Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

LAURENT GUILLOPÉ

Analyse sur les variétés

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome S9 (1991), p. 83-89

<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1991__S9__83_0>

RENCONTRES DE THEORIE SPECTRALE ET GEOMETRIE
GRENOBLE 1991
(Aussois du 7 au 14 avril)

Analyse sur les variétés

Laurent GUILLOPÉ

Institut Fourier *
Université de Grenoble 1
B.P. 74
38402 SAINT MARTIN D'HERES CEDEX
FRANCE

* Laboratoire associé au CNRS.

Distributions

Soit (M^n, g) une variété riemannienne (sans bord, orientée), dont dv_g notera la n–forme volume. L'espace des distributions $\mathcal{D}'(M)$ sur M est le dual topologique de l'espace $\mathcal{D}(M)$ des fonctions C^∞ à support compact. Les espaces de fonctions standard $(C^\infty(M), L^p_{\text{loc}}(M, dv_g)\ldots)$ s'injectent continûment dans $\mathcal{D}'(M)$ en associant à toute fonction f la mesure induite par la n–forme $f dv_g$. D'aucuns préféreront l'approche faisceautique : une distribution est un ensemble de données locales (distributions dans des ouverts de cartes) compatibles (vis à vis de l'action du pseudo–groupe des difféomorphismes des ouverts de $\mathbf{R}^n$).

Toute distribution à support compact étant d'ordre borné, l'espace des distributions sur une variété compacte coïncide avec l'union des espaces de Sobolev : $\mathcal{D}'(M) = \cup_{s\in\mathbf{R}} H^s(M)$, l'intersection se réduisant aux fonctions lisses : $\mathcal{D}(M) = \cap_{s\in\mathbf{R}} H^s(M)$.

Le théorème des noyaux annonce l'ubiquité des distributions :

Théorème ([7, p. 128]). — *Soient M, N deux variétés riemanniennes. Il y a correspondance biunivoque entre les opérateurs continus de $\mathcal{D}(M)$ dans $\mathcal{D}'(N)$ et les distributions sur le produit $M \times N$. A la distribution T est associé l'opérateur T défini par $< T\varphi, \psi > = < T, \varphi \otimes \psi >, \varphi \in \mathcal{D}(M), \psi \in \mathcal{D}(N)$.*

Exemple. — En coordonnées locales, le laplacien correspond à la distribution

$$\sum_{j,l} \theta^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j}(\theta g^{j,l}) \frac{\partial}{\partial x_j} \delta(x-y) + g^{j,l} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_l} \delta(x-y).$$

La régularité de la distribution–noyau est lié aux effets régularisants de l'opérateur associé, comme l'illustre le théorème :

Théorème ([7, p. 132]). — *Soient M, N compactes. Tout opérateur continu de $\mathcal{D}'(M)$ dans $\mathcal{D}(N)$ a un noyau dans $\mathcal{D}(M \times N)$ et réciproquement.*

Exemple 1. — L'opérateur $e^{-t\Delta}$ est à noyau C^∞.

Le laplacien (elliptique) satisfait à l'estimée *a priori* ([9, p. 240],[5, p. 134]), dite de Schauder, $||u||_{s+2} \leqslant C(||\Delta u||_s + ||u||_s)$, qui permet d'affirmer que la structure normée de $H^s(M)$ est donnée par la norme $||(1+\Delta)^{s/2} u||_{L^2(M)}$. Un opérateur A de $L^2(M)$ se prolonge donc comme opérateur de $H^s(M)$ dans $H^{\bar{s}}(M)$ si $(\Delta+1)^{\bar{s}/2} A (\Delta+1)^{-s/2}$ est borné dans $L^2(M)$. Il en est bien ainsi pour $e^{-t\Delta}$.

Exemple 2. — La résolvante $(\Delta+1)^{-1}$ a un noyau C^∞ en dehors de la diagonale.

