



# Séminaire Laurent Schwartz

## EDP et applications

Année 2015-2016

Marc Briant

### Étude des gaz multi-espèces proches de l'équilibre

*Séminaire Laurent Schwartz — EDP et applications* (2015-2016), Exposé n° XVI, 17 p.

<[http://sisedp.cedram.org/item?id=SLSEDP\\_2015-2016\\_\\_\\_\\_A16\\_0](http://sisedp.cedram.org/item?id=SLSEDP_2015-2016____A16_0)>

© Institut des hautes études scientifiques & Centre de mathématiques Laurent Schwartz, École polytechnique, 2015-2016.

 Cet article est mis à disposition selon les termes de la licence  
CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION – PAS DE MODIFICATION 3.0 FRANCE.  
<http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/fr/>

Institut des hautes études scientifiques  
Le Bois-Marie • Route de Chartres  
F-91440 BURES-SUR-YVETTE  
<http://www.ihes.fr/>

Centre de mathématiques Laurent Schwartz  
UMR 7640 CNRS/École polytechnique  
F-91128 PALAISEAU CEDEX  
<http://www.math.polytechnique.fr/>

**cedram**

*Exposé mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*  
<http://www.cedram.org/>

# Étude des gaz multi-espèces proches de l'équilibre

Marc Briant (en collaboration avec E. Daus)

## Résumé

L'équation des gaz de Boltzmann peut être étendue au cas général d'un gaz constitué de plusieurs espèces différentes. Ce système d'équations intégral-différentielles présente des similarités avec le cas mono-espèce mais les interactions entre espèces différentes entraînent des comportements de mélange non triviaux. Dans cet exposé je présenterai ce modèle de Boltzmann multi-espèces et ses particularités ainsi que son étude dans un cadre perturbatif autour de l'équilibre global (travail réalisé en collaboration avec E. Daus et soumis [5]). Plus précisément, nous regarderons le problème de Cauchy dans l'espace physique des fonctions de masse et d'énergie finies. Chemin faisant, j'introduirai les récents développements qui permettent de traiter des problèmes hypocoercifs dans des espaces peu réguliers (non Sobolev par exemple) et je mettrai en lumière les différences intrinsèques qui existent entre le modèle mono-espèce et multi-espèces.

## Sommaire

<b>1</b>	<b>Modélisation des gaz multi-espèces par un système de Boltzmann</b>	<b>2</b>
1.1	Une approche mésoscopique de l'étude des gaz . . . . .	2
1.2	La modélisation mathématique probabiliste . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Le régime perturbatif et objectifs des travaux</b>	<b>4</b>
2.1	Propriétés élémentaires a priori du système multi-espèces . . . . .	4
2.2	Équations perturbées autour de l'équilibre . . . . .	5
2.3	Études existantes et but de nos travaux . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Hypocoercivité de l'opérateur linéaire complet dans <math>L^2_{x,v}</math></b>	<b>7</b>
3.1	L'espace naturel pour l'opérateur de Boltzmann linéaire . . . . .	7
3.2	Trou spectral et manque de coercivité . . . . .	8
3.3	Retrouver de la coercivité par régularité elliptique faible . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Restriction du semi-groupe à <math>L^\infty_{x,v}</math></b>	<b>10</b>
4.1	Restriction de semi-groupe : théorie $L^2 - L^\infty$ . . . . .	10
4.2	Retrouver la norme $L^2$ . . . . .	11

<b>5</b>	<b>Problème de Cauchy non linéaire et extension d'espace</b>	<b>12</b>
5.1	L'opérateur non linéaire . . . . .	12
5.2	Théorie d'extension d'espace . . . . .	13
5.3	Choix des décompositions . . . . .	14
5.4	Le théorème final . . . . .	15

# 1 Modélisation des gaz multi-espèces par un système de Boltzmann

## 1.1 Une approche mésoscopique de l'étude des gaz

**Hypothèses physiques sur le gaz.** Nous considérons un gaz, une mixture, constitué de  $N$  espèces mono-atomiques de masses potentiellement différentes  $m_i$  et qui ne réagissent pas chimiquement. Les particules de gaz se déplacent selon la position  $x$  sur le tore en dimension trois  $\mathbb{T}^3$  avec des vitesses  $v$  dans  $\mathbb{R}^3$ .

La première idée pour étudier un tel gaz est de décrire les lois de Newton s'appliquant à chacune des particules. Une telle approche donne naissance à un problème à  $N$  corps qui est déjà problématique pour seulement trois corps. Il est donc nécessaire de trouver une autre manière de décrire cet ensemble. L'idée est que seul le comportement moyen d'une particule nous est intéressant, et non le suivi exact de chacune des molécules. Cette approche, dite point de vue mésoscopique, s'intéresse donc à décrire le gaz par la dynamique de la fonction de densité de particules  $F_i(t, x, v)$  de chaque espèce. Cette fonction de densité s'interprète ainsi :  $F_i(t, x, v)dx dv$  représente la probabilité d'avoir à l'instant  $t$  une particule de l'espèce  $i$  dans la boule  $B(x, dx)$  avec une vitesse dans  $B(v, dv)$ . L'hypothèse minimale sur ces fonction est donc

$$\forall i, \forall t, \quad F_i(t, \cdot, \cdot) \in L^1_{loc}(\Omega, L^1_v(\mathbb{R}^d)) \text{ avec un poids } 1 + |v|^2$$

car cela correspond à des gaz de masse et d'énergie localement finie.

**Le processus collisionnel.** Le modèle des gaz de Boltzmann décrit des gaz raréfiés où les collisions satisfont les propriétés suivantes.

1. Collisions binaires : deux particules suffisamment proches sont déviées (limite de Boltzmann-Grad);
2. Collisions localisées : les trajectoires sont déviées très rapidement;
3. Collisions élastiques : si une particule de l'espèce  $i$  à vitesse  $v'$  rencontre une particule de l'espèce  $j$  à vitesse  $v'_*$  alors les vitesses résultantes de la collision, respectivement  $v$  et  $v_*$ , sont déterminées par les lois élastiques

$$\begin{aligned} m_i v' + m_j v'_* &= m_i v + m_j v_* \\ m_i |v'|^2 + m_j |v'_*|^2 &= m_i |v|^2 + m_j |v_*|^2; \end{aligned}$$

4. Processus microreversible : les dynamiques microscopiques sont réversibles dans le temps;
5. Chaos moléculaire : les particules évoluent indépendamment.

