigne la trace de $||\beta(X,.)||^2$ sur

$(T_pM')^{\mathbb{R}}_{2(m+p)}$ et Trn $||\beta(X,.)||^2$ désigne la trace de $||\beta(X,.)||^2$ restreinte au fibré normal au-dessus du point p .

J'écris la trace totale

$$\mathrm{Trtot} = \sum_{i=1}^{m+p}(||\beta(X,V_i)||^2 + ||\beta(X,JV_i)||^2)$$

(5-2) $$\boxed{\mathrm{Trtot} = \frac{8}{F}\, g'^{\lambda\mu}\xi^\alpha\xi^{\overline{\beta}}\,(\nabla'_\lambda\partial_\alpha f)\,(\nabla'_{\overline{\mu}}\partial_{\overline{\beta}}\overline{f})}$$

Remarque : On a utilisé les relations suivantes :

$$\sum_{\alpha=1}^{m+p}\xi^\alpha\partial_\alpha f = 0 = \sum_{\beta=1}^{m+p}\xi^{\overline{\beta}}\,\partial_{\overline{\beta}}\overline{f}$$

(car X est tangent à M)

$$\nabla_\alpha(F) = g^{\lambda\overline{\mu}}(\nabla_\alpha\partial_\lambda f)\partial_{\overline{\mu}}\overline{f} = g^{\lambda\overline{\mu}}(\nabla_\lambda\partial_\alpha f)\partial_{\overline{\mu}}\overline{f}$$

$$\Gamma^\lambda_{\alpha\overline{\beta}} = 0 = \Gamma^{\overline{\mu}}_{\alpha\overline{\beta}}$$

$$\nabla_{\overline{\beta}}\xi^\alpha = 0 = \nabla_\alpha\xi^{\overline{\beta}}$$

VI Trace restreinte au fibré normal (en codimension 1 complexe)

Pour la deuxième forme généralisée on a donc en notant Trn la trace restreinte au fibré normal

$$\mathrm{Trn} = ||\beta(X,\dot{N}_1)||^2 + ||\beta(X,J\dot{N}_1)||^2$$

où $\dot{N}_1 = \frac{N_1}{\sqrt{F}} \quad J\dot{N}_1 = J\frac{N_1}{\sqrt{F}}$

$$F = ||N_1||^2 \; (= g^{\alpha\bar{\beta}} \; (\partial_\alpha f)(\partial_{\bar{\beta}}\bar{f}))$$

$$\mathrm{Trn} = \frac{4}{F}|< \nabla'_{N_1/F}\xi,\bar{\nu}>|^2 + \frac{4}{F}|<\nabla'_{JN_1/F}\xi,\bar{\nu}>|^2$$

d'après les formules (4-1) et (4-2) p. 10, le produit <,> étant le produit bilinéaire symétrique invariant par J dans $(T_pM)^{\mathbb{C}}_{2m}$

$$\text{or} \quad N_1 = \nu + \bar{\nu}$$
$$JN_1 = i(\nu - \bar{\nu})$$

et sachant que $\nabla'_{\bar{\nu}}\xi = 0 = \nabla'_{\nu}\bar{\xi}$, il vient

$$\mathrm{Trn} = \frac{4}{F^2}|<\nabla'_{\nu}\xi,\bar{\nu}>|^2 + \frac{4}{F^2}|<\nabla'_{i\nu}\xi,\bar{\nu}>|^2$$

$$= \frac{8}{F^2}|<\nabla'_{\nu}\xi,\bar{\nu}>|^2$$

en coordonnées locales $<\nabla'_{\nu}\xi,\bar{\nu}> = g^{\lambda\bar{\beta}}(\partial_{\bar{\beta}}\bar{f})(\nabla'_{\lambda}\xi^{\alpha})\partial_{\alpha}f$

$$= - g^{\lambda\bar{\beta}}(\partial_{\bar{\beta}}\bar{f})(\nabla'_{\lambda}\partial_{\alpha} f)\;\xi^{\alpha}$$

(6-1) D'où $\boxed{\mathrm{Trn} = \frac{8}{F^2}\;\xi^{\alpha}\bar{\xi}^{\bar{\beta}}\;g^{\lambda\bar{\sigma}}(\partial_{\bar{\sigma}}\bar{f})(g^{\bar{\mu}\rho}\partial_{\rho}f)(\nabla'_{\lambda}\partial_{\alpha}f)(\nabla'_{\bar{\mu}}\partial_{\bar{\beta}}\bar{f})}$

