Séminaire Laurent Schwartz

EDP et applications

Année 2014-2015

Laurent Desvillettes

Structure entropique du noyau de collision de Landau

Séminaire Laurent Schwartz — EDP et applications (2014-2015), Exposé n° XIV, 9 p.

<http://slsedp.cedram.org/item?id=SLSEDP_2014-2015____A14_0>

© Institut des hautes études scientifiques & Centre de mathématiques Laurent Schwartz, École polytechnique, 2014-2015.

Cet article est mis à disposition selon les termes de la licence CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION – PAS DE MODIFICATION 3.0 FRANCE.
http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/fr/

Institut des hautes études scientifiques
Le Bois-Marie • Route de Chartres
F-91440 BURES-SUR-YVETTE
http://www.ihes.fr/

Centre de mathématiques Laurent Schwartz
UMR 7640 CNRS/École polytechnique
F-91128 PALAISEAU CEDEX
http://www.math.polytechnique.fr/

cedram

Exposé mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
http://www.cedram.org/

Séminaire Laurent-Schwartz — EDP et applications
Centre de mathématiques Laurent Schwartz, 2014-2015
Exposé n° XIV, 1-9

STRUCTURE ENTROPIQUE DU NOYAU DE COLLISION DE LANDAU

L. DESVILLETTES

Résumé. On présente des résultats permettant de mieux comprendre la structure du noyau de collision de Landau original (celui correspondant aux collisions entre particules chargées dans un plasma). À partir d'une estimation de la production d'entropie du noyau, on obtient des résultats pour l'équation de Landau homogène avec potentiel coulombien, qui concernent la régularité et le comportement asymptotique lorsque $|v| \to +\infty$.

1. Noyau de collision

Le noyau de collision de Landau a été introduit en 1936 par L. Landau (cf. [17]) pour traiter les collisions rasantes qui sont dominantes lorsque l'on s'intéresse aux particules chargées présentes dans un plasma. Il s'écrit sous la forme

$$Q_{\mathrm{Lan},|\cdot|^{-1}}(f)(v) = \nabla \cdot \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} a(v-w)\, \big(f(w)\, \nabla f(v) - f(v)\, \nabla f(w) \big)\, dw \right\}, \tag{1}$$

où $f := f(v) \geq 0$ est la densité de particules chargées de vitesse $v \in \mathbb{R}^3$, et

$$a_{ij}(z) := \Pi_{ij}(z)\, \psi(|z|), \tag{2}$$

où $\psi(|z|) = |z|^{-1}$ et

$$\Pi_{ij}(z) := \delta_{ij} - \frac{z_i z_j}{|z|^2} \tag{3}$$

est la i,j-ième composante de la projection orthogonale Π sur l'hyperplan $z^{\perp} := \{y \,/\, y \cdot z = 0\}$.

Il est d'usage de considérer qu'il s'agit d'un cas particulier d'un noyau plus général de même forme, noté $Q_{\mathrm{Lan},\psi}$, où $\psi := \psi(|v|) \geq 0$ est une fonction quelconque. Ce noyau généralisé (encore appelé noyau de Landau) décrit l'action des collisions rasantes pour des particules qui interagissent sous l'effet d'une interaction qui n'est pas nécessairement celle de Coulomb. On l'obtient (de manière rigoureuse) à partir d'une asymptotique du noyau de Boltzmann de la théorie cinétique des gaz raréfiés (cf. [5]), écrite ici dans le cas particulier où la section efficace de collision est un produit tensoriel (d'une fonction de la vitesse relative et d'une fonction d'une variable angulaire) :

$$\begin{aligned} Q^{\varepsilon}_{\mathrm{Bol},\psi}(f)(v) &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} \left[f\Big(\frac{v+w}{2} + \frac{|v-w|}{2}\,\sigma\Big)\, f\Big(\frac{v+w}{2} - \frac{|v-w|}{2}\,\sigma\Big) - f(v)\, f(w) \right] \\ &\qquad |v-w|^{-2}\, \psi(|v-w|) b_{\varepsilon}\Big(\widehat{\frac{v-w}{|v-w|}, \sigma}\Big)\, d\sigma\, dw, \end{aligned} \tag{4}$$

avec b_{ε} (partie angulaire de la section efficace) paire, étendue à $\mathbb{R}$ par 0, et concentrée au point 0, au sens suivant :

$$b_{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon^{-3}\, b\,(\omega/\varepsilon)\,.$$

Lorsque $\varepsilon \to 0$, on peut vérifier que $Q^{\varepsilon}_{\mathrm{Bol}}(f)(v) \quad \to \quad Q_{\mathrm{Lan},\psi}(f)(v)$, où ψ est la fonction qui, à une constante multiplicative (non nulle) près, est celle apparaissant dans (2). On réfère à [6], [11], [9], [3], pour des précisions sur cette asymptotique.