## 1.2 La modélisation mathématique probabiliste

Afin de clarifier les expressions, nous utiliserons la notation suivante pour les vecteurs

$$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)$$

ainsi que, lorsque  $\mathbf{m} = \mathbf{m}(v)$  est un vecteur de fonctions mesurables positives, la convention suivante pour les espaces à poids

$$\|\mathbf{f}\|_{L_v^p L_x^q(\mathbf{m})} = \sum_{i=1}^N \left[ \int_{\mathbb{R}^3} \|f_i(\cdot, v)\|_{L_x^q}^p m_i^p dv \right]^{1/p}.$$

Le système de Boltzmann multi-espèces s'écrit comme un système de  $N$  équations intégral-différentielles :

$$\forall i \in \{1, \dots, N\}, \forall t \geq 0, \forall (x, v) \in \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3, \quad \partial_t F_i + v \cdot \nabla_x F_i = Q_i(\mathbf{F}) \quad (1.1)$$

avec la condition initiale

$$\forall 1 \leq i \leq N, \forall (x, v) \in \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3, \quad F_i(0, x, v) = F_{0,i}(x, v).$$

L'opérateur  $\mathbf{Q}$  est l'opérateur de collision qui encode les processus physiques décrivant les collisions inter et extra espèces.

$$Q_i(\mathbf{F}) = \sum_{j=1}^N Q_{ij}(F_i, F_j)$$

avec

$$Q_{ij}(F_i, F_j)(v) = \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} B_{ij}(|v - v_*|, \cos \theta) \left[ F'_i F'_j{}^* - F_i F_j^* \right] dv_* d\sigma,$$

où  $F = F(v)$ ,  $F' = F(v'_{ij})$ ,  $F^* = F(v_*)$  et  $F'^* = F(v'_{ij}{}^*)$  sont les valeurs de  $F$  prises aux vitesses pré et post collision données par les lois de l'élastique

$$\left\{ \begin{array}{l} v'_{ij} = \frac{1}{m_i + m_j} (m_i v + m_j v_* + m_j |v - v_*| \sigma) \\ v'_{ij}{}^* = \frac{1}{m_i + m_j} (m_i v + m_j v_* - m_i |v - v_*| \sigma) \end{array} \right., \text{ and } \cos \theta = \left\langle \frac{v - v_*}{|v - v_*|}, \sigma \right\rangle.$$

Il est important de remarquer dès maintenant que, contrairement au cas de l'équation de Boltzmann mono-espèce ( $N = 1$  et donc  $i = j$  et  $m = 1$ )  $v'_{ij}$  et  $v'_{ij}{}^*$  ne jouent pas des rôles symétriques par rapport à  $v$ . Cette particularité va avoir un rôle crucial tout au long de notre étude.

Nous ferons les hypothèses suivantes sur les noyaux de collision  $B_{ij}$ .

(H1) Symétrie des collisions

$$B_{ij} = B_{ji};$$

(H2) Décomposition vitesse relative, angle de collision

$$B_{ij}(|v - v_*|, \cos \theta) = \Phi_{ij}(|v - v_*|)b_{ij}(\cos \theta);$$

(H3) Potentiels durs ou Maxwellien ( $\gamma = 0$ )

$$\Phi_{ij}(|v - v_*|) = C_{ij}^\Phi |v - v_*|^\gamma, \quad \gamma \in [0, 1];$$

(H4) Forme forte du cut-off angulaire de Grad [10] :  $b$  et  $b'$  bornées ainsi que la stricte positivité suivante

$$C^b := \min_{1 \leq i \leq N} \inf_{\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{S}^2} \int_{\mathbb{S}^2} \min \{b_{ii}(\sigma_1 \cdot \sigma_3), b_{ii}(\sigma_2 \cdot \sigma_3)\} d\sigma_3 > 0.$$

## 2 Le régime perturbatif et objectifs des travaux

### 2.1 Propriétés élémentaires a priori du système multi-espèces

**Symétrie des opérateurs et lois de conservation.** En intégrant contre une fonction test  $\psi$  nous trouvons la formule suivante

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} Q_{ij}(F_i, F_j)(v) \psi_i(v) dv + \int_{\mathbb{R}^3} Q_{ji}(F_j, F_i)(v) \psi_j(v) dv \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^6} \int_{\mathbb{S}^2} B_{ij}(F_i' F_j^* - F_i F_j^*) (\psi_i' + \psi_j^* - \psi_i - \psi_j^*) d\sigma dv dv_*. \end{aligned}$$

Cette propriété connue pour l'équation de Boltzmann est néanmoins très différente dans le cas multi-espèces. En effet, la nécessité de permuter les indices  $i$  et  $j$  pour obtenir de la symétrie montrent la non-trivialité des interactions croisées, comme nous le verrons plus loin. Dans un premier temps cette propriété de symétrie nous permet de trouver les invariants collisionnels.

$$\sum_{i,j=1}^N \int_{\mathbb{R}^3} Q_{ij}(F_i, F_j)(v) \psi_i(v) dv = 0$$

si et seulement si, avec  $\mathbf{e}_k = (\delta_{ki})_{1 \leq i \leq N}$ ,

$$\psi(v) \in \text{Span} \{ \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N, v_1 \mathbf{m}, v_2 \mathbf{m}, v_3 \mathbf{m}, |v|^2 \mathbf{m} \}.$$

Nous obtenons donc les lois de conservations suivantes tout au long du temps

- Conservation de la masse total de chaque espèce

$$c_{\infty, i} = \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} F_i(t, x, v) dx dv \quad (1 \leq i \leq N),$$

- Conservation du moment total du gaz

$$u_\infty = \frac{1}{\rho_\infty} \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} m_i v F_i(t, x, v) dx dv,$$

- Conservation de l'énergie totale (donc de la température) du gaz

$$\theta_\infty = \frac{1}{3\rho_\infty} \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} m_i |v - u_\infty|^2 F_i(t, x, v) dx dv.$$

Une fois encore nous mettons en avant la particularité des gaz multi-espèces, aucune espèce ne conserve son moment ni son énergie, seul le moment et l'énergie de la mixture dans son ensemble sont préservés.

**Équilibres locaux et globaux.** Desvilletes, Monaco et Salvarani [8] ont démontré un théorème-H, dans l'esprit du théorème-H établi dans le cas mono-espèce. Plus précisément, nous avons une décroissance de l'entropie vers les équilibres locaux

$$M_i(t, x, v) = c_{\text{loc},i}(t, x) \left( \frac{m_i}{2\pi k_B \theta_{\text{loc}}(t, x)} \right)^{3/2} \exp \left[ -m_i \frac{|v - u_{\text{loc}}(t, x)|^2}{2k_B \theta_{\text{loc}}(t, x)} \right].$$

Les équilibres globaux sont donc les équilibres locaux qui satisfont  $v \cdot \nabla_x M_i = 0$ . Sur le tore la seule possibilité est que  $M_i$  soit indépendant de  $x$ . A des changements de variable près, l'unique équilibre global est donc

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_i)_{1 \leq i \leq N} \quad \text{avec} \quad \mu_i(v) = c_{\infty,i} \left( \frac{m_i}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-m_i \frac{|v|^2}{2}}.$$

Chaque espèce possède donc son propre équilibre global qui évolue à son propre taux de décroissance exponentielle  $m_i$ . Un des points clés de nos preuves est de comprendre comment les opérateurs d'interactions croisées mélangent ces différentes vitesses.