VII Forme de Ricci de la variété plongée

D'après les formules (3-2) et (3-3) p. 9 et (5-1) p. 11 le terme correctif, pour une variété kählérienne plongée dans une variété kählérienne est donc, en coordonnées locales

(7-1)
$$\boxed{\begin{aligned}&\mathrm{Tr}\,||\alpha(X,.)||^2 = \\ &\frac{8}{F^2}\,\xi^\alpha\xi^\beta(\nabla'_\lambda\partial_\alpha f)(\nabla'_{\bar\mu}\,\partial_{\bar\beta}\bar f)\,[Fg'^{\lambda\bar\mu}-(g'^{\lambda\bar\sigma}\partial_{\bar\sigma}\bar f)(g'^{\bar\mu\rho}\partial_\rho f)]\end{aligned}}$$

soit en fonction de la Hessienne de f :

(7-2)
$$\boxed{\mathrm{Tr}\,||\alpha(X,.)||^2 = \frac{8}{||\nu||^4}\{||\nu||^2||\mathrm{Hess} f(X,.)||^2-||\mathrm{Hess}.f(X,\nu)||^2}$$

où $\nu = g^{\alpha\bar\beta}\partial_{\bar\beta}\bar f\ \dfrac{\partial}{\partial z^\alpha}$ localement ou encore

(7-3)
$$\mathfrak{S}(X,X) = 8\left(\frac{||\nabla_\xi df||^2}{||df||^2} - \frac{||\,||\xi||df||^2\,||^2}{||df||^4}\right)$$

Deuxième partie

CALCUL DE LA FORME DE RICCI DES HYPERSURFACES COMPLEXES DE $\mathbb{C}P^m$ DEFINIES PAR L'ANNULATION D'UN POLYNOME HOMOGENE
(cas particulier d'une K3)

VIII Rappels sur $\mathbb{C}p^3$

$\mathbb{C}P^3$ munie de la métrique de FUBINI-STUDY est une variété Kählerienne de courbure sectionnelle holomorphe constante c (Kählerienne $\Leftrightarrow$ complexe et $d\omega = 0$).

1°) Ouvert de coordonnées sur $\mathbb{C}P^3$

Soit dans $\mathbb{C}^4 =, \{(z_0, z_1, z_2, z_3)\}$ un ouvert de coordonnées défini autour de la classe $\{(z_0, 0, 0, 0) \; ; \; z_0 \in \mathbb{C}\}$ de $\mathbb{C}^4$ qui définit un point de $\mathbb{C}P^3$ centre d'un ouvert de coordonnées locales $\left\{(1, u_1, u_2, u_3) \; ; \; (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{C}^3\right\}$ tel que, $u_\alpha = z_\alpha / z_0$. Il y a

ainsi 4 ouverts de coordonnées locales.
La métrique de Fubini-Study dans un tel ouvert est donnée par

(8-1) $$\boxed{g'_{\alpha\bar\beta} = 4 \, \frac{\delta_{\alpha\bar\beta} D - u^\beta \bar u^\alpha}{c D^2}}$$

(8-2) $$\boxed{g'^{\alpha\bar\beta} = c \frac{D}{4} (\delta^{\alpha\bar\beta} + u^\alpha \bar u^\beta)}$$

$\alpha, \beta = 1, 2, 3$

$$D = 1 + \sum_{\alpha=1}^{3} u^\alpha \bar u^\alpha$$

On peut déduire de la métrique les coefficients de connexion kählerienne.

$$\Gamma'^{\rho}_{\alpha\bar\beta} = 0 = \Gamma'^{\bar\sigma}_{\alpha\bar\beta} = 0 = \Gamma'^{\bar\beta}_{\alpha\rho} = \Gamma'^{\alpha}_{\bar\beta\bar\sigma}$$

$\forall\ \alpha, \beta, \rho, \sigma = 1,2,3$

$$\Gamma'^{\rho}_{\lambda\ \alpha} = g'^{\rho\bar\sigma}\,\partial_\lambda\, g'_{\alpha\bar\sigma} = g'^{\rho\bar\sigma}\,\partial_\alpha g'_{\lambda\bar\sigma}$$

(8-3) $$\boxed{\Gamma'^{\rho}_{\lambda\alpha} = -\frac{1}{D}(\delta_{\rho\alpha}\bar u_\lambda + \delta_{\rho\lambda}\,\bar u_\alpha)}$$

$\mathbb{C}P^3$ est une variété à courbure sectionnelle constante, donc, on sait (K.N. p. 168)

(8-4) $$\boxed{r' = \frac{1}{2}\,(m+2)cg' = 2cg'}$$

On a aussi $u' = (m+1)(m+2)c$ et $r' = \dfrac{u'}{2m+2}\,g'$, où u' est la courbure scalaire.