Il s'agit de montrer que $\chi_1(\Delta+1)^{-1}\chi_2$ (pour χ_1, χ_2 fonctions lisses de support disjoint) se prolonge en un opérateur continu de H^s à H^t pour s et t quelconques. L'annulation $\chi_1\chi_2 = 0$ permet d'écrire $\chi_1(\Delta+1)^{-1}\chi_2 = (\Delta+1)^{-1}[\Delta, \chi_1](\Delta+1)^{-1}\chi_2$. L'itération de cette réécriture après introduction de fonctions lisses $(\chi_{i,n})_{i=1,2,n\geqslant 1}$ vérifiant $\chi_{i,1} = \chi_i, \chi_{i,n|\mathrm{supp}\chi_{i,n-1}} = 1$ et $\chi_{1,n}\chi_{2,m} = 0$ amène

$$\chi_1(\Delta+1)^{-1}\chi_2 = (\Delta+1)^{-1}[\Delta,\chi_{1,1}]\ldots(\Delta+1)^{-1}[\Delta,\chi_{1,n}](\Delta+1)^{-1}[\chi_{2,m},\Delta]\ldots(\Delta+1)^{-1}[\chi_{2,1},\Delta].$$

Le commutateur $[\chi,\Delta]$ est d'ordre 1, si bien que $(\Delta+1)^{-1}[\Delta,\chi]$ gagne de la régularité en appliquant $H^s(M)$ dans $H^{s+1}(M)$, ce qui autorise le prolongement désiré de $\chi_1(\Delta+1)^{-1}\chi_2$.

Exemple 3. — L'opérateur des ondes $\cos(t\sqrt{\Delta})$ n'est pas régularisant, mais sa moyenne suivant une fonction régulière $\int_{\mathbf{R}} \rho(t)\cos(t\sqrt{\Delta})dt$ l'est.

Décomposition spectrale

Soit $(\lambda_i)_{i\geqslant 0}$ le spectre du laplacien Δ_M sur la variété compacte M, $(\varphi_i)_{i\geqslant 0}$ une base hilbertienne de fonctions propres. L'opérateur identité, dont le noyau est une masse de Dirac porté par la diagonale, a une représentation en série de Fourier

$$\delta(m-m') = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(m)\overline{\varphi_j(m')},$$

alors que l'opérateur $f(\Delta)$, défini par la théorie L^2 des opérateurs auto-adjoints, se représente suivant

$$\sum_{j=0}^{\infty} f(\lambda_j)\varphi_j(m)\overline{\varphi_j(m')},$$

série convergente dans $\mathcal{D}'(M \times M)$, parfois pour des topologies plus fines.

Exemple 1. — Le noyau de l'opérateur de la chaleur est donné par la série $\sum_{i=0}^{\infty} e^{-t\lambda_i}\varphi_i(m)\overline{\varphi_i(m')}$ convergent normalement dans $C^\infty(M \times M)$ (et ce uniformément sur $(t_0,+\infty), t_0 > 0$).

D'après les théorèmes d'injection de Sobolev et l'estimée de Schauder,

$$||\varphi||_{C^\infty(M)} \leqslant C_k||\varphi||_{H^{k+n/2+1}(M)} \leqslant C'_k||(\Delta+1)^{(k+n/2+1)/2}\varphi||_{L^2(M)},$$

ainsi le noyau précédent est-il dominé par $\sum_{j\geqslant 0} e^{-t\lambda_j}(\lambda_j+1)^{k+n/2+1}$, convergente uniformément sur $(t_0,+\infty), t_0 > 0$, d'après l'asymptotique de Weyl ($\#\{\lambda_j \leqslant \lambda\} \sim_{\lambda\to\infty} C_{\dim M}\mathrm{vol}(M)\lambda^{n/2}$).

Exemple 2 : Fonctions θ de Jacobi ([4, p. 222]). —

$$\mathrm{vol}(E/\Gamma)\sum_{\gamma\in\Gamma}(4\pi t)^{-n/2}e^{-||z-\gamma||^2/4t} = \sum_{\gamma^*\in\Gamma^*} e^{-t||\gamma^*||^2+i<\gamma^*,z>}$$

Si $\Gamma^* = \{\gamma^* \in E^*, <\gamma^*,\Gamma> \subset 2\pi\mathbf{Z}\}$ désigne le réseau dual du réseau Γ de l'espace euclidien E (de dimension n), $(||\gamma^*||^2, e^{i<\gamma^*,\cdot>}/\sqrt{\mathrm{vol}(E/\Gamma)})_{\gamma^*\in\Gamma^*}$ sont les éléments spectraux normalisés du tore $T = E/\Gamma$. Le noyau de l'opérateur de la chaleur sur T s'obtient en moyennant celui du laplacien sur E suivant Γ : $e^{-t\Delta_T}(m,m') = \sum_{\gamma\in\Gamma}(4\pi t)^{-n/2}e^{-||m-m'-\gamma||^2/4t}$. La formule de Jacobi surgit de l'égalité de cette expression du noyau avec sa représentation de Fourier.