## 2.2 Équations perturbées autour de l'équilibre

Nous nous intéresserons uniquement aux solutions perturbatives, c'est-à-dire des solutions qui sont une perturbation de l'équilibre  $\boldsymbol{\mu}$  de la forme  $F_i(t, x, v) = \mu_i(v) + f_i(t, x, v)$ . Nous étudierons donc le système d'équations perturbatives

$$\forall 1 \leq i \leq N, \quad \partial_t f_i + v \cdot \nabla_x f_i = L_i(\mathbf{f}) + Q_i(\mathbf{f}),$$

où nous définissons l'opérateur linéaire de Boltzmann multi-espèces

$$L_i(\mathbf{f}) = \sum_{j=1}^N L_{ij}(f_i, f_j) \quad \text{avec} \quad L_{ij}(f_i, f_j) = Q_{ij}(\mu_i, f_j) + Q_{ij}(f_i, \mu_j).$$

Les lois de conservations perturbatives pour  $\mathbf{f} = \mathbf{F} - \boldsymbol{\mu}$  deviennent

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0, \quad 0 &= \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_i(t, x, v) \, dx dv \quad (1 \leq i \leq N) \\ 0 &= \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} m_i v f_i(t, x, v) \, dx dv \\ 0 &= \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} m_i |v|^2 f_i(t, x, v) \, dx dv. \end{aligned} \tag{2.1}$$

### 2.3 Études existantes et but de nos travaux

**Travaux antérieurs.** Nous donnons ici un bref aperçu des résultats obtenus jusqu'à aujourd'hui. Cet énoncé n'est pas exhaustif et se concentre uniquement sur les résultats en rapport avec notre étude.

De nombreux travaux existent dans le cas mono-espèce perturbatif. Il s'agit d'étudier les propriétés du semi-groupe linéaire puis s'occuper du problème de Cauchy et du retour exponentiel vers l'équilibre. Cela a été obtenu dans des espaces de la forme  $H_v^s H_x^{s'}(w(v)\mu^{-1/2})$  [11][18][13][14][19][17], et a récemment été étendu à des espaces de Sobolev et Lebesgue bien moins réguliers

$$(W_v^{\alpha,1} \cap W_v^{\alpha,q}) W_x^{\beta,p} ((1 + |v|)^k)$$

grâce à une méthode d'extension des semi-groupes à partir de  $H^{3/2+0}(\mu^{-1/2})$  [12].

En revanche, très peu de travaux ont été effectués sur le problème multi-espèces. Nous citons [8] où le théorème-H pour les gaz chimiquement réactifs fut démontré. Des études de la limite diffusive de la partie linéaire ainsi que des propriétés de compacité au sein de  $\mathbf{L}$  ont été obtenu [2][3]. Enfin, le récent [7] a prouvé l'existence d'un trou spectral pour  $\mathbf{L}$  dans le cas de masses identiques  $m_i = m$ .

**Objectifs de l'étude** Dans ce projet nous démontrons l'existence, l'unicité, la positivité et le retour exponentiel à l'équilibre dans le cas général  $m_i$ . Nous désirions obtenir ces résultats dans des espaces les plus proches de la physique  $L_v^1 L_x^\infty (1 + |v|^2)$  et finalement nous les obtenons dans  $L_v^1 L_x^\infty (\langle v \rangle^k)$  avec  $k > k_0$ . Le seuil  $k_0$  est construit explicitement et  $k_0 = 2$  dans le cas mono-espèce avec sphères dures ( $\gamma = b_{ij} = 1$ ). Enfin, nous utilisons des méthodes constructives et qui ne font pas intervenir de dérivées ni en vitesse ni en espace.

Comme nous le verrons, nous retrouvons les résultats les plus récents de Boltzmann mono-espèce perturbatif mais nous montrerons que les méthodes classiques ne peuvent s'appliquer directement au cas multi-espèces, notamment à cause des l'asymétrie des rôles joués par  $v'_{ij}$  et  $v_{ij}^*$  évoquée précédemment.

### 3 Hypocoercivité de l'opérateur linéaire complet dans $L_{x,v}^2$

Dans cette section nous étudions les propriétés dans  $L_{x,v}^2(\boldsymbol{\mu}^{-1/2})$  de l'opérateur linéaire complet

$$\mathbf{G} = \mathbf{L} - v \cdot \nabla_x.$$

#### 3.1 L'espace naturel pour l'opérateur de Boltzmann linéaire

**Propriétés élémentaires de  $\mathbf{L}$ .** L'opérateur  $\mathbf{L}$  agit uniquement sur la variable  $v$  dans  $L_v^2(\boldsymbol{\mu}^{-1/2})$ . Il est fermé et auto-adjoint. Son noyau est donné par  $\text{Ker}(\mathbf{L}) = \text{Span} \{ \phi_1(v), \dots, \phi_{N+4}(v) \}$  avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_k(v) = \frac{1}{\sqrt{c_{\infty,k}}} \mu_k \mathbf{e}_k, \quad 1 \leq k \leq N \\ \phi_k(v) = \frac{v_{k-N}}{\left( \sum_{i=1}^N m_i c_{\infty,i} \right)^{1/2}} (m_i \mu_i)_{1 \leq i \leq N}, \quad N+1 \leq k \leq N+3 \\ \phi_{N+4}(v) = \frac{1}{\left( \sum_{i=1}^N c_{\infty,i} \right)^{1/2}} \left( \frac{|v|^2 - 3m_i^{-1}}{\sqrt{6}} m_i \mu_i \right)_{1 \leq i \leq N}. \end{array} \right.$$

**Projections orthogonales et lois de conservations.** Les projections sur  $\text{Ker}(\mathbf{L})$  jouent un rôle important. Pour une fonction  $\mathbf{f}(t, x, v)$  nous appelons sa “partie fluide” sa projection orthogonale  $\pi_{\mathbf{L}(f(t,x))}$  sur  $\text{Ker}(\mathbf{L})$  dans  $L_v^2(\boldsymbol{\mu}^{-1/2})$

$$\pi_i(\mathbf{f})(t, x, v) = \left[ a_i(t, x) + b(t, x) \cdot v + c(t, x) \frac{|v|^2 - 3m_i^{-1}}{2} \right] m_i \mu_i(v). \quad (3.1)$$

La “partie microscopique” de  $\mathbf{f}$  est, quant à elle, défini par  $\pi_{\mathbf{L}}^\perp(\mathbf{f}) = \mathbf{f} - \pi_{\mathbf{L}}(\mathbf{f})$ .

