

SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

MICHEL PIERRE

Une introduction à la notion de capacité

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 1 (1982-1983), exp. n° 1, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1982-1983__1__A1_0>

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Chambéry-Grenoble), 1982-1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>*

1982-1983

UNE INTRODUCTION A LA NOTION DE CAPACITE

par Michel PIERRE

Commençons par énoncer une liste de problèmes qui se résolvent à l'aide de cet outil d'analyse qu'est la notion de capacité. Cette liste est bien sûr non exhaustive et n'a pour objet que d'initier et de motiver une réflexion sur cette notion.

Problème 1.

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N , $u \in H_0^1(\Omega)$, $T \in H^{-1}(\Omega)$. On suppose que T est aussi une mesure de Radon sur Ω . Alors le produit $\langle T, u \rangle_{H^{-1} \times H_0^1}$ est bien défini ; mais

- peut-on définir $\int_{\Omega} u dT$?
- si oui, a-t-on $\langle T, u \rangle = \int_{\Omega} u dT$?

Problème 2.

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N et $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. On considère le problème variationnel

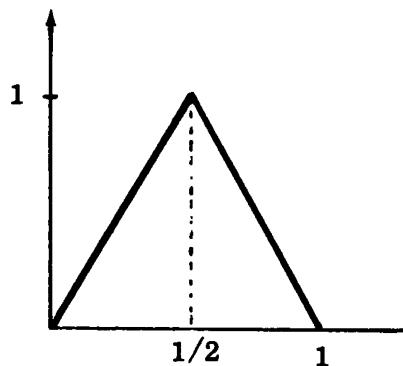
$$(P) \quad \min \left\{ \int_{\Omega} |\nabla v|^2 ; v \in H_0^1(\Omega), v \geq \psi \right\}.$$

Si le convexe fermé $K = \{v \in H_0^1(\Omega) ; v \geq \psi\}$ est non vide, la projection u de 0 sur K relative au produit scalaire de $H_0^1(\Omega)$ fournit la solution de (P). De plus, u est solution de "l'équation d'Euler" associée qui s'écrit formellement

I. 2

$$(P)' \quad \begin{cases} -\Delta u \geq 0, \quad u \geq \psi \quad \text{sur } \Omega \\ -\Delta u(u-\psi) = 0 \quad \text{sur } \Omega. \end{cases}$$

Cependant, le choix du convexe K ci-dessus n'est pas satisfaisant lorsque, par exemple, ψ est la fonction caractéristique d'un ensemble fin de Ω . Ainsi, si $\Omega = [0, 1]$ et ψ est la fonction caractéristique de $\{1/2\}$, on aimerait trouver comme solution la fonction suivante :



Celle-ci est obtenue comme limite de solutions de (P) associées à des obstacles $\psi_n = \max_{1-1/n < x < 1/n} 1_{\{1/2\}}$. Cependant
 $K = \left\{ v \in H_0^1(\Omega) ; v \geq \psi_{1/2} \right\} = \{ v \in H_0^1(\Omega) ; v \geq 0 \}$

et donc la projection de 0 sur K est la fonction nulle.

En dimension 1, tout élément de $H_0^1(\Omega)$ admet un représentant continu unique \tilde{u} . Ainsi, on peut contourner la difficulté ci-dessus en choisissant comme convexe

$$\tilde{K} = \{ v \in H_0^1(\Omega) ; \tilde{v} \geq \psi \text{ partout sur } \Omega \}.$$

La projection de 0 sur \tilde{K} fournit alors la solution escomptée.

Question 1. Quel est le point de vue adéquat en dimension quelconque ?

Si u est solution de $(P)'$, $-\Delta u$ est une mesure positive et on s'attend à interpréter " $-\Delta u(u-\psi)=0$ " comme signifiant

$$(1) \quad \int_{\Omega} (u-\psi) d(-\Delta u) = 0.$$

Mais, $-\Delta u$ est une mesure qui n'est pas en général absolument continue

par rapport à la mesure de Lebesgue. Or u est seulement défini Lebesgue-p.p.. De plus, on ne dispose a priori d'aucun renseignement de mesurabilité sur ψ .