Exemple 3 : Formule de Poisson ([7, p. 178]). —

$$\mathrm{vol}(\mathbf{R}/\Gamma)\sum_{\gamma\in\Gamma}\delta(\gamma-t)=\sum_{\gamma^*\in\Gamma^*}\cos(t\gamma^*)$$

L'opérateur des ondes $\cos(t\sqrt{\Delta})$ sur E a pour noyau $(\delta(m'-m+t)+\delta(m'-m-t))/2$.

Considérés avec des variétés compactes quelconques, les exemples précédents ne donnent plus lieu en général (les espaces localement symétriques sont de notables exceptions : pour les surfaces à courbure négative constante, la formule de traces de SELBERG fournit une relation explicite entre spectre du laplacien et spectre des longueurs) à des formules exactes, qui sont remplacées par des formules asymptotiques (*i.e.* terme principal explicite, dit *paramétrice*, déterminé par (ou déterminant) des invariants riemanniens de la variété, plus reste négligeable en un sens convenable).

Ainsi le noyau de l'opérateur de la chaleur admet le développement ([2, E.III]) au voisinage de $t=0$ (uniforme sur $M\times M$)

$$e^{-t\Delta}(m,m')=t^{-n}e^{-d^2(m,m')/4t}(u_0(m,m')t+\ldots+u_k(m,m')t^k+o(t^k))$$

où les fonctions $u_j(m,m')$ sont des expressions polynomiales en la courbure et ses dérivées covariantes. Laplace transforme l'opérateur de la chaleur en la résolvante $(\int_0^\infty e^{-t\Delta}e^{-t}dt=(\Delta+1)^{-1})$, aussi émerge à nouveau la régularité du noyau de celle–ci en dehors de la diagonale.

Une paramétrice de la résolvante se construit à l'intérieur de la classe des opérateurs pseudo–différentiels (décrits par les propriétés de leur noyau distribution) contenant les opérateurs différentiels et où les elliptiques sont inversibles. La construction d'un tel inverse se fait par une série de Neumann, modulo un terme régularisant, liant les singularités du noyau résolvant à la géométrie de M.

C'est la classe des opérateurs dits *intégraux de Fourier* qui est adaptée à la construction d'une paramétrice pour l'opérateur des ondes. Le spectre des singularités de ces opérateurs est imbriqué avec la dynamique du flot géodésique, ce qui permet d'établir, comme un substitut incomplet à la formule de Poisson du tore, que le support singulier de la distribution $\sum_{i\geqslant 0}\cos(t\sqrt{\lambda_i})$ est inclus dans le spectre des longueurs de M ([3, p. 208]).

Solutions d'opérateurs elliptiques : régularité et comparaison

Le laplacien peut être considéré comme l'archétype des opérateurs elliptiques, qui jouissent de la propriété de *régularité elliptique* :

THÉORÈME. — *Soit P opérateur différentiel elliptique sur une variété M. Soit Ω un ouvert de M et $u\in\mathcal{D}'(M)$ telle que Pu soit C^∞, alors u est C^∞.*

Cette régularité elliptique résulte des estimées de Schauder : si $\Omega,\tilde\Omega$ sont des ouverts relativement compacts avec $\overline{\Omega}\subset\tilde\Omega$, $\|u\|_{\Omega,s+\mathrm{ord}P}\leqslant C^{\mathrm{Sch}}_{\Omega,\tilde\Omega,s}(\|Pu\|_{\tilde\Omega,s}+\|u\|_{\tilde\Omega,s})$.

