Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

GILLES CARRON

Stabilité isopérimétrique

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome S9 (1991), p. 43-46

<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1991__S9__43_0>

RENCONTRES DE THEORIE SPECTRALE ET GEOMETRIE
GRENOBLE 1991
(Aussois du 7 au 14 avril)

Stabilité isopérimétrique

Gilles CARRON

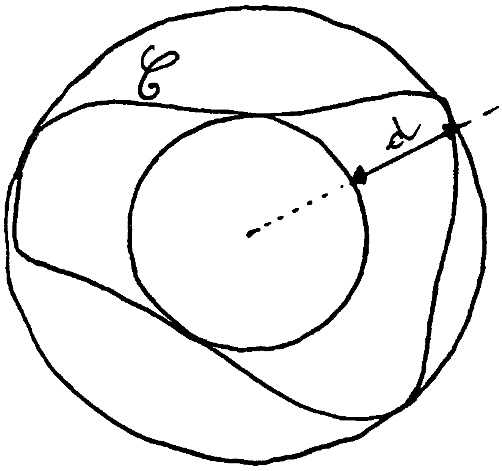
Institut Fourier*
Université de Grenoble 1
B.P. 74
38402 SAINT MARTIN D'HERES CEDEX
FRANCE

* Laboratoire associé au CNRS.

On s'intéresse à une généralisation de l'inégalité de Bonnesen due à Fuglede. Rappelons l'inégalité de Bonnesen.

Soit $\mathcal{C}$ une courbe rectifiable fermée simple de $\mathbb{R}^2$ alors $\mathcal{C}$ est contenue dans un anneau circulaire de largeur d avec

$$d^2 \leqslant \frac{1}{4\pi} \quad \left(\text{Longueur } (\mathcal{C})^2 - 4\pi \text{ Aire } (\mathcal{C})\right).$$



c'est-à-dire que l'on a estimé l'écart de $\mathcal{C}$ a un cercle en fonction de

$$\text{Longueur } (\mathcal{C})^2 - 4\pi \text{ Aire } \mathcal{C}$$

qui représente le défaut isopérimétrique.

Fuglede a généralisé ce résultat en dimension supérieure. Si D est un domaine régulier de $\mathbb{R}^{n+1}$ on note :

$$\delta(D) = \frac{\dfrac{\mathrm{vol}_n(\partial D)}{\sigma_n}}{\left(\dfrac{\mathrm{vol}_{n+1} D}{\omega_{n+1}}\right)^{\frac{n}{n+1}}} - 1$$

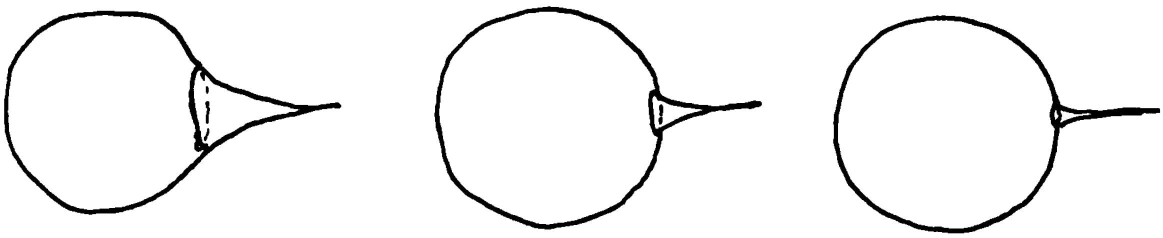
où

σ_n= volume n dimensionnel de $\mathbb{S}^n$ sphère euclidienne de rayon 1.

ω_{n+1}= volume $n+1$ dimensionnel d'une boule euclidienne de rayon 1.

On a $\delta(D) \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si D est une boule euclidienne. Remarquons que si $n+1 \geqslant 3$ on peut trouver une suite de domaine $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ avec $\delta(D_k) \to 0$ et $k \to +\infty$ mais D_k loin de toute boule euclidienne.