Question 2. Quel sens peut-on donner à (1) ?

Problème 3.

Quelle signification peut-on donner à la version parabolique du problème (P)', à savoir

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \geq 0 & \text{sur }]0, T[\times \Omega \\ u \geq \psi, \quad u(0) = u_0 \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \right) (u - \psi) = 0 & \text{sur }]0, T[\times \Omega, \end{cases}$$

où $\psi :]0, T[\times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $u_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sont donnés ?

Problème 4.

Soit u un élément de l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ où m est un entier ≥ 1 , $1 < p < \infty$ et $1 \leq mp \leq N$. Soit $M \subset \mathbb{R}^N$.

Quand est-il possible de définir une trace de u sur M ?

Si μ est une mesure sur M et $1 \leq q \leq \infty$, à quelle condition cette application "trace" est-elle continue de $W^{m,p}$ dans $L^q(M, \mu)$?

Problème 5.

Soit X_t un mouvement brownien sur \mathbb{R}^N et pour $A \subset \mathbb{R}^N$

$$T_A = \inf\{t > 0 ; X_t \in A\}.$$

Pour quels A peut-on affirmer que T_A est un temps d'arrêt ?

Problème 6.

Soit L un opérateur différentiel à coefficients constants et $K \subset \mathbb{R}^N$. A quelle condition l'implication suivante est-elle vraie ?

I. 4

$$(2) \quad \begin{cases} u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^N) \\ Lu = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^N \setminus K \end{cases} \implies Lu = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^N.$$

On dit que K est "éliminable" pour l'équation (2). On peut également s'interroger sur des notions d'éliminabilité plus fortes que celles-ci, par exemple, en supposant seulement $u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^N \setminus K)$. Cette question n'a que peu d'intérêt si on se limite à des opérateurs linéaires ; ainsi, il est clair que seul l'ensemble vide est solution lorsque $L = \Delta^m$. Elle reprend cependant de l'intérêt lorsqu'apparaissent des termes non linéaires comme dans le problème suivant

$$(3) \quad \begin{cases} u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^N \setminus K), \quad u \geq 0 \\ -\Delta u + u^p = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^N \setminus K \end{cases} \stackrel{?}{\implies} \begin{cases} u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^N) \\ -\Delta u + u^p = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^N \end{cases}.$$

CAPACITE ASSOCIEE A $H_0^1(\Omega)$.

On se donne Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N . L'adhérence de $C_0^\infty(\Omega)$ pour la norme

$$\|u\| = \left[\int_\Omega |\nabla u|^2 \right]^{1/2}$$

est notée $H_0^1(\Omega)$.

DEFINITION 1. - Pour K compact de Ω , on pose
 $\text{cap } K = \inf \{ \|v\|^2 ; v \in C_0^\infty(\Omega), v \geq 1 \text{ sur } K \}.$

Pour ω ouvert de Ω , on définit

$$\text{cap } \omega = \sup_{\substack{K \subset \omega \\ K \text{ compact}}} \text{cap } K.$$

Pour $E \subset \Omega$ quelconque, on définit

$$\text{cap } E = \inf_{\substack{E \subset \omega \\ \omega \text{ ouvert}}} \text{cap } \omega.$$

DEFINITION 2. - Etant donné $E \subset \Omega$, on pose

$S_E = \{v \in H_0^1(\Omega) ; \exists v_n \in H_0^1(\Omega), v_n \geq 1 \text{ p.p. sur un voisinage de } E, v_n \rightarrow v \text{ dans } H_0^1(\Omega)\}.$

Ceci définit un convexe fermé de $H_0^1(\Omega)$. S'il est non vide, on note u_E la projection de 0 sur S_E relative à $H_0^1(\Omega)$ et

$$\text{cap } E = \int_{\Omega} |\nabla u_E|^2 ;$$

sinon on pose $\text{cap } E = +\infty$.