**Projections orthogonales et lois de conservations.** Il est intéressant de relier l'opérateur  $\mathbf{L}$  à l'opérateur linéaire complet  $\mathbf{G}$ . Nous trouvons, par exemple dans [4], que dans  $L_{x,v}^2(\boldsymbol{\mu}^{-1/2})$  le noyau de  $\mathbf{G}$  coïncide avec celui de  $\mathbf{L}$ . Dès lors nous pouvons définir la projection orthogonal sur  $\text{Ker}(\mathbf{G})$

$$\Pi_{\mathbf{G}}(\mathbf{f}) = \sum_{k=1}^{N+4} \left( \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \langle \mathbf{f}(x, v), \phi_k(v) \rangle_{\boldsymbol{\mu}^{-1/2}} dx dv \right) \phi_k(v),$$

et nous remarquons que  $\Pi_{\mathbf{G}}(\mathbf{f}) = 0$  si et seulement si  $\mathbf{f}$  satisfait les lois de conservation (2.1). Ceci entraîne que  $\text{Ker}(\mathbf{L})$  dans  $L_{x,v}^2(\boldsymbol{\mu}^{-1/2})$  est stable pour l'équation

$$\partial_t \mathbf{f} = \mathbf{G}(\mathbf{f}).$$

### 3.2 Trou spectral et manque de coercivité

**Théorème 3.1 (E.Daus, M.B. [5])** *Il existe  $\lambda_L > 0$  tel que pour tout  $\mathbf{f} \in L_v^2(\boldsymbol{\mu}^{-1/2})$ ,*

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{L}(\mathbf{f}) \rangle_{L_v^2(\boldsymbol{\mu}^{-1/2})} \leq -\lambda_L \|\mathbf{f} - \pi_{\mathbf{L}}(\mathbf{f})\|_{L_v^2(\boldsymbol{\nu}^{1/2}\boldsymbol{\mu}^{-1/2})}^2.$$

La preuve de ce théorème utilise des arguments proches de [7] qui reposent sur la décomposition

$$\mathbf{L} = -\boldsymbol{\nu}(v) + \mathbf{K}$$

avec  $\boldsymbol{\nu}(v)$  un opérateur multiplicatif strictement positif et  $\mathbf{K}$  un opérateur compact. De plus, nous pouvons scinder l'opérateur  $\mathbf{L}$  en une partie interespèce et une partie interactions croisées

$$L_i(\mathbf{f}) = L_{ii}(f_i) + L_i^b(\mathbf{f}).$$

Nous savons que dans le cas mono-espèce l'opérateur  $L$  possède un trou spectral [16][1]. Dès lors, ce résultat est acquis pour la partie interespèce  $L_{ii}$  de notre opérateur multi-espèces. Pour conclure, il reste à montrer que les interactions croisées  $L_i^b$  ne perturbent pas trop l'opérateur diagonal en dehors de son noyau.

Cette partie de nos travaux est la seule où nous pouvons traiter le système multi-espèces comme une "perturbation" de l'équation de Boltzmann mono-espèce.

**Manque de coercivité sur la partie fluide.** Nous étudions les propriétés de l'équation linéaire

$$\partial_t \mathbf{f} = \mathbf{G}(\mathbf{f}) = \mathbf{L}(\mathbf{f}) - v \cdot \nabla_x \mathbf{f}.$$

Le transport est anti-symétrique dans  $L_{x,v}^2(\boldsymbol{\mu}^{-1/2})$  et donc un calcul direct donne

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{f}\|_{L_{x,v}^2(\boldsymbol{\mu}^{-1/2})}^2 \leq -\lambda_L \|\pi_{\mathbf{L}}^\perp(\mathbf{f})\|_{L_{x,v}^2(\boldsymbol{\nu}^{1/2}\boldsymbol{\mu}^{-1/2})}^2. \quad (3.2)$$

Il est nécessaire de pouvoir estimer  $\pi_{\mathbf{L}}(\mathbf{f})$  grâce à  $\pi_{\mathbf{L}}^\perp(\mathbf{f})$  afin de retrouver une coercivité globale et donc conclure grâce à un Lemme de Grönwall. Cela est en général faux mais nous allons voir qu'un tel contrôle est possible dans l'ensemble des solutions de l'équation.

### 3.3 Retrouver de la coercivité par régularité elliptique faible

**Contrôler la partie fluide grâce à la partie microscopique.** Il existe deux grandes méthodes, dans la littérature de l'équation de Boltzmann, qui permettent de contrôler la partie fluide par la partie microscopique. Dans les deux cas, nous nous plaçons dans l'ensemble des solutions.

1. Grâce à de la dérivation. L'idée est de construire des normes hypocoercives qui contrôlent les normes des dérivées et permettent alors de contrôler la norme  $H^s(\boldsymbol{\mu}^{-1/2})$  totale par l'inégalité de Poincaré. On distingue la stratégie de Mouhot-Neumann [17] : retour négatif sur le gradient total en  $x$  par un

opérateur croisé  $\langle \nabla_v f, \nabla_x f \rangle_{L^2_{x,v}(\mu^{-1/2})}$ ; et celle de Guo [13][14] : estimations directes des normes de Sobolev des quantités fluides qui révèlent

$$\Delta \pi_L(f) \sim \partial^2 \pi_L^\perp(f) + \text{termes d'ordres supérieurs} \quad (3.3)$$

- Grâce à une formulation faible. C'est la méthode que nous avons choisi car elle permet de comprendre l'hypocoercivité de l'opérateur directement à partir des équations fluides. Cette récente stratégie de Esposito-Guo-Kim-Marra [9] s'appuie sur l'idée de retrouver la régularité elliptique (3.3) directement par le transport dans une formulation faible.

Nous décrivons plus en détail cette méthode elliptique faible. Nous multiplions l'équation par une fonction test  $\psi = (\psi_i)_{1 \leq i \leq N}$  et décomposons  $\mathbf{f} = \pi_{\mathbf{L}}(\mathbf{f}) + \pi_{\mathbf{L}}^\perp(\mathbf{f})$ . Nous obtenons une égalité de la forme

$$-\sum_{i=1}^N \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \pi_i(\mathbf{f}) v \cdot \nabla_x \psi_i \, dx dv ds = \Psi_1(t) + \Psi_2(t) + \Psi_3(t) \quad (3.4)$$

avec

$$\begin{aligned} \Psi_1(t) &= \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \langle \psi_0, \mathbf{f}_0 \rangle_1 \, dx dv - \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \langle \psi(t), \mathbf{f}(t) \rangle_1 \, dx dv, \\ \Psi_2(t) &= \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} [\pi_{\mathbf{L}}^\perp(\mathbf{f})_i v \cdot \nabla_x \psi_i + L_i(\pi_{\mathbf{L}}^\perp(\mathbf{f})) \psi_i] \, dx dv ds, \\ \Psi_3(t) &= \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_i \partial_s \psi_i \, dx dv ds. \end{aligned}$$

En rappelant la définition (3.1) de  $\pi_{\mathbf{L}}$ , le but est de construire des fonctions tests qui séparent chaque coordonnées  $a_i(t, x)$ ,  $b(t, x)$  et  $c(t, x)$ . Contrairement à [9] où des conditions de bord permettaient le choix de conditions elliptiques, notre domaine périodique doit être traité en utilisant les lois de conservations de manière cruciale. Enfin, les dérivées en temps  $\partial_t a_i$ ,  $\partial_t b$  et  $\partial_t c$  sont étudiées par régularité elliptique duale.