Lorsque l'on considère des interactions correspondant à une force en r^{-s}, $s > 1$, on peut vérifier que $|v-w|^{-2}\,\psi(|v-w|)$ est proportionnel à $|v-w|^{\frac{s-5}{s-1}}$ (cf. [5]). Il est traditionnel de classifier les noyaux de collision de Boltzmann en fonction du paramètre $\gamma = \frac{s-5}{s-1} \in \,]-\infty, 1[$, et de conserver la classification correspondante pour l'équation de Landau. En écrivant $\psi(|z|) = |z|^{\gamma+2}$, on parle de *potentiels durs* lorsque $\gamma \in \,]0,1[$, de *molécules maxwelliennes* lorsque $\gamma = 0$, de *potentiels modérément mous* lorsque $\gamma \in [-2, 0[$, et de *potentiels très mous* lorsque $\gamma \in \,]-4,-2[$ (ce qui inclut le cas coulombien $\gamma = -3$ le plus intéressant pour la physique).

Le noyau de Landau (général, avec $\psi \geq 0$ quelconque) peut également s'écrire sous une forme plus familière pour les spécialistes d'EDP paraboliques :

$$Q_{\mathrm{Lan},\psi}(f) = \nabla \cdot \Big((a * f)\, \nabla f - (b * f)\, f \Big), \tag{5}$$

où

$$a_{ij}(z) = \left[\delta_{ij} - \frac{z_i z_j}{|z|^2} \right] \psi(|z|), \tag{6}$$

$$b_i(z) = \sum_{j=1}^{3} \partial_j a_{ij}(z) = -2\, \frac{z_i}{|z|^2}\, \psi(|z|). \tag{7}$$

Dans le cas particulier des potentiels coulombiens ($\gamma = -3$), on peut aussi écrire

$$Q_{\mathrm{Lan},|\cdot|^{-1}}(f) = (a * f) \,:\, \nabla\nabla f + 8\pi\, f^2. \tag{8}$$

2. Forme faible du noyau de Landau et applications

En utilisant une fonction-test $\varphi := \varphi(v)$ (très régulière et décroissant suffisamment à l'infini), on montre formellement que le noyau (1) (avec section efficace ψ quelconque) peut s'écrire sous la forme faible suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} Q_{\mathrm{Lan},\psi}(f)(v)\, \varphi(v)\, dv \qquad & \\ = -\frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} & f(v)\, f(w) \psi(|v-w|) \\ & \Big(\frac{\nabla f(v)}{f(v)} - \frac{\nabla f(w)}{f(w)} \Big)^T \Pi(v-w) \Big(\nabla\varphi(v) - \nabla\varphi(w) \Big)\, dv dw. \end{aligned} \tag{9}$$

Il suffit pour cela d'effectuer une intégration par parties et d'utiliser la symétrie $(v,w) \mapsto (w,v)$.

À partir de (9), en considérant $\varphi(v) = 1, v_i, |v|^2/2$, on obtient, toujours formellement, les propriétés de conservation de la masse, de l'impulsion et de l'énergie du noyau de Landau, qui sont en fait héritées des propriétés (similaires) du noyau de Boltzmann :

$$\int_{\mathbb{R}^3} Q_{\mathrm{Lan},\psi}(f)(v) \begin{pmatrix} 1 \\ v_i \\ |v|^2/2 \end{pmatrix} dv = 0. \tag{10}$$

En utilisant $\varphi(v) = \ln f(v)$ dans (9), on obtient la positivité de la production d'entropie :

$$(11)\quad D_{\mathrm{Lan},\psi}(f) := -\int_{\mathbb{R}^3} Q_{\mathrm{Lan},\psi}(f)(v)\ln f(v)\,dv = \frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} f(v)\,f(w)\,\psi(|v-w|) \left(\frac{\nabla f}{f}(v) - \frac{\nabla f}{f}(w)\right)^T \Pi(v-w)\left(\frac{\nabla f}{f}(v) - \frac{\nabla f}{f}(w)\right) dvdw \geq 0.$$

Il s'agit de la première partie du théorème H de Boltzmann pour l'équation de Landau, elle aussi héritée d'une propriété similaire de l'équation de Boltzmann.