Remarques. La définition 2 se généralise très bien au cas où $a(u, v) = \int_{\Omega} vu v$ est remplacée par une forme bilinéaire coercive générale dans le cadre d'un espace de Dirichlet (voir [3]).

La définition 1 se généralise immédiatement au cas où H_0^1 est remplacé par un espace de Banach s'injectant dans $L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ comme $W_0^{m,p}(\Omega)$, $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$, l'espace des potentiels de Bessel $L^{\alpha,p}(\mathbb{R}^N)$, etc. (voir [13], [2]) ou au cas où $\|u\|$ est remplacé par une fonctionnelle non linéaire du type

$$\Phi(u) = \int_{\Omega} \varphi(u, vu)$$

(voir [11], [4]).

On montre facilement que les définitions 1 et 2 coïncident (cf. [3]) et fournissent une capacité sur Ω vérifiant :

PROPOSITION 1. -

- i) $A \subset B \Rightarrow \text{cap } A \leq \text{cap } B$
- ii) $A_n \uparrow A \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \text{cap } A_n = \text{cap } A$
- iii) $K_n \downarrow K \text{ compacts} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \text{cap } K_n = \text{cap } K$
- iv) (forte sous-additivité)
 $\text{cap}(A \cup B) + \text{cap}(A \cap B) \leq \text{cap } A + \text{cap } B .$

Remarque. Dans la définition 1, une fois la capacité des compacts définie, on peut être tenté de poser

$$\forall E \subset \Omega, \quad \text{cap}_* E = \sup_{\substack{K \subset E \\ K \text{ compact}}} \text{cap } K.$$

Cette capacité "intérieure" ne coïncide pas avec la précédente. Un ensemble E vérifiant $\text{cap } E = \text{cap}_* E$ est dit capacitable. On doit à Choquet (voir par exemple [8]) le résultat profond et fondamental suivant.

THEOREME 1 (Choquet [8]). - Soit X un espace topologique séparé et $C : 2^X \rightarrow [0, \infty]$ vérifiant i), ii), iii) de la proposition 1 (on dira que C est une capacité régulière sur X).
Alors tout ensemble \mathbb{X} -analytique contenu dans un \mathbb{X}_σ est capacitable. En particulier, tout \mathbb{X} -borélien est capacitable.

On rappelle les définitions.

- Les \mathbb{X} -boréliens sont les éléments de la tribu engendrée par les compacts. Un \mathbb{X}_σ est une réunion dénombrable de compacts ; un $\mathbb{X}_{\sigma\delta}$ une intersection dénombrable de \mathbb{X}_σ .
- Un ensemble $E \subset X$ est \mathbb{X} -analytique, s'il existe F compact, B un $\mathbb{X}_{\sigma\delta}$ de F et $f : B \rightarrow X$ continue telle que $f(B) = E$.
- Tout \mathbb{X} -borélien est \mathbb{X} -analytique et est contenu dans un \mathbb{X}_σ (voir [8]).
- Si X est métrique, les ensembles \mathbb{X} -analytiques coïncident avec les ensembles analytiques classiques (ou sousliniens) voir [8].

Remarque. Dans la pratique, on dispose très souvent d'une fonction d'ensemble définie sur les seuls compacts. Il est parfois difficile et technique de montrer qu'elle s'étende en une capacité régulière. Le résultat suivant, dû encore à Choquet [8], permet le plus souvent de résoudre le problème.

THEOREME 2 (Choquet [8]). - Soit X un espace topologique séparé, \mathcal{K} la famille des compacts de X et $C : \mathcal{K} \rightarrow [0, \infty]$ vérifiant :

- a) C est croissante ;
- b) C est continue à droite (i.e. $\forall \epsilon > 0$, $\forall K \in \mathcal{K}$, il existe $\omega \supset K$ ouvert tel que
 $K' \in \mathcal{K}$, $K \subset K' \subset \omega \Rightarrow C(K') \leq C(K) + \epsilon$) ;
- c) C est fortement sous-additive.