Soit ici $u' = 12c$ et $r' = (u'/6)g'$

IX <u>Calcul des traces cherchées sur $\mathbb{C}P^m$ (resp. sur $M = K3$) comme hypersurfaces complexes de $\mathbb{C}P^{m+1}$ (resp. $\mathbb{C}P^3$)</u>

1°) <u>Cas de $M = \mathbb{C}P^m$</u> on prend $c = 1$

$\mathbb{C}P^m$ peut être considéré comme une variété plongée dans $\mathbb{C}P^{m+1}$ définie comme noyau du polynôme homogène

(9-1) $$\boxed{F(z) = z_{m+1} = 0}$$

ou en coordonnées locales non homogènes par

(9-2) $$\boxed{f(u) = u_{m+1} = 0}$$

Il vient alors pour la deuxième forme fondamentale

$$\alpha(X,Y) = 2\langle\nabla_\eta\xi, \bar\nu\rangle\nu = -2\langle\xi, \nabla_{\bar\eta}\nu\rangle\nu$$

où $$\nu = g^{\alpha\bar\beta}\partial_{\bar\beta} f\frac{\partial}{\partial z^\alpha} = \frac{D}{4}(\delta^{\alpha\beta} + u^\alpha\,\bar u^\beta)\quad\delta_{\beta,\,m+1}\ \frac{\partial}{\partial z^\alpha}$$

$$= \frac{D}{4}\left(\frac{\partial}{\partial z^{m+1}} + \bar u_{m+1}\ u^\alpha\,\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\right)$$

mais sur $\mathbb{C}P^m$, $u_{m+1} = 0 = \bar{u}_{m+1}$ donc

$$\nu = \frac{D}{4}\frac{\partial}{\partial z^{m+1}} \qquad D = 1 + \sum u_\lambda \bar{u}_\lambda, \lambda = 1,\ldots,m+1$$

Calculons $\nabla'_\eta \nu$ sur M , $\eta = \eta^\lambda \frac{\partial}{\partial z^\lambda}$

$$\nabla'_\eta \nu = \frac{1}{4}\eta^\lambda \bar{u}_\lambda \frac{\partial}{\partial z^{m+1}} + \frac{D}{4}\eta^\lambda(-\frac{1}{D})(\delta_{\lambda\alpha}\bar{u}_{m+1} + \delta_{m+1,\alpha}\bar{u}_\lambda)\frac{\partial}{\partial z^\alpha}$$

$$= (\frac{1}{4}\eta^\lambda \bar{u}_\lambda - \frac{1}{4}\eta^\lambda \bar{u}_\lambda)\frac{\partial}{\partial z^{m+1}} \qquad (\bar{u}_{m+1} = 0 \text{ sur } M)$$

$$= 0$$

Donc la deuxième forme fondamentale est nulle et

(9-3) $$\boxed{r(X,X) = r'(X,X) - \frac{c}{2}g'(X,X) = \frac{u}{2m}g(X,X)}$$

Donc

$$\boxed{u = \frac{m}{m+2}u'}$$

Vérifions que notre formule générale donne bien le même résultat.

Car ici $\boxed{F = g'^{m+1,\overline{m+1}} = \frac{D}{4}}$ sur M

en effet $F = g'^{\alpha\bar{\beta}}\delta_{\alpha,m+1}\,\delta_{\beta,m+1} = g'^{m+1,\overline{m+1}} = \frac{D}{4}(1+u_{m+1}\,\bar{u}_{m+1})$

$= D/4$ sur M

et $\nabla'_\lambda \; \partial_\alpha f = \partial_\lambda \partial_\alpha f - \Gamma'^{\sigma}_{\lambda\alpha}\;\partial_\sigma f$

$$\nabla'_\lambda \; \partial_\alpha f = + \frac{1}{D}(\partial_\lambda f \bar{u}_\alpha + \partial_\alpha f \bar{u}_\lambda)$$

$$= \frac{1}{D}(\delta_{\lambda,m+1}\bar{u}_\alpha + \delta_{\alpha,m+1},\ \bar{u}_\lambda)$$

$$\nabla'_{\bar{\mu}}\partial_{\bar{\beta}} f = \frac{1}{D}(\delta_{\mu,m+1}u_\beta + \delta_{\beta,m+1}\;u_\mu)$$