Une seconde formulation faible, issue de la forme parabolique du noyau de Landau, s'écrit également de manière naturelle, au niveau formel, pour toute fonction-test $\varphi := \varphi(v)$ (très régulière et décroissant suffisamment à l'infini) :

$$(12)\quad \int_{\mathbb{R}^3} Q_{\mathrm{Lan},\psi}(f)(v)\,\varphi(v)\,dv = \frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} f(v)\,f(w)\,a(v-w) : \Big(\nabla\nabla\varphi(v) + \nabla\nabla\varphi(w)\Big)\,dvdw + \frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} f(v)\,f(w)\,b(v-w)\cdot\Big(\nabla\varphi(v) - \nabla\varphi(w)\Big)\,dvdw.$$

Il est moins immédiat de déduire les propriétés principales du noyau de Landau à partir de cette formulation. Elle a par contre l'intérêt de faire comprendre les difficultés mathématiques que l'on s'attend à rencontrer lorsque l'on souhaite traiter des potentiels très mous.

3. L'équation de Landau spatialement homogène

Lorsque $f := f(t,x,v)$ est la densité de particules chargées (dans un plasma) qui au temps t et au point x possèdent la vitesse v, on s'attend (en l'absence de prise en compte des champs) à ce que f vérifie l'équation de Landau spatialement inhomogène :

$$(13)\quad \frac{\partial f}{\partial t}(t,x,v) + v\cdot\nabla_x f(t,x,v) = Q_{\mathrm{Lan},|\cdot|^{-1}}(f(t,x,\cdot),f(t,x,\cdot))(v).$$

Plusieurs travaux mathématiques récents concernent cette équation. En particulier on connaît des solutions régulières dans des régimes perturbatifs (cf. [16]), et des solutions renormalisées avec mesure de défaut dans des régimes généraux (cf. [18], [3]).

On s'intéresse plus particulièrement ici au cas spatialement homogène (avec une section efficace générale ψ), dans lequel $f := f(t,v)$, et l'équation (13) s'écrit simplement

$$(14)\quad \frac{\partial f}{\partial t}(t,v) = Q_{\mathrm{Lan},\psi}(f(t,\cdot),f(t,\cdot))(v).$$

On commence par observer que les propriétés de conservation du noyau (10) deviennent (formellement) pour $f := f(t,v)$ solution de (14),

$$(15)\quad \int_{\mathbb{R}^3} f(t,v)\begin{pmatrix}1\\ v_i\\ |v|^2/2\end{pmatrix} dv = \int_{\mathbb{R}^3} f(0,v)\begin{pmatrix}1\\ v_i\\ |v|^2/2\end{pmatrix} dv.$$

De même, si on note $H(f) := \int_{\mathbb{R}^3} f(v)\ln f(v)\,dv$ l'entropie d'une fonction $f := f(v) \geq 0$, la première partie du Théorème H de Boltzmann devient

$$(16)\quad \frac{d}{dt}H(f(t,\cdot)) = -D_{\mathrm{Lan},\psi}(f(t,\cdot)) \leq 0.$$

On déduit de ces propriétés les estimations *a priori* issues de la physique pour les solutions de l'équation de Landau homogène dont la masse, l'énergie et l'entropie initiales sont finies :

$$\sup_{t\in[0,T]} \int_{\mathbb{R}^3} f(t,v) \Big(1 + \frac{|v|^2}{2} + |\ln f(t,v)|\Big)\, dv + \int_0^T D_{\mathrm{Lan},\psi}(f(t,\cdot))\, dt \le C(T, \mathcal{M}_{\mathrm{in}}), \tag{17}$$

où

$$\mathcal{M}_{\mathrm{in}} := \int_{\mathbb{R}^3} f(0,v) \Big(1 + \frac{|v|^2}{2} + |\ln(f(0,v))|\Big)\, dv. \tag{18}$$

On voit donc que si l'on n'utilise pas la production d'entropie, on doit donner un sens à la formulation faible de l'équation de Landau (par exemple celle qui est basée sur (12)) en supposant seulement que (pour $T > 0$ donné)

$$f \in L^\infty([0,T]; L\,\ln L \cap L^1_2(\mathbb{R}^3))$$

(où l'on note L^1_q les fonctions possédant q moments finis dans L^1). Or pour $\psi(|z|) = |z|^{\gamma+2}$, le terme

$$\iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} f(t,v)\, f(t,w)\, a_{ij}(v-w)\, \Big(\partial_{ij}\varphi(v) + \partial_{ij}\varphi(w)\Big)\, dvdw, \tag{19}$$

issu de (12), se comporte comme

$$\iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} f(t,v)\, f(t,w)\, |v-w|^{\gamma+2}\, dvdw, \tag{20}$$

qui n'est défini (pour $f \in L^\infty([0,T]; L\,\ln L \cap L^1_2(\mathbb{R}^3))$) que lorsque $\gamma + 2 \ge 0$ (potentiels durs, molécules maxwelliennes ou potentiels modérément mous), ce qui exclut les potentiels très mous ($\gamma \in\,]-4,-2[$) et en particulier le cas coulombien ($\gamma = -3$).