Les fonctions harmoniques vérifient (comme les fonctions holomorphes) un principe du maximum. Celui–ci est en fait le lot des fonctions u sous–harmoniques (*cf.* [7, p. 92]) ($Pu \leqslant 0$) relativement à un opérateur différentiel elliptique P du second ordre annulant les constantes, à symbole principal positif : localement $Pu = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{i,j}\partial_i\partial_j u + \sum_{i=1}^{n} b^j \partial_j u$ avec $\sum_{i,j=1}^{n} a^{i,j}\xi_i\xi_j \geqslant a\|\xi\|_2^2, a > 0$. Il ne coûte pas de supposer la matrice $A = (a^{i,j})$ symétrique, ainsi si g note la métrique $dg^2 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}dx^i dx^j$, l'opérateur P est de la forme $P = \Delta_g + \mathcal{X}$ pour un certain champ de vecteurs $\mathcal{X}$ sur M.

PRINCIPE DU MAXIMUM ELLIPTIQUE ([8, p. 61]. — *Soit* (M, g) *variété riemannienne et* $\mathcal{X}$ *champ de vecteurs sur* M. *Soit* Ω *un ouvert relativement compact de* M *et* $u \in C^\infty(M)$ *telle que* $(\Delta_g + \mathcal{X})u \leqslant 0$.

(a) $\sup_{m\in\Omega} u(m) = \sup_{m\in\partial\Omega} u(m)$.

(b) Si u *atteint un maximum en un point de* Ω, *alors* u *est constante.*

L'énoncé précédent suppose implicitement métrique et champs de vecteurs réguliers. Hopf, Calabi, De Giorgi, Moser (...) ont contribué à établir des énoncés type *principe du maximum*, dits *faible* (malgré la force de leur portée) avec des hypothèses de régularité plus faibles tant sur l'opérateur que sur la fonction u ou l'inégalité de sous–harmonicité, énoncés réclamés par l'étude de problèmes non linéaires (rencontrés, par exemple, pour prescrire la courbure moyenne, *cf.* [5, p. 328]).

Le principe du maximum implique l'unicité pour les problèmes aux limites (tel $(\Delta + \mathcal{X})u = v$ sur Ω, $u = f$ sur $\partial\Omega$), des propriétés de comparaison à l'intérieur de solutions à partir d'estimées sur le bord...

Soit ${}_g\mathcal{H}_{\mathcal{X}}(M)$ (${}_g\mathcal{H}(M)$ si $\mathcal{X} = 0$) l'espace des fonctions $(\Delta_g + \mathcal{X})$–harmoniques (*i.e.* $(\Delta_g + \mathcal{X})u = 0$) sur Ω, ${}_g\mathcal{H}^+_{\mathcal{X}}(M)$ le cône des fonctions $(\Delta_g + \mathcal{X})$–harmoniques positives. L'inégalité de Harnack donne des estimations sur l'oscillation de ces fonctions harmoniques, réalisant une version qualitative du principe du maximum.

INÉGALITÉ DE HARNACK ([5, p. 189]). — *Soit* (M, g) *variété riemannienne,* K *un compact de* M *et* $\mathcal{X}$ *un champ de vecteurs. Alors il existe une constante* C_K *telle que*

$$\sup_K u \leqslant C_K \inf_K u, u \in {}_g\mathcal{H}^+_{\mathcal{X}}(M).$$

En dimension 2, ${}_g\mathcal{H}(\Omega)$ ne dépend que de la classe conforme de la métrique g : $\Delta_{e^{2\varphi}g} = e^{-2\varphi}\Delta_g$. Pour le disque plan $D = \{|z| < 1\}$ métré euclidiennement, l'inégalité de Harnack se déduit aisément des représentations intégrales des fonctions harmoniques : si u est une fonction continue sur $\overline{D}$, harmonique en son intérieur, $u(z) = \int_{S^1}(1 - |z|^2)/(|e^{i\theta} - z|^2)u(e^{i\theta})d\theta/2\pi$. En effet, le laplacien Δ_{eucl} commute au groupe des isométries et donc $\int_{SO(1)} g^* u dg$ est harmonique, constante (égale à $\int_{S^1} u(e^{i\theta})d\theta/2\pi$) sur le bord $\partial D = S^1 \simeq SO(1)$, donc aussi sur $\overline{D}$ d'après le principe du maximum, ce qui prouve la validité de la représentation intégrale pour $z = 0$; le groupe conforme de D agit transitivement sur D, et opére sur ${}_g\mathcal{H}(D)$, une transformation conforme qui ramène z en 0 permet de conclure†. Un observateur hyperbolique (qui partage