D'où comme ξ est tangent à M, $\xi^{m+1} = 0 = \bar{\xi}^{m+1}$

$$\delta(X,X) = \frac{8\times 16}{D^2} \quad \xi^{\alpha}\bar{\xi}^{\beta} \frac{1}{D^2}\left[\frac{D}{4}(g^{\prime m+1,\overline{m+1}} \quad \bar{u}_{\alpha}u_{\beta}) - (g^{\prime m+1,\overline{m+1}})^2\bar{u}_{\alpha}u_{\beta}\right] = 0$$

Ce qui signifie que la trace totale de $||\beta(X,.)||^2$ est égale à sa trace normale

$$\boxed{\frac{32}{D^2}\ \xi^{\alpha}\bar{\xi}^{\beta}\ \bar{u}_{\alpha}u_{\beta}}$$

2°) Cas de M = une K3 dans $\mathbb{C}P^3$

On a choisi ici comme K3 celle définie par le noyau d'un polynôme homogène de degré 4.

$$F(z) = z_0^4 + z_1^4 + z_2^4 + z_3^4 = 0$$

ou en coordonnées locales

$$f(u_1,u_2,u_3) = u_1^4 + u_2^4 + u_3^4 + 1 = 0$$

et ceci dans chacun des 4 ouverts de coordonnées.

Il vient alors ici

(9-3)
$$\boxed{\begin{array}{ll} \partial_{\alpha}f = 4u_{\alpha}^3 & \partial_{\lambda}\partial_{\alpha}f = \delta_{\lambda\alpha}\ 12u_{\alpha}^2 \\ \sum_{\alpha}\xi^{\alpha}\partial_{\alpha}f = 0 = 4\sum_{\alpha}u_{\alpha}^3\ \xi^{\alpha} & \end{array}}$$

$$F = g^{\prime\lambda\bar{\mu}}(\partial_{\lambda}f)(\partial_{\bar{\mu}}\bar{f}) = \frac{D}{4}(\delta^{\lambda\mu}+u^{\lambda}\bar{u}^{\mu})\,4u_{\lambda}^3\ .\bar{u}_{\mu}3$$

$$F = 4\,D\,(\sum_{\lambda}u_{\lambda}^3\ \bar{u}_{\lambda}^3 + 1) = 4DE$$

en posant $E = 1 + \sum_{\lambda=1}^{3} u_{\lambda}^3\ \bar{u}_{\lambda}^3$

$$D = 1 + \sum_{\lambda=1}^{3} u_{\lambda}\bar{u}_{\lambda}$$

$$\begin{aligned} \nabla'_{\lambda}\ \partial_{\alpha}f &= \partial_{\lambda}\partial_{\alpha}f - \Gamma'^{\tau}_{\lambda\alpha}\ \partial_{\tau}f \\ &= 12\delta_{\lambda\alpha}\ u_{\alpha}^2 - (-\tfrac{1}{D})(\delta_{\alpha}^{\tau}\bar{u}_{\lambda}+\delta_{\lambda}^{\tau}\bar{u}_{\alpha})\ 4u_{\tau}^3 \\ &= 12\delta_{\lambda\alpha}\ u_{\alpha}^2 + \tfrac{4}{D}(\bar{u}_{\lambda}u_{\alpha}^3 + \bar{u}_{\alpha}u_{\lambda}^3) \end{aligned}$$

$$Fg'^{\lambda\bar{\mu}} = 4DE.\frac{D}{4}(\delta^{\lambda\mu}+u_\lambda\bar{u}_\mu)$$

$$(g'^{\lambda\bar{\rho}}\partial_{\bar{\rho}}\bar{f})(g'^{\bar{\mu}\sigma}\partial_\sigma f) = \frac{D}{4}\sum_{\rho,\sigma}(\delta^{\lambda\rho}+u_\lambda\bar{u}_\rho)\ 4\bar{u}_\rho^3.D(\delta^{\mu\sigma}.\bar{u}_\mu u_\sigma)u_\sigma^3$$

$$= D^2(\bar{u}_\lambda^3 - u_\lambda)(u_\mu^3-\bar{u}_\mu)$$

Dans $\nabla'_\lambda\partial_\alpha f$ le terme en u_α^3 donne 0 ($\sum_\alpha \xi^\alpha u_\alpha^3 = 0$)