On comprend donc que la théorie mathématique soit d'autant plus développée que γ est grand.

Lorsque $\gamma \in\,]0,1[$ (potentiels durs), on réfère à [12] ainsi qu'aux papiers récents [7], [8], et [19]. On montre que sous des hypothèses raisonnables sur la donnée initiale, il y a création de moments et de crans de régularité pour les solutions de l'équation correspondante, qui existent et sont uniques.

Lorsque $\gamma = 0$ (molécules maxwelliennes) ou $\gamma \in [-2,0[$ (potentiels modérément mous), les moments sont propagés et non créés, il y a par contre toujours création de crans de régularité, et existence et unicité pour des conditions initiales raisonnables (cf. [21] pour les molécules maxwelliennes, et [15], [22] pour les potentiels modérément mous).

Dans le cas du potentiel coulombien, ou plus généralement pour les potentiels très mous, la théorie mathématique de l'équation de Landau est beaucoup moins évoluée. On connaît des solutions fortes globales dans des contextes inhomogènes perturbatifs (cf. [16]) ou des solutions renormalisées avec mesure de défaut dans des contextes inhomogènes généraux (cf. [3], [18]). Pour ce qui concerne la théorie spatialement homogène, on dispose de solutions régulières locales en temps [2], qui sont uniques [14]. Le premier résultat d'existence de solutions globales (sans renormalisation, et pour des données initiales générales) est dû à Villani ([20]), il concerne des solutions appelées « H-solutions ». Dans cette théorie, on utilise l'estimation sur la production d'entropie :

$$\int_0^T D_{\mathrm{Lan},\psi}(f(t,\cdot))\, dt \le Cst, \tag{21}$$

pour lever les difficultés liées à la définition de (20). Plus précisément, on montre que les termes apparaissant dans la formulation faible (9) peuvent être contrôlés par une expression faisant intervenir la dissipation d'entropie $D_{\mathrm{Lan},\psi}(f)$, écrite sous la forme

$$(22)\qquad D_{\mathrm{Lan},\psi}(f) = 2 \iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \psi(|v-w|) \left|\Pi \left[(\nabla_v - \nabla_w) \sqrt{f(v)\, f(w)} \right] \right|^2 dvdw.$$

Un des objectifs de ce travail est de montrer que ces H-solutions peuvent en fait être vues comme des solutions faibles traditionnelles, car il se trouve que la dissipation d'entropie $D_{Lan}(f)$ contrôle des normes L^p (avec poids) pour un p qui permet de donner un sens à (12).

4. Estimation de la production d'entropie : cas déjà connus

Il existe déjà de nombreux cas (dans la théorie des équations cinétiques) dans lesquels on sait montrer que la production d'entropie contrôle des quantités relatives à la régularité de f. On donne ici deux exemples qui ont un lien direct avec les résultats que l'on souhaite présenter.

Lorsque l'on s'intéresse à l'équation de Boltzmann (4), si l'on suppose que la partie angulaire de la section efficace est singulière (on dit alors que le noyau de Boltzmann est « sans cutoff angulaire ») on connaît une estimation (cf. [1]) qui lie la dissipation d'entropie et une norme de Sobolev fractionnaire de $\sqrt{f}$ sur toute boule $B(0,R)$ de $\mathbb{R}^3$. Ainsi, sous l'hypothèse (physiquement réaliste pour certains choix de α et γ définis ci-dessous)

$$(23)\qquad b(|\theta|) \sim_{\theta\to 0} |\theta|^{-1-\alpha}, \qquad \cos\theta = \frac{v-w}{|v-w|}\cdot\sigma, \qquad \alpha \in]0,2[$$

$$(24)\qquad |z|^{-2}\,\psi(z) \sim_{z\to\infty} |z|^{\gamma}, \qquad \gamma \in]0,1[,$$

la dissipation d'entropie

$$(25)\qquad D_{\mathrm{Bol}}(f) = -\int_{\mathbb{R}^3} Q_{\mathrm{Bol}}(f,f)(v)\, \ln f(v)\, dv,$$