Alors la fonction d'ensemble

$$C^*(E) = \inf_{\substack{\omega \supset E \\ \omega \text{ ouvert}}} C_*(\omega)$$

où

$$C_*(\omega) = \sup_{\substack{K \in \mathcal{K} \\ K \subset \omega}} C(K)$$

est une capacité régulière sur X .

C'est l'utilisation combinée des théorèmes 1 et 2 qui (modulo certains détails qui peuvent être trouvés dans [7]) permet de résoudre le problème 5.

Réponse au problème 5. (voir [7] pour une démonstration dans un cadre beaucoup plus général).

Si A est analytique, T_A est un temps d'arrêt.

On revient maintenant au cas particulier de la capacité associée à $H_0^1(\Omega)$.

DEFINITION. - Une fonction $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sera dite quasi-continue si il existe une suite (décroissante) d'ouverts ω_n tels que :

- $\forall n$, la restriction de v au complémentaire de ω_n est continue ;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{cap } \omega_n = 0$.

Remarque. En dimension 1, $H_0^1(\Omega)$ s'injecte continûment dans $C_0(\Omega)$. On déduit alors de la définition 1 que seul l'ensemble vide est de capacité nulle. Dans ce cas, "quasi-continu" = "continu".

En dimension supérieure, on a le résultat correspondant suivant.

PROPOSITION 2. - Tout $u \in H_0^1(\Omega)$ admet un représentant quasi-continu unique \tilde{u} (modulo l'égalité "quasi-partout").

Remarque. Une propriété est dite vraie "quasi-partout" si elle est vraie sauf peut-être sur un ensemble de capacité nulle.

Un élément de $H_0^1(\Omega)$ est une classe de fonctions définies Lebesgue-presque partout. La proposition affirme que dans cette classe, il existe des représentants quasi-continus. De plus, deux tels représentants sont égaux quasi-partout. En fait, l'unicité provient du résultat plus général suivant.

LEMME. - Soit u, v quasi-continues. Alors
 $u = v$ presque partout \Rightarrow $u = v$ quasi-partout.

Pour une démonstration de ce lemme et de la proposition, voir Deny [9] ou le cours d'Ancona [3].

Nous énonçons maintenant une proposition qui permet de résoudre partiellement les problèmes 1 et 2 et qui souligne l'intérêt de l'existence d'une représentation quasi-continue pour tout élément de $H_0^1(\Omega)$.

PROPOSITION 3 (cf. [9], [3]). - Soit $v \in H_0^1(\Omega)$ avec $-\Delta u \geq 0$.

Alors

- i) $-\Delta u$ ne charge pas les ensembles de capacité nulle. (i.e. $\text{cap } E = 0 \Rightarrow E$ est $-\Delta v$ -mesurable et $-\Delta v(E) = 0$). En particulier, si $u \in H_0^1(\Omega)$, \tilde{u} est défini $-\Delta v$ -p.p. . De plus,

ii) $u \rightarrow \tilde{u}$ est une application continue de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^1(-\Delta v)$ et on a

$$\int_{\Omega} vu \nabla v = \int_{\Omega} \tilde{u} d(-\Delta v).$$

Suite à cette proposition, il est clair que dans l'intégrale (1) annoncée dans le problème 2, il faut remplacer u par son représentant quasi-continu. Reste à traiter le problème de ψ . C'est l'objet de la proposition suivante. La notion de quasi-s.c.s. qui y est utilisée se définit en remplaçant "continue" par "s.c.s." dans la définition de la quasi-continuité.

PROPOSITION 4. - Soit C un convexe fermé non vide de $H_0^1(\Omega)$, inf-stable (i.e. $u, v \in C \Rightarrow \inf(u, v) \in C$) et unilatéral (i.e., $u \in C, v \in C, v \geq 0 \Rightarrow u + v \in C$). Alors, il existe $\hat{\psi}$ quasi-s.c.s. unique tel que

$$C = \{v \in H_0^1(\Omega) ; \tilde{v} \geq \hat{\psi} \text{ quasi-partout}\}.$$

L'existence de $\hat{\psi}$ est démontrée dans [14]. L'unicité est démontrée dans [16] dans un cadre parabolique.