Il reste donc pour la trace totale sur $\mathbb{C}P^3$

$$\mathrm{Trtot} = D^2E(\delta_{\lambda\mu}+u_\lambda\bar{u}_\mu)(12\delta_{\lambda\alpha}u_\alpha^2 + \frac{4}{D}\bar{u}_\alpha u_\lambda^3)$$

$$(12\delta_{\mu\beta}\bar{u}_\beta^2 + \frac{4}{D}u_\beta\bar{u}_\mu^3)\ \frac{8\ \xi^\alpha\bar{\xi}^\beta}{16D^2E^2}$$

$$\mathrm{Trtot} = \mathrm{Tr}\|\beta(X,.)\|^2 \quad \text{dans } TM'$$

(9-4)
$$\boxed{\mathrm{Trtot} = \frac{8\xi^\alpha\bar{\xi}^\beta}{D^2E^2}\{9D^2\delta_{\alpha\beta}u_\alpha^2\ \bar{u}_\beta^2E + 3DE(|u_\alpha\bar{u}_\alpha|^2+|u_\beta\bar{u}_\beta|^2)\bar{u}_\alpha u_\beta + E^2\bar{u}_\alpha u_\beta\}}$$

Trace normale (p. 10)

$$\mathrm{Trn} = \frac{8}{F^2}\ \xi^\alpha\bar{\xi}^\beta\ [g'^{\lambda\bar{\sigma}}(\nabla'_\lambda\partial_\alpha f)(\partial_{\bar{\sigma}}\bar{f})]\ [(\nabla'_{\bar{\mu}}\ \partial_{\bar{\beta}}\bar{f})g^{\bar{\mu}\rho}(\partial_\rho f)]$$

$$\mathrm{Trn.} = \frac{8\mathrm{x}16}{16D^2E^2}\quad \xi^\alpha\bar{\xi}^\beta[3Du_\alpha^2\ \bar{u}_\alpha^3 + E\bar{u}_\alpha]\ [3D\bar{u}_\beta{}^2u_\beta^3 + Eu_\beta]$$

(9-5)
$$\boxed{\mathrm{Trn} = \frac{8}{D^2E^2}\ \xi^\alpha\bar{\xi}^\beta[9D^2|u_\alpha|^4|u_\beta|^4 + 3DE(|u_\alpha|^4+|u_\beta|^4+E^2]\bar{u}_\alpha u_\beta}$$

$$\boxed{\text{Trace cherchée} = \mathrm{Trtot} - \mathrm{Trn}}$$

$$\delta(X,X) = \frac{8\xi^\alpha\xi^\beta}{D^2E^2}\left[9D^2(u_\alpha\bar{u}_\beta)^2\ [\delta_{\alpha\beta}E-(\bar{u}_\alpha u_\beta)^2]\right]$$

(9-6)
$$\boxed{\delta(X,X) = 72\ \xi^\alpha\bar{\xi}^\beta(u_\alpha\bar{u}_\beta)^2\quad \frac{\delta_{\alpha\beta}.E - (\bar{u}_\alpha u_\beta)^3}{E^2}}$$

D'où

$$r(X,X) = \frac{1}{2}(m+1)cg'(X,X) - \delta(X,X)$$

$$\boxed{r(X,X) = 6\xi^{\alpha}\bar{\xi}^{\beta}\left[\left(\frac{1}{D} - \frac{12(u_\alpha\bar{u}_\beta)^2}{E}\right)\delta_{\alpha\beta} - \left(\frac{1}{D^2} - \frac{12|u_\alpha u_\beta|^4}{E^2}\right)u_\beta\bar{u}_\alpha\right]} \tag{9-7}$$

où $D = 1 + \sum_{\lambda=1}^{3} u_\lambda\bar{u}_\lambda$

$E = 1 + \sum_{\lambda=1}^{3} (u_\lambda\bar{u}_\lambda)^3$

or sur une K3 si la métrique était d'Einstein dans la classe de Kähler de la métrique induite on aurait $r_{\alpha\bar{\beta}} = 0$, car la classe de Chern d'une K3 est nulle.
Ce n'est clairement pas le cas ici.

BIBLIOGRAPHIE

Chaque livre cité renvoie à la bibliographie originale.

[A-B] Géométrie Riemannienne en dimension 4. Séminaire Arthur Besse - Cédic/Fernand Nathan (1981).

[AST] Astérisque 58 - Première classe de Chern et courbure de Ricci : preuve de la conjecture de CALABI. Séminaire PALAISEAU (1978).

[K-N] Kobayashi-Nomizu "Foundations of differential geometry" Interscience publischers (1969)

[LIC] Lichnérowicz 'Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie" Dunod (1955).