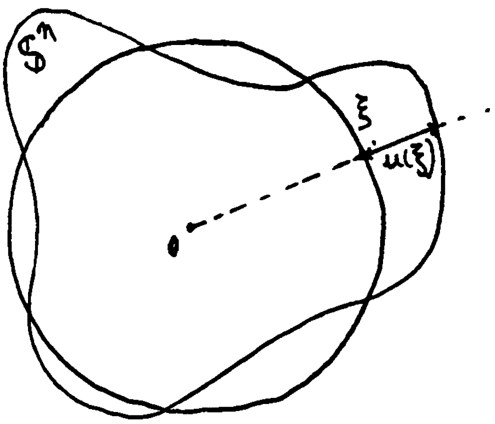
Il suffit de rajouter des épines de plus en plus minces à une boule euclidienne.



C'est pourquoi le résultat de Fuglede concerne des domaines presque sphèriques. On peut paramétrer le bord d'un domaine D_u voisin de la boule unité par

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ \xi &\longmapsto (1+u(\xi))\xi \end{aligned}$$

où $u \cdot \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction C^1.



Et si

$$||u||_{L^\infty} = \underset{x \in \mathbb{S}^n}{\text{Sup}} \; |u(x)| \leqslant \frac{3}{20n}$$

$$||du||_{L^\infty} \leqslant \frac{1}{2}$$

$$\text{Barycentre } D_u = 0_{\mathbb{R}^{n+1}}$$

alors

$$\frac{1}{10}\, ||u||^2_{H^1} \leqslant \delta(D_u)$$

où D_u est le domaine défini par u et

$$||u||^2_{H^1} = \int_{\mathbb{S}^n} \left(u^2(\xi) + |du|^2(\xi)\right) d\xi \; .$$

Et on a aussi

$$\|u\|_{L^\infty} \leqslant \varepsilon\big(\delta(D_u), n\big)$$

où ε vérifie $\lim\limits_{\delta \to 0} \varepsilon(\delta, n) = 0$.

La méthode utilise la décomposition de u en harmoniques sphèriques et des estimées de :

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_n(\partial D_u) = A(u) &= \int_{\mathbb{S}^n} \sqrt{1 + \frac{|du|^2(\xi)}{(1+u(\xi))^2}}(1+u)^n(\xi)d\xi \\
\mathrm{vol}_{n+1}(D_u) &= \int_{\mathbb{S}^n} \frac{(1+u)^n}{n+1}(\xi)d\xi \\
\text{Barycentre } D_u &= \int_{\mathbb{S}^n} \frac{(1+u)^{n+1}}{n+1}(\xi)\cdot\xi d\xi
\end{aligned}$$

Cependant : si on note

$$\Sigma = \{u \in C^1(\mathbb{S}^n, \mathbb{R}) / \mathrm{vol}_{n+1}(D_u) = \omega_{n+1},\ \text{Barycentre } D_u = 0\}$$

on a que l'espace tangent en 0 à Σ est donné par

$$T_0\Sigma = \{v \in C^1(\mathbb{S}^n, \mathbb{R}) / \int_{\mathbb{S}^n} u(\xi)d\xi = 0,\ \int_{\mathbb{S}^n} u(\xi)\xi d\xi = 0\}$$

Or

la dérivée première de $A \restriction \Sigma$ est nulle et

la dérivée seconde de $A \restriction \Sigma$ vaut

$$(A \restriction \Sigma)''(v,v) = \int_{\mathbb{S}^n} (|dv|^2 - nv^2)\, d\xi \geqslant \frac{1}{2}\, \|v\|^2_{H^1}.$$

Nous montrons que ces inégalités infinitésimales permettent des inégalités locales et nous étendons le résultat de Fuglede dans un cadre plus général comprenant par exemple les boules géodésiques des espaces hyperboliques réels et les boules géodésiques sur les sphères euclidiennes.