Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

PETER GREENBERG

Rapport sur la géométrie $SL_2\mathbf{Z}$ par morceaux

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 10 (1991-1992), p. 93-95
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1991-1992__10__93_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
CHAMBÉRY-GRENOBLE
1991–1992 (93–95)

RAPPORT SUR LA GÉOMÉTRIE $SL_2\,\mathbf{Z}$ PAR MORCEAUX

par *Peter GREENBERG*

Le but de cette conférence était de décrire une nouvelle géométrie dans $\mathbf{R}^2$, et puis d'en présenter une conjecture. Ce rapport est un résumé de [G].

Définitions et conjecture

Quelques notions préliminaires nous permettent d'énoncer la conjecture.

On considère $\mathbf{Z}^2 \subseteq \mathbf{R}^2$; le groupe $SL_2\mathbf{Z}$ des matrices 2×2, entières, à déterminant 1 agit sur $\mathbf{R}^2$ comme transformations linéaires, en préservant l'ensemble $\mathbf{Z}^2$. Soit A le groupe des transformations affines de $\mathbf{R}^2$ de la forme

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \longmapsto M\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2,\ M \in SL_2\mathbf{Z},\ m, n \in \mathbf{Z}\ ;$$

en effet, A est une extension $0 \to \mathbf{Z}^2 \to A \to SL_2\mathbf{Z} \to 1$.

Une droite dans $\mathbf{R}^2$ est *entière* si elle contient deux points de $\mathbf{Z}^2$. On dénote par $\mathcal{P}$ l'ensemble des polygones $P \subseteq \mathbf{R}^2$ dont les sommets se trouvent dans $\mathbf{Z}^2$.

1. Définition. — Soient $P, Q \in \mathcal{P}$. On dit qu'un homéomorphisme $h : P \to Q$ est "$\mathbf{Z}$-par morceaux" s'il existe des droites entières $\ell_1, \ldots, \ell_n$ telles que, pour chaque composante connexe C de $P - \coprod \ell_i$, il existe un $g_C \in A$ tel que $h|_C \equiv g_C$.

On dénote par $P\mathbf{Z}(P, Q)$ l'ensemble de tels h, par $P\mathbf{Z}(P)$ le groupe $P\mathbf{Z}(P, P)$ et par $P\mathbf{Z}(P, \partial)$ le sous-groupe de $P\mathbf{Z}(P)$ dont les éléments fixent les points de la frontière.

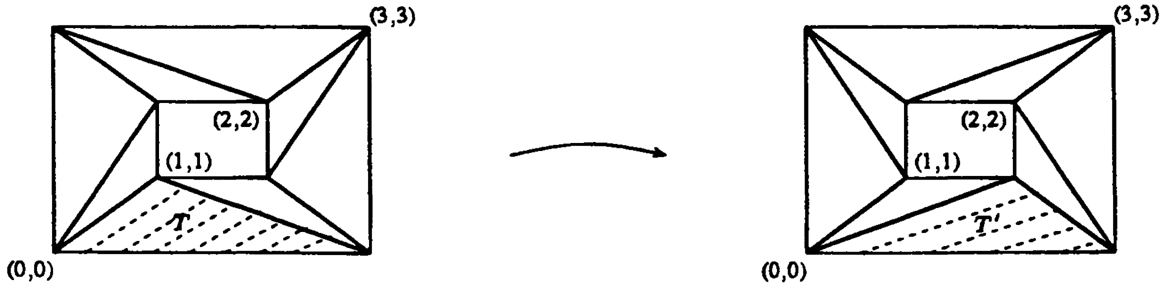
Soit T le triangle dont les sommets sont $(0,0), (1,0), (0,1)$.

2. Conjecture. — $P\mathbf{Z}(T, \partial) = \{id\}$.

Alors, le groupe $P\mathbf{Z}(P, \partial)$ n'est-il pas banal pour tout $P \in \mathcal{P}$? Voici un exemple :

3. Exemple ($\frac{1}{4}$ "Twist de Dehn"). — Soit Q le carré aux sommets $(0,0), (3,0)$, $(0,3), (3,3)$. Le dessin ci-dessous donne un exemple non banal de $P\mathbf{Z}(Q, \partial)$; la frontière

∂Q est fixée mais le petit carré à l'intérieur subit une rotation de $\pi/2$ dans le sens trigonométrique.