† Le/a lecteur/rice résistera à la tentation d'utiliser cette formule intégrale pour établir le principe du maximum!

les mêmes fonctions harmoniques que l'euclidien, bien que le bord ∂D soit à l'infini pour lui) parviendra à cette même formule intégrale, mais il l'écrira $u(z) = \int_{\partial D} e^{2H_\xi(z)} u(\xi) d\xi$ ([6, p. 33]) où H_ξ est la fonction de Busemann valant 1 en $z = 0$ et centrée en ξ.

L'inégalité de Harnack est à la base de propriétés de convergence pour les suites de fonctions harmoniques, telles :

PROPOSITION. — *(a) Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite croissante de fonctions de ${}_g\mathcal{H}(\Omega)$, de limite (simple) u_∞. Alors, soit $u_\infty = +\infty$, soit la suite (u_n) converge uniformément sur tout compact vers u_∞, qui est harmonique.*

(b) Soit B un borné de $\mathbf{R}$. L'ensemble ${}_g\mathcal{H}_m^B$ des fonctions harmoniques u telles que $u(m) \in B$ est compact pour la topologie de la convergence à tout ordre uniforme sur tout compact de Ω.

Si u_∞ est finie en m_0, pour tout compact K, Harnack affirme l'existence de $C_{K\cup\{m_0\}}$ telle que $0 \leqslant \sup_{m\in K}(u_\infty(m) - u_n(m)) \leqslant C_{K\cup\{m_0\}}(u_\infty(m_0) - u_n(m_0))$, ce qui prouve (a). La suite résulte des injections compactes de Sobolev mises en condition par Schauder–Harnack :

$$\|u\|_{2,K} \leqslant C^{\mathrm{Sch}}_{2,K,\tilde{K}} \|u\|_{\tilde{K}} \leqslant C^{\mathrm{Sch}}_{2,K,\tilde{K}} C^{\mathrm{Har}}_{\tilde{K}\cup\{m\}} \sqrt{\mathrm{vol}\tilde{K}}\,|u(m)|,$$

avec $K, \tilde{K}$ compacts tels que $K \subset \overset{\circ}{\tilde{K}}$.

La métrique de Gleason ([1]) est un exemple plaisant d'utilisation de l'inégalité de Harnack sur les espaces dont les fonctions harmoniques positives séparent les points :

DÉFINITION. — *Soit (M, g) variété riemannienne dont les fonctions harmoniques positives séparent les points, $m, m' \in M$. La fonction d_G définie par $d_G(m, m') = \sup_{u\in {}_g\mathcal{H}^+(M)} |\log[u(m)/u(m')]|$ est une distance.*

Cette métrique coïncide avec la métrique hyperbolique lorsque $M = D$ avec métrique euclidienne.

Le compact ${}_g\mathcal{H}^+(D)_m^{\{1\}}$ est convexe, aussi $M(m, m') = sup_{u\in {}_g\mathcal{H}^+(D)_m^{\{1\}}} u(m')$ est-il atteint en un point extrémal de ce convexe. Les points extrémaux sont les fonctions $e^{2H_\xi}/e^{2H_\xi(m)}$ (en correspondance biunivoque avec les masses de Dirac $\delta(\xi)$, points extrémaux du convexe des mesures de probabilité sur le cercle ∂D). $M(m, m')$ est clairement invariant sous l'action du groupe (transitif sur les paires de point) des isométries de D muni de la métrique hyperbolique. Il suffit donc de considérer $m = 0$ et $m' = r$ (avec $r = \mathrm{th} d_{\mathrm{hyp}}(m, m')$), pour lesquels un calcul explicite indique que $M(0, r)$ est atteint au point $\xi = 1$, *i.e.* $M(m, m')$ est atteint par la fonction e^{2H_ξ} où ξ est le point à l'infini de la demi-droite géodésique issue de m et passant par m'.