Remarque. Etant donné $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (non nécessairement mesurable) les convexes

$$C_{\psi}^1 = \{v \in H_0^1(\Omega) ; v \geq \psi \text{ p.p.}\}$$

$$C_{\psi}^2 = \{v \in H_0^1(\Omega) ; \tilde{v} \geq \psi \text{ quasi-partout}\}$$

vérifient tous deux les hypothèses de la proposition 4. On peut donc leur associer $\hat{\psi}^1, \hat{\psi}^2$. Ces procédés, dont on retiendra plus particulièrement le second, consistent en une "régularisation" de ψ et montrent que, seule la "partie quasi-s.c.s." de ψ joue le rôle d'obstacle. Nous sommes maintenant en mesure de résoudre complètement le problème 2.

Solution au problème 2. Soit C un convexe fermé non vide, inf-stable et unilatéral de $H_0^1(\Omega)$. Alors, il existe un unique $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u} \geq \hat{\psi} \text{ q.p. , } -\Delta u \geq 0 \\ \int_{\Omega} (\tilde{u} - \hat{\psi}) d(-\Delta u) = 0 , \end{array} \right.$$

où $\hat{\psi}$ est associé à C par la proposition 4.

(Une démonstration de ceci peut être trouvée dans l'appendice de [15]).

A propos du problème 3. On retrouve les mêmes difficultés que dans le problème 2. La capacité adéquate est la capacité parabolique classiquement associée à l'opérateur de la chaleur. Cependant, une difficulté supplémentaire majeure apparaît : les solutions du problème variationnel considéré ne sont pas en général quasi-continues. Il est donc nécessaire d'introduire une notion moins restrictive de représentant. L'analogie du résultat ci-dessus peut alors être obtenu, mais cela nécessite l'utilisation de techniques de la théorie du potentiel beaucoup plus élaborées, en particulier la théorie du balayage. Une étude complète de ce problème peut être trouvée dans [16].

A propos du problème 1. Suite à la proposition 3, on voit que si $T \geq 0$, alors $\tilde{u} \in L^1(T)$ et

$$\langle T, u \rangle_{H^{-1} \times H_0^1} = \int_{\Omega} \tilde{u} dT .$$

Sans cette hypothèse, le problème est plus délicat. En particulier, il est possible de trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ et $T \in H^{-1}(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ tels que $uT \notin L^1(\Omega)$ (voir [6]). Cependant, on peut prouver le résultat suivant (voir [6]) :

PROPOSITION 5. - Soit $u \in H_0^1(\Omega)$, $T \in H^{-1}(\Omega)$. On suppose que T est une mesure et on écrit $T = \theta|T|$ où $\theta \in L^\infty(|T|)$. S'il existe $g \in L^1(|T|)$ tel que

$$\tilde{u}\theta \geq -g \quad |T|\text{-p.p.}.$$

Alors $\tilde{u} \in L^1(|T|)$ et

$$\langle T, u \rangle_{H^{-1} \times H_0^1} = \int \tilde{u} dT.$$

A propos du problème 4. Pour le résoudre, il est nécessaire d'introduire la capacité $c_{m,p}$ associée à l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ qui se définit de manière analogue à la définition 1 (cf. [2], [13]). La réponse complète à ce problème peut alors être trouvée dans [1] et se formule comme suit : soit μ une mesure de Radon sur \mathbb{R}^N et pour $1 \leq p, q < \infty$, $L_{p,q}(\mu)$ l'espace des f tels que

$$\|f\|_{L_{p,q}(\mu)} = \left[\int_0^\infty [\mu(\{x; |f(x)| > t\})^{1/p} t]^q \frac{dt}{t} \right]^{1/q} < \infty.$$

Alors, si $1 < p < n/m$, $1 < q$,

$$\|u\|_{L_{p,q}(\mu)} \leq A \|u\|_{W^{m,p}}$$

si et seulement si

$$\forall K \subset \mathbb{R}^N, \text{ compact}, \quad \mu(K) \leq B c_{m,p}(K)^{q/p}.$$

En particulier, si $q \geq p$

$$\|u\|_{L^q(\mu)} \leq A \|u\|_{W^{m,p}}$$

si et seulement si

$$\forall K \subset \mathbb{R}^N, \text{ compact}, \quad \mu(K) \leq B c_{m,p}(K)^{q/p}.$$

Si M est une variété de dimension $d \leq N - mp$, $c_{m,p}(M) = 0$ et donc il n'est pas possible de définir une trace de u sur M .