(à noter : $T \longrightarrow T'$)

II. Classification de polygones

1. Définition. — Soit $P \in \mathcal{P}$. On dénote par $A(P)$ l'aire de P, et par $L(P)$ ("longueur") le cardinal de $\partial P \cap \mathbf{Z}^2$.

2. Théorème. — *Soient $P, Q \in \mathcal{P}$, et soient $p \in \partial P \cap \mathbf{Z}^2$, $q \in \partial Q \cap \mathbf{Z}^2$. Alors, il existe $h \in P\mathbf{Z}(P, Q)$, tel que $h(p) = q$, si et seulement si $A(P) = A(Q)$, $L(P) = L(Q)$.*

3. Corollaire. — *On a une suite exacte*

$$1 \longrightarrow P\mathbf{Z}(P, \partial) \longrightarrow P\mathbf{Z}(P, P) \longrightarrow \mathbf{Z}/L(P)\mathbf{Z} \longrightarrow 0.$$

On ne donne que l'idée centrale de la preuve du théorème 2, (voir [G]).

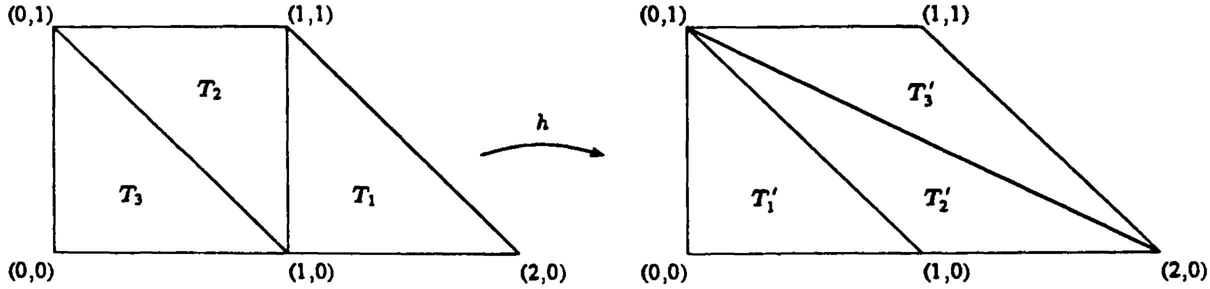
4. Définition. — Un *petit triangle* est un triangle $Q \in \mathcal{P}$ avec $A(Q) = 1/2$, $L(Q) = 3$.

5. Lemme. — *Soient Q_1, Q_2 des petits triangles, et soient $X_i \in Q_i \cap \mathbf{Z}^2$, $i = 1, 2$. Alors il existe un unique $g \in A$ tel que $g(Q_1) = Q_2$ et $g(X_1) = X_2$.*

La preuve est un exercice bien amusant.

Le lemme 5 nous permet de construire un grand nombre d'exemples d'homéomorphismes $\mathbf{Z}$-par morceaux : soient $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ des triangulations de $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ par petits triangles, telles que $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sont, de façon combinatoire, identiques. Alors, le lemme 5 prescrit un unique $h \in P\mathbf{Z}(P_1, P_2)$. En voici un exemple (comparer aussi l'exemple 3).

6. Exemple.



$$h(1,0) = (0,1)$$
$$h : T_i \longmapsto T_i'$$

La philosophie de la preuve du théorème 2 est que des composés de tels exemples "suffisent"; on peut considérer cette idée comme justificatif (faible) pour la conjecture.

7. Remarques.

(a) Je remercie Lucien Guillou qui m'a indiqué la preuve du fait que $P\mathbb{Z}(P, \partial)$ est libre de torsion pour tout $P \in \mathcal{P}$: c'est une conséquence du théorème de Newman ([N], [D]); en effet, du théorème 1 de [D] suit qu'il n'existe aucun homéomorphisme du disque fermé, d'ordre fini, qui fixe la frontière.

(b) Une étudiante à Franckfort, U. Hartung, est en train d'analyser la structure des groupes de germes, aux points rationnels, de la géométrie $\mathbb{Z}$-par morceaux. C'est compliqué parce que ces groupes varient selon le point en question.

Bibliographie

[D] Dress A. — *Newman's theorems on transformation groups*, Topology, **8** (1969), 230–207.

[G] Greenberg P. — *Piecewise $SL_2\mathbb{Z}$ geometry*, Trans. AMS, à paraître.

[N] Newman M.H.A. — *A theorem on periodic transformations of spaces*, Q. Jl. Math., **2** (1931), 1–9.

P. GREENBERG
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
URA188 du CNRS
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)