Solutions d'opérateurs paraboliques : comparaison

Le prototype d'opérateur parabolique est l'opérateur P_L ($L = \Delta_g + \mathcal{X}$) de type annulateur de la chaleur (lorsque $\mathcal{X} = 0$) : $P_L = \frac{\partial}{\partial t} + L$. Ces opérateurs satisfont à un *principe du maximum*, qui temporise celui pour les opérateurs elliptiques : une fonction $u(m, t)$ indépendante du temps et vérifiant $P_L u \leqslant 0$ satisfait aussi $Lu \leqslant 0$.

PRINCIPE DU MAXIMUM PARABOLIQUE ([8, p. 161]). — *Soit (M, g) variété* *riemannienne, $\mathcal{X}$ champ de vecteurs, $P_{\mathcal{X}} = \frac{\partial}{\partial t} + \Delta_g + \mathcal{X}$ et Ω un ouvert relativement compact de M. Soit $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega} \times [0,T])$ y vérifiant $P_{\mathcal{X}} u \leqslant 0$.*

(a) $\sup_{\overline{\Omega}\times[0,T]} u(m,t) = \sup_{\overline{\Omega}\times\{0\}\cup\partial\Omega\times[0,T]} u(m,t)$.

(b) Si u atteint son maximum à l'intérieur de $\overline{\Omega}\times[0,T]$, alors u est constante.

Là aussi, il y a une grande variation quant aux hypothèses, menant à une myriade d'extensions du principe (éventuellement faible) du maximum.

Certaines positivités des noyaux de la chaleur proviennnent de ce principe. Soit D un domaine borné à bord lisse de M et $e_D(t,m,m')$ le noyau de l'opérateur de la chaleur typé Dirichlet (si ∂D est non vide). La solution du problème de Cauchy mixte

$$\begin{cases} \Delta u + \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \\ u_{|\partial D\times\mathbf{R}^+} = 0, \\ u(\cdot, 0^+) = u_0, \end{cases}$$

est représentée par $u(m,t) = \int_D e_D(t,m,m')u_0(m')dv_g(m')$.

D'après ce principe du maximum parabolique, u est non négative (*resp.* strictement positive) dès que u_0 l'est, et par suite le noyau $e_D(t,m,m')$ est strictement positif.

Soient D_1, D_2 deux domaines de M tels que $D_1 \subset D_2$ et e_{D_i} les noyaux calorifiques associés. La construction de paramétrices assure que la singularité en $t=0$ d'un noyau est annihilée par différence de l'autre, si bien que $(e_{D_1} - e_{D_2})(t,m,m') = O(t^N), \forall N \geqslant 0$ pour m, m' dans D_1. Ainsi le noyau $(e_{D_2} - e_{D_1})_{|D_1\times(0,\infty)}$ se prolonge en une fonction lisse à $D_1 \times [0,\infty)$: il est annulé par $\Delta + \frac{\partial}{\partial t}$ sur $D_1 \times (0,\infty)$, nul sur $D_1 \times \{0\}$ et positif sur $\partial D_1 \times (0,\infty)$. Le principe du maximum parabolique garantit $e_{D_2} \geqslant e_{D_1}$ sur D_1.

Références

[1] BEAR H. — *Part metric and hyperbolic metric*, Am. Math. Month., **98** (1991), 109–123.

[2] BERGER M., GAUDUCHON P., MAZET E. — *Le spectre d'une variété riemannienne*, Springer Lectures Notes in Math. **194**, 1971.

[3] BESSE A. — *Manifolds all of whose geodesic are closed*, Springer–Verlag, 1978.

[4] HAZEWINKEL M. — *Encyclopaedia of mathematics. Volume 5*, Kluwer Academic Publishers, 1989.

[5] GILBARG D., TRUDINGER N.S. — *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer–Verlag, 1977.

[6] HELGASON S. — *Groups and geometric analysis*, Academic Press, 1984.

[7] HÖRMANDER L. — *The analysis of linear partial differential operators I*, Springer–Verlag, 1990.

[8] PROTTER M., WEINBERGER H. — *Maximum principles in differential equations*, Springer–Verlag, 1984.

[9] WARNER F. — *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Springer–Verlag, 1983.