Si M est une variété de dimension d avec $N - mp < d \leq N$, alors il est possible de définir une trace u^* de u sur M . De plus, si μ est la mesure superficielle sur M , $u^* \in L^{p^*}(\mu)$ où $p^* = dp/(N - mp)$.

Lorsque M est une variété suffisamment régulière, ceci se démontre sans utiliser de capacités. Cependant, l'utilisation de celles-ci permet de ne présupposer aucune structure de M et conduit à des interprétations immédiates en termes de mesures de Hausdorff en utilisant les résultats de [13].

Solution au problème 6. Si L est un opérateur elliptique d'ordre $2m$, l'implication (2) est vraie si et seulement si $c_{2m,p'}(K) = 0$ ($1/p' + 1/p = 1$) (voir [10], [12]). Il a été démontré récemment dans [5] que (3) est vraie si et seulement si $c_{2m,p'}(K) = 0$.

REFERENCES

- [1] D. R. ADAMS, On the existence of capacitary strong type estimates in \mathbb{R}^N . Arkiv för Mat., 14 (1976), 125-140.
- [2] D. R. ADAMS, J.C. POLKING, The equivalence of two definitions of capacity, Proc. of A.M.S., 37 (1973), pp. 529-534.
- [3] A. ANCONA, Théorie du potentiel dans les espaces fonctionnels à forme coercive, Cours de 3e cycle, Paris VI (1973).
- [4] H. ATTOUCH, C. PICARD, Problèmes variationnels et théorie du potentiel non linéaire, Ann. Fac. Toulouse, 1 (1979), 89-136.
- [5] P. BARAS, M. PIERRE, Singularités éliminables d'équations elliptiques semi-linéaires, C.R.A.S. (1982).
- [6] H. BREZIS, F. BROWDER, Sur une propriété des espaces de Sobolev, C.R.A.S. t.287 (1978), 113-115.

- [7] R. M. BLUMENTHAL, R. K. GETOOR, Markov processes and potential theory, Academic Press, N.Y., London (1968).
- [8] G. CHOQUET, Lectures on analysis, Vol. 1, J. Mardsen, T. Lance and S. Gelbart Ed., W.A. Benjamin Inc. (1969), N.Y.
- [9] J. DENY, Méthodes hilbertiennes en théorie du potentiel, C.I.M.E. (1969).
- [10] R. HARVEY, J.C. POLKING, A notion of capacity which characterizes removable singularities, Trans. of A.M.S., 169 (1972), 183-195.
- [11] N. KENMOCHI - Y. MIZUTA, The gradient of a convex function on a regular functional space, Hiroshima Math. J. 4 (1974), 743-763.
- [12] V.G. MAZ'JA, V.P. HAVIN, Use of (p, ℓ) -capacity in problems of the theory of exceptional sets, Math. USSR Sbornik, 19 (1973), 547-580.
- [13] N.G. MEYERS, A theory of capacities for potentials of functions in Lebesgue classes, Math. Scand. 26 (1970), 255-292.
- [14] F. MIGNOT, J.P. PUEL, Un résultat de perturbations singulières dans les inéquations variationnelles, Publ. Math. Université de Lille I, n° 99 (1976).
- [15] O. NAKOULIMA, Etude d'une inéquation variationnelle bilatérale et d'un système d'inéquations quasi-variationnelles unilatérales associé, Thèse de 3e cycle, Université de Bordeaux I (1977).
- [16] M. PIERRE, Equations d'évolution non linéaires, inéquations variationnelles et potentiels paraboliques, Thèse, Université Paris VI (1979).