Nous donnons l'exemple de la fonction test pour  $a_i(t, x)$  (les choix pour  $b(t, x)$  et  $c(t, x)$  nécessitent des fonctions test imbriquées plus complexes). La fonction test est

$$\psi_i(t, x, v) = (|v|^2 - \alpha_i) v \cdot \nabla_x \phi_i(t, x)$$

avec  $\phi_i$  est solution de

$$-\Delta_x \phi_i(t, x) = a_i(t, x)$$

afin de retrouver, dans le terme à gauche dans (3.4),  $a_i(t, x)$  grâce au transport et  $\alpha_i$  choisit pour que seule reste la contribution du terme fluide en  $a_i(t, x)$ , soit

$$\int_{\mathbb{R}^3} (|v|^2 - \alpha_i) \frac{|v|^2 - 3m_i^{-1}}{2} v_k^2 \mu_i(v) \, dv = 0.$$

Comme annoncé, nous utilisons la conservation de la masse qui implique  $\int_{\mathbb{T}^3} a_i = 0$  et donc permet d'avoir le contrôle suivant

$$\forall t \geq 0, \quad \|\phi_i(t)\|_{H_x^2} \leq C_0 \|a_i(t)\|_{L_x^2}$$

qui permet d'estimer  $\Psi_1$  dans (3.4) tandis que les autres termes de droite sont contrôlés par  $\pi_{\mathbf{L}}^\perp(\mathbf{f})$  uniquement.

Ces calculs permettent de démontrer le contrôle de la partie fluide des solutions donné par la proposition suivante.

**Proposition 3.2 (E. Daus, M.B [5])** *Il existe  $N_{\mathbf{f}}(t)$  tel que*

$$(i) \quad |N_{\mathbf{f}}(t)| \leq C_\perp \|\mathbf{f}(t)\|_{L_{x,v}^2(\mu^{-1/2})}^2;$$

(ii)

$$\int_0^t \|\pi_{\mathbf{L}}(\mathbf{f})\|_{L_{x,v}^2(\mu^{-1/2})}^2 \leq N_{\mathbf{f}}(t) - N_{\mathbf{f}}(0) + C_\perp \int_0^t \|\pi_{\mathbf{L}}^\perp(\mathbf{f})\|_{L_{x,v}^2(\mu^{-1/2})}^2.$$

Finalement, un tel contrôle combiné à l'estimation (3.2) permet de conclure l'étude de l'équation linéaire multi-espèces dans  $L_{x,v}^2(\mu^{-1/2})$ .

**Théorème 3.3 (E. Daus, M.B [5])**  $\mathbf{G} = \mathbf{L} - v \cdot \nabla_x$  génère un  $C^0$  semi-groupe sur  $L_{x,v}^2(\mu^{-1/2})$  tel que

$$\forall t \geq 0, \quad \|S_{\mathbf{G}}(t)(Id - \Pi_{\mathbf{G}})\|_{L_{x,v}^2(\mu^{-1/2})} \leq C_G e^{-\lambda_G t}.$$

## 4 Restriction du semi-groupe à $L_{x,v}^\infty$

### 4.1 Restriction de semi-groupe : théorie $L^2 - L^\infty$

La norme  $L_{x,v}^2(\mu^{-1/2})$  n'est malheureusement pas algébrique pour l'opérateur non-linéaire  $\mathbf{Q}$ , qui nécessite un cadre  $L^\infty$  en  $x$ . Il est donc nécessaire de développer une théorie de semi-groupe pour  $\mathbf{G}$  dans une norme algébrique pour  $\mathbf{Q}$ . L'idée développée par Guo [15] est que les propriétés dans  $L^2$  peuvent être restreintes à  $L^\infty$  par la propriété suivante.

**Lemme 4.1** *Pour  $\beta > 3/2$  supposons que pour  $\mathbf{f} = S_{\mathbf{G}}(t)\mathbf{f}_0$ , et pour tout  $t \in [0, T_0]$ ,*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}(t)\|_{L_{x,v}^\infty(\langle v \rangle^\beta \mu^{-1/2})} &\leq e^{\lambda(T_0 - 2t)} \|\mathbf{f}_0\|_{L_{x,v}^\infty(\langle v \rangle^\beta \mu^{-1/2})} \\ &\quad + C_{T_0} \int_0^t \|\mathbf{f}(s)\|_{L_{x,v}^2(\mu^{-1/2})} ds. \end{aligned}$$

Alors  $\|\mathbf{f}(t)\|_{L_{x,v}^\infty(\langle v \rangle^\beta \mu^{-1/2})} \leq C e^{-\tilde{\lambda}t} \|\mathbf{f}_0\|_{L_{x,v}^\infty(\langle v \rangle^\beta \mu^{-1/2})}$ .

Afin d'appliquer ce lemme nous utilisons la décomposition  $\mathbf{L} = -\boldsymbol{\nu}(v) + \mathbf{K}(\mathbf{f})$ . De la même manière que dans le cas Boltzmann mono-espèce nous avons

$$\nu_i(v) \sim (1 + |v|^\gamma)$$

ce qui implique que, pour  $\beta$  assez grand afin que  $L_{x,v}^\infty(\langle v \rangle^\beta \boldsymbol{\mu}^{-1/2}) \subset L_{x,v}^2(\boldsymbol{\mu}^{-1/2})$ , nous puissions écrire  $\mathbf{f} = S_{\mathbf{G}}(t)\mathbf{f}_0$  en formule de Duhamel le long des caractéristiques

$$\begin{aligned} f_i(t, x, v) &= e^{-\nu_i(v)t} f_{0i}(x - vt, v) \\ &+ \int_0^t e^{-\nu_i(v)(t-s)} K_i(\mathbf{f}(s, x - (t-s)v, \cdot))(v) ds. \end{aligned} \quad (4.1)$$

## 4.2 Retrouver la norme $L^2$

**Représentation de Carleman multi-espèces.** Dans le cas de l'opérateur  $K$  mono-espèce, nous savons que  $K$  est un opérateur à noyau ayant des propriétés de décroissances à l'infini. Pour ce faire, il est nécessaire de faire appel à la représentation de Carleman [6] de l'opérateur  $K$ . Cette représentation permet d'utiliser les variables d'intégrations  $(v', v'_*)$  au lieu de la paramétrisation  $(v, \sigma)$ . Une telle réécriture de l'opérateur est également possible dans le cas multi-espèces mais avec des domaines d'intégrations très différents dû à l'asymétrie entre  $v'$  et  $v'_*$  par rapport à  $v$ .

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} B(v - v_*, \sigma) f' g'^* dv_* d\sigma \\ &= C_{ij} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|v - v'_*|} \left( \int_{\tilde{E}_{vv'_*}^{ij}} \frac{B\left(v - V(v', v'_*), \frac{v'_* - v'}{|v'_* - v'|}\right)}{|v'_* - v'|} f' dE(v') \right) g'^* dv'_* \end{aligned}$$

Dans le cas mono-espèce,  $E_{vv'}$  est l'hyperplan passant par  $v$  et orthogonal à  $v - v'$  et la formule ci-dessus est invariante en échangeant les rôles  $v'$  et  $v'_*$ . Dans le cas multi-espèces, les différences de masses entraînent  $E_{vv'}^{ij} = E_{vv'}$  et  $\tilde{E}_{vv'_*}^{ij} = E_{vv'_*}$  si  $m_i = m_j$  ou la sphère

$$\left| v' + \left( \frac{m_j}{m_i - m_j} v'_* - \frac{m_i}{m_i - m_j} v \right) \right| = \left| \frac{m_j}{m_i - m_j} v'_* - \frac{m_j}{m_i - m_j} v \right|$$

sinon.

Grâce à cette représentation de Carleman nous démontrons que

$$K_i(\mathbf{f})(v) = \int_{\mathbb{R}^3} \langle \mathbf{k}^{(i)}(v, v_*), \mathbf{f}(v_*) \rangle dv_*$$

mais, plus important, que l'asymétrie des rôles  $v'$  et  $v'_*$  entraîne le mixage dans les poids exponentiels sur lequel nous insistions plus haut:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left| k_j^{(i)}(v, v_*) \right| \frac{\langle v \rangle^\beta \mu_i(v)^{-1/2}}{\langle v_* \rangle^\beta \mu_j(v_*)^{-1/2}} dv_* \leq \frac{C_\beta}{1 + |v|}. \quad (4.2)$$

**Retour à la forme de Duhamel.** Nous réécrivons donc (4.1)

$$f_i(t, x, v) = e^{-\nu_i(v)t} f_{0i}(x - vt, v) + \int_0^t e^{-\nu_i(v)(t-s)} \int_{\mathbb{R}^3} \langle \mathbf{k}^{(i)}(v, v_*), \mathbf{f}(s, x - (t-s)v, v_*) \rangle dv_* ds.$$

L'idée est d'alors faire un changement de variable  $y(v) = x - (t-s)v$ , ce qui n'est pas possible car  $v$  n'est pas intégrée. Nous itérons donc une fois la forme implicite de  $\mathbf{f}$  ci-dessus. Nous estimons alors de la manière suivante :

- Pour les grandes vitesses  $|v| \geq R$  ou  $|v_*| \geq R$  ou  $|v_{**}| \geq R$  les termes tendent vers 0 grâce à (4.2).
- Pour les vitesses bornées le changement de variable

$$y(v_*) = x - (t-s)v - (s-s_*)v_*$$

est licite pour  $s - s_* \geq \eta$ . On borne alors  $K_i(\mathbf{f})$  par la norme  $L_{x,v}^1$  de  $\mathbf{f}$ .

- Une inégalité de Cauchy-Schwarz donne un contrôle par la norme  $L_{x,v}^2(\boldsymbol{\mu}^{-1/2})$ .

On obtient donc pour tout  $R$  et  $\eta$  une estimation de la forme

$$e^{\frac{\nu_0}{2}t} \|f_i(t)\|_{L_{x,v}^\infty(w_{\beta i})} \leq (1 + C_2 t) e^{-\frac{\nu_0}{2}t} \|\mathbf{f}_0\|_{L_{x,v}^\infty(\mathbf{w}_\beta)} + C_5 \left( \eta + \frac{1}{R} \right) \sup_{0 \leq s \leq t} \left[ e^{\frac{\nu_0}{2}s} \|\mathbf{f}\|_{L_{x,v}^\infty(\mathbf{w}_\beta)} \right] + C_{R,\eta} t \int_0^t \|\mathbf{f}(s)\|_{L_{x,v}^2(\boldsymbol{\mu}^{-1/2})} ds.$$

Il ne reste plus qu'à choisir  $R$  assez grand et  $\eta$  suffisamment petit pour absorber le terme à droite. Ensuite  $T_0$  assez grand pour retrouver exactement Lemme 4.1.

**Théorème 4.2 (E. Daus, M.B [5])**  $\mathbf{G} = \mathbf{L} - v \cdot \nabla_x$  génère a  $C^0$  semi-groupe pour  $\beta > 3/2$  tel que

$$\forall t \geq 0, \quad \|S_{\mathbf{G}}(t) (Id - \Pi_{\mathbf{G}})\|_{L_{x,v}^\infty(\langle v \rangle^\beta \boldsymbol{\mu}^{-1/2})} \leq C_\infty e^{-\lambda_\infty t}.$$

## 5 Problème de Cauchy non linéaire et extension d'espace

### 5.1 L'opérateur non linéaire

Comme annoncé plus haut, nous avons les contrôles suivants pour l'opérateur non-linéaire dans  $L_x^\infty$ .

**Lemme 5.1** (Guo [15], Gualdani-Mischler-Mouhot [12],...)

$$\forall 1 \leq i \leq N, \quad \tilde{Q}_i(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (Q_{ij}(f_i, g_j) + Q_{ij}(g_i, f_j)).$$

Alors :  $\pi_{\mathbf{L}}(\tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{f}, \mathbf{g})) = 0$  et

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{Q}_i(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \right\|_{L_v^1 L_x^\infty(\langle v \rangle^k)} &\leq C_Q \left[ \|f_i\|_{L_v^1 L_x^\infty(\langle v \rangle^k)} \|\mathbf{g}\|_{L_v^1 L_x^\infty(\langle v \rangle^k \nu)} \right. \\ &\quad \left. + \|f_i\|_{L_v^1 L_x^\infty(\nu_i \langle v \rangle^k)} \|\mathbf{g}\|_{L_v^1 L_x^\infty(\langle v \rangle^k)} \right], \end{aligned}$$

Nous pouvons voir que la norme n'est pas exactement algébrique : il y a une perte de poids  $\nu$ . Cependant, cette perte est égale au retour négatif dans l'opérateur linéaire ce qui ne posera pas de problème majeur pour le traitement de l'équation non-linéaire complète.

Grâce au Théorème 4.2 ainsi que le contrôle donné ci-dessus il est presque immédiat de pouvoir obtenir une théorie de Cauchy globale avec retour exponentiel à l'équilibre dans  $L_{x,v}^\infty(\langle v \rangle^\beta \mu^{-1/2})$  (des estimations similaires pour  $\mathbf{Q}$  sont accessibles dans cet espace). Cependant, nous souhaitons obtenir une théorie de Cauchy dans des espaces moins réguliers en vitesse.

## 5.2 Théorie d'extension d'espace

L'idée initiale provient de [12] et permet d'étendre des propriétés de semi-groupe à des espaces plus larges. Nous pouvons la résumer en quelques points :

- Décomposition  $\mathbf{G} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ ;
- $\mathbf{B}$  dissipatif et  $\mathbf{A}$  régularisant;
- Décomposer en hiérarchie d'équations dans des espaces de plus en plus réguliers;
- Régulariser jusqu'à l'espace où  $\mathbf{G}$  génère un semi-groupe.

En suivant cette démarche nous décomposons

$$\mathbf{G} = (-v \cdot \nabla_x - \nu(v) + \mathbf{A}) + \mathbf{B}$$

et étudions le système différentiel non-linéaire suivant

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{f}_1 = [-\nu(v) + \mathbf{B} - v \cdot \nabla_x](\mathbf{f}_1) + \mathbf{Q}(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2) & \text{dans } L_v^1 L_x^\infty(\langle v \rangle^k) \\ \mathbf{f}_1(0, x, v) = \mathbf{f}_0(x, v) \\ \partial_t \mathbf{f}_2 = \mathbf{G}(\mathbf{f}_2) + \mathbf{A}(\mathbf{f}_1) & \text{dans } L_{x,v}^\infty(\langle v \rangle^\beta \mu^{-1/2}) \subset L_v^1 L_x^\infty(\langle v \rangle^k) \\ \mathbf{f}_2(0, x, v) = 0. \end{cases}$$

Dès lors,  $\mathbf{f} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$  sera la solution recherchée.

### 5.3 Choix des décompositions

**Une décomposition par troncature en vitesse et angulaire.** Nous adaptons la décomposition proposée dans [12] dans le cas mono-espèce au cas multi-espèces. Pour  $\delta > 0$  nous prenons une fonction de troncature  $\Theta(v, v^*, \sigma) \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$  bornée par 1 sur

$$\{|v| \leq \delta^{-1} \quad \text{and} \quad 2\delta \leq |v - v^*| \leq \delta^{-1} \quad \text{and} \quad |\cos \theta| \leq 1 - 2\delta\},$$

et avec un support inclus dans

$$\{|v| \leq 2\delta^{-1} \quad \text{and} \quad \delta \leq |v - v^*| \leq 2\delta^{-1} \quad \text{and} \quad |\cos \theta| \leq 1 - \delta\}.$$

La décomposition de  $\mathbf{K}$  est alors

$$\begin{aligned} A_i^{(\delta)}(\mathbf{f}(v)) &= \sum_{j=1}^N C_{ij}^\Phi \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} \Theta_\delta (\mu_j'^* f_i' + \mu_i' f_j'^* - \mu_i f_j^*) B_{ij} d\sigma dv^*, \\ B_i^{(\delta)}(\mathbf{f}(v)) &= \sum_{j=1}^N C_{ij}^\Phi \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} (1 - \Theta_\delta) (\mu_j'^* f_i' + \mu_i' f_j'^* - \mu_i f_j^*) B_{ij} d\sigma dv^*. \end{aligned}$$

Nous voyons de suite que  $\mathbf{A}^{(\delta)}$  est un opérateur à noyau lisse et support compact ce qui nous donne l'effet régularisant de  $\mathbf{A} : L_v^1 L_x^\infty(\langle v \rangle^k) \longrightarrow L_{x,v}^\infty(\langle v \rangle^\beta \boldsymbol{\mu}^{-1/2})$ .

**Effet perturbatif de  $\mathbf{B}$ .** Comme annoncé précédemment,  $\mathbf{B}^{(\delta)}$  est un opérateur dissipatif car il est une ‘‘petite’’ perturbation de l'opérateur négatif  $-\boldsymbol{\nu}(v)$ . Cela se traduit par le lemme suivant.

#### Lemme 5.2

$$\overline{\mathbf{w}_k} = \left(1 + m_i^{k/2} |v|^k\right)_{1 \leq i \leq N}, \quad \overline{\mathbf{w}_k} \boldsymbol{\nu} = \left((1 + m_i^{k/2} |v|^k) \nu_i(v)\right)_{1 \leq i \leq N}.$$

Alors il existe  $\varepsilon_k(\delta)$  tendant vers 0 quand  $\delta$  tend vers 0 tel que

$$\|\mathbf{B}^{(\delta)}(\mathbf{f})\|_{L_v^1 L_x^\infty(\overline{\mathbf{w}_k})} \leq (C_k + \varepsilon_k(\delta)) \|\mathbf{f}\|_{L_v^1 L_x^\infty(\overline{\mathbf{w}_k} \boldsymbol{\nu})}.$$

La constante  $C_k$  ne dépend que de  $k$  et nous la connaissons explicitement. Sa caractéristique principale est que  $C_k < 1$  pour  $k > k_0$ ,  $k_0$  explicite et égal à 2 pour les sphères dures mono-espèce. Ce lemme donne l'hypodissipativité de  $-\boldsymbol{\nu}(v) + \mathbf{B} - v \cdot \nabla_x$  dans  $L_v^1 L_x^\infty(\langle v \rangle^k)$  pour  $k > k_0$ .

Dans le cas mono-espèce et sphères dures, ce résultat a été obtenu dans [12]. Nous l'étendons à des noyaux plus généraux et au cas multi-espèces. Une fois encore, nous retrouvons le résultat du mono-espèce avec une stratégie similaire mais des techniques très différentes à cause des masses non identiques. La clé de ce lemme est l'inégalité de Povzner qui est une estimation sur l'évolution de fonctions convexes au cours d'une collision. Les arguments standards mono-espèce pour obtenir ce genre de contrôle ne semblent pas utilisables dans le cas multi-espèces. En effet, la perte de

symétrie entre  $v$  et  $v_*$  renvoie à des contrôles barycentriques mais ceux-ci ne suffisent pas pour appliquer les méthodes convexe-concave mono-espèce. Néanmoins, dans le cas des fonctions convexes associées aux moments ( $v \mapsto |v|^k$ ) pour lesquels des bornes inférieures délicates existent nous avons pu établir une inégalité de type Povzner.

**Proposition 5.3 (Povzner-type inequality, E. Daus, M.B. [5])** *Pour tout  $k > 2$*

$$\int_{\mathbb{S}^2} \left[ m_i^{k/2} |v|^k + m_j^{k/2} |v_*|^k \right] d\sigma \leq \frac{b_{ij}}{b_{ij}^\infty} C_k [m_i |v|^2 + m_j |v_*|^2]^{k/2}.$$

## 5.4 Le théorème final

Toutes les considérations et résultats énoncés plus haut nous permettent de démontrer le théorème suivant.

**Théorème 5.4 (E. Daus, M.B. [5])**  *$E = L_v^1 L_x^\infty (\langle v \rangle^k)$  avec  $k > k_0$ , où  $k_0$  est tel que*

$$C_k = \frac{2}{k+2} \frac{1 - \left[ \max_{i,j} \frac{|m_i - m_j|}{m_i + m_j} \right]^{\frac{k+2}{2}} + \left[ 1 - \left( \max_{i,j} \frac{|m_i - m_j|}{m_i + m_j} \right) \right]^{\frac{k+2}{2}}}{1 - \max_{i,j} \frac{|m_i - m_j|}{m_i + m_j}} \max_{i,j} \frac{4\pi b_{ij}^\infty}{b_{ij}} < 1.$$

*Ils existent  $\eta_E$ ,  $C_E$  et  $\lambda_E > 0$  tel que pour tout  $\mathbf{F}_0 = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{f}_0 \geq 0$  tel que  $u_\infty = 0$  and  $\theta_\infty = 1$ , si*

$$\|\mathbf{F}_0 - \boldsymbol{\mu}\| \leq \eta_E$$

*alors il existe une unique solution  $\mathbf{F} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{f}$  pour (1.1) dans  $E$ .*

*De plus,  $\mathbf{F} \geq 0$  satisfait les lois de conservations et*

$$\forall t \geq 0, \quad \|\mathbf{F} - \boldsymbol{\mu}\|_E \leq C_E e^{-\lambda_E t} \|\mathbf{F}_0 - \boldsymbol{\mu}\|_E.$$

Pour conclure nous mentionons que l'auteur a récemment obtenu un résultat final similaire dans  $L_{x,v}^\infty(\mathbf{w})$  avec  $w_i = e^{\kappa_1(\sqrt{m_i}|v|)^{\kappa_2}}$  avec  $\kappa_1 > 0$  et  $\kappa_2 \in (0, 2)$  et  $w_i = \langle \sqrt{m_i}v \rangle^k$  avec  $k > k_0$ .

## References

- [1] BARANGER, C., AND MOUHOT, C. Explicit spectral gap estimates for the linearized Boltzmann and Landau operators with hard potentials. *Rev. Mat. Iberoamericana* 21, 3 (2005), 819–841.
- [2] BOUDIN, L., GREC, B., PAVI, M., AND SALVARANI, F. Diffusion asymptotics of a kinetic model for gaseous mixtures. *Kinetic and Related Models* 6, 1 (2013), 137–157.

- [3] BOUDIN, L., GREC, B., AND SALVARANI, F. The Maxwell-Stefan diffusion limit for a kinetic model of mixtures. *Acta Applicandae Mathematicae* 136, 1 (2015), 79–90.
- [4] BRIANT, M. From the Boltzmann equation to the incompressible Navier–Stokes equations on the torus: A quantitative error estimate. *J. Differential Equations* 259, 11 (2015), 6072–6141.
- [5] BRIANT, M., AND DAUS, E. The Boltzmann equation for multi-species mixture close to global equilibrium. Preprint 2015.
- [6] CARLEMAN, T. *Problèmes mathématiques dans la théorie cinétique des gaz*. Publ. Sci. Inst. Mittag-Leffler. 2. Almqvist & Wiksells Boktryckeri Ab, Uppsala, 1957.
- [7] DAUS, E. S., JÜNGEL, A., MOUHOT, C., AND ZAMPONI, N. Hypocoercivity for a linearized multispecies Boltzmann system. *SIAM J. Math. Anal.* 48, 1 (2016), 538–568.
- [8] DESVILLETES, L., MONACO, R., AND SALVARANI, F. A kinetic model allowing to obtain the energy law of polytropic gases in the presence of chemical reactions. *Eur. J. Mech. B Fluids* 24, 2 (2005), 219–236.
- [9] ESPOSITO, R., GUO, Y., KIM, C., AND MARRA, R. Non-isothermal boundary in the Boltzmann theory and Fourier law. *Comm. Math. Phys.* 323, 1 (2013), 177–239.
- [10] GRAD, H. Principles of the kinetic theory of gases. In *Handbuch der Physik (herausgegeben von S. Flügge), Bd. 12, Thermodynamik der Gase*. Springer-Verlag, Berlin, 1958, pp. 205–294.
- [11] GRAD, H. Asymptotic equivalence of the Navier-Stokes and nonlinear Boltzmann equations. In *Proc. Sympos. Appl. Math., Vol. XVII*. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1965, pp. 154–183.
- [12] GUALDANI, M. P., MISCHLER, S., AND MOUHOT, C. Factorization for non-symmetric operators and exponential H-theorem. Preprint 2013.
- [13] GUO, Y. Classical solutions to the Boltzmann equation for molecules with an angular cutoff. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 169, 4 (2003), 305–353.
- [14] GUO, Y. Boltzmann diffusive limit beyond the Navier-Stokes approximation. *Comm. Pure Appl. Math.* 59, 5 (2006), 626–687.
- [15] GUO, Y. Decay and continuity of the Boltzmann equation in bounded domains. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 197, 3 (2010), 713–809.
- [16] MOUHOT, C. Explicit coercivity estimates for the linearized Boltzmann and Landau operators. *Comm. Partial Differential Equations* 31, 7-9 (2006), 1321–1348.

- [17] MOUHOT, C., AND NEUMANN, L. Quantitative perturbative study of convergence to equilibrium for collisional kinetic models in the torus. *Nonlinearity* 19, 4 (2006), 969–998.
- [18] UKAI, S. On the existence of global solutions of mixed problem for non-linear Boltzmann equation. *Proc. Japan Acad.* 50 (1974), 179–184.
- [19] YU, H. Global classical solutions of the Boltzmann equation near Maxwellians. *Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed.* 26, 3 (2006), 491–501.

MARC BRIANT

SORBONNE UNIVERSITÉS, UPMC UNIV. PARIS 06/ CNRS  
UMR 7598, LABORATOIRE JACQUES-LOUIS LIONS,  
F-75005, PARIS, FRANCE

E-MAIL: [briant.maths@gmail.com](mailto:briant.maths@gmail.com)