$$= \frac{1}{4} \iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \int_{S^2} \left\{ f\left(\frac{v+w}{2} + \frac{|v-w|}{2}\sigma\right) f\left(\frac{v+w}{2} - \frac{|v-w|}{2}\sigma\right) - f(v)\, f(w) \right\}$$
$$\times \left\{ \ln\!\Big(f\left(\frac{v+w}{2} + \frac{|v-w|}{2}\sigma\right) f\left(\frac{v+w}{2} - \frac{|v-w|}{2}\sigma\right)\Big) - \ln(f(v)\, f(w)) \right\}$$
$$\times\ |v-w|^{-2}\, \psi(|v-w|)\, b(|\theta|)\, d\sigma dv dw$$

vérifie

$$(26)\qquad \|f\|_{L^1_2} + D_{\mathrm{Bol},\psi}(f) \geq C(f,R)\, \|\sqrt{f}\|^2_{H^{\alpha/2}(B(0,R))},$$

où $C(f,R)$ dépend uniquement de la masse, de l'énergie et de l'entropie (ou plus précisément, d'un majorant de l'entropie) de f.

Une estimation analogue est connue pour l'équation de Landau avec molécules maxwelliennes (cf. [13]). On peut l'écrire, lorsque f est normalisée (i.-e. lorsque $\int f\, dv = 1$, $\int f\, v\, dv = 0$, $\int f\, |v|^2\, dv = 3$) sous la forme

$$(27)\qquad D_{\mathrm{Lan},|\cdot|^2}(f) \geq C(f) \int_{\mathbb{R}^3} f(v) \left| \frac{\nabla f}{f}(v) + v \right|^2 dv,$$

où le terme de droite dans l'inégalité n'est autre que l'information de Fisher relative de f par rapport à $M(v) := (2\pi)^{-3/2}\, e^{-|v|^2/2}$, et $C(f)$ dépend uniquement de l'entropie (ou plus précisément, d'un majorant de l'entropie) de f. Cette inégalité fonctionnelle est utilisée non pour l'étude de la régularité des solutions de l'équation de Landau spatialement homogène avec molécules maxwelliennes (qui est bien connue par ailleurs) mais pour l'étude de leur comportement en temps grand. En effet, combinée avec l'inégalité de Sobolev logarithmique de Gross, elle fournit une inégalité fonctionnelle de type entropie-dissipation d'entropie :

$$D_{\mathrm{Lan},|\cdot|^2}(f) \geq C(f)\,\big(H(f) - H(M)\big), \tag{28}$$

ce qui implique la convergence exponentiellement rapide vers l'équilibre pour les solutions de l'équation de Landau spatialement homogène avec molécules maxwelliennes.

L'inégalité (27) peut être prouvée à partir d'un calcul explicite, dans lequel on montre que

$$Q_{\mathrm{Lan},\,|\cdot|^2}(f,f)(v) = 3\,\nabla\cdot(\nabla f + v\,f) - (P : \nabla^2 f + \nabla\cdot(v\,f)) + \Delta_{\theta\,\phi} f \tag{29}$$

où P est la matrice de pression

$$P_{ij} := \int_{\mathbb{R}^3} f(v)\,v_i\,v_j\,dv, \tag{30}$$

dont les valeurs propres sont appelées températures directionnelles, notées $(T_i)_{i=1,..N}$, et $\Delta_{\theta\,\phi}$ est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur la sphère.

Il existe également une seconde preuve, moins explicite, qui s'avère suffisamment robuste pour pouvoir être étendue (avec néanmoins de nombreuses modifications) à d'autres sections efficaces que les molécules maxwelliennes. Dans cette seconde preuve, on observe que

$$D_{\mathrm{Lan},\,|\cdot|^2}(f) = \frac{1}{4}\sum_{i,j=1,..,3}\int\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} f(v)\,f(w)\,\left|q^f_{ij}(v,w)\right|^2 dvdw, \tag{31}$$

où $q^f_{ij}(v,w)$ est le produit vectoriel entre $v-w$ et $\nabla\ln f(v) - \nabla\ln f(w)$ (on notera que cette quantité s'annule précisément lorsque f est une maxwellienne) :

$$q^f_{ij}(v,w) = (v_i - w_i)\left(\frac{\partial_j f}{f}(v) - \frac{\partial_j f}{f}(w)\right) - (v_j - w_j)\left(\frac{\partial_i f}{f}(v) - \frac{\partial_i f}{f}(w)\right). \tag{32}$$

Le coeur de la preuve consiste en l'inversion de cette formule : au lieu d'exprimer q^f_{ij} en fonction de $\nabla\ln f$, on exprime $\nabla\ln f$ en fonction de q^f_{ij}.

Plus précisément, pour tout $i \neq j$,

$$\frac{\partial_i f(v)}{f(v)} = \frac{\mathrm{Det}\left(\int_{\mathbb{R}^3} f(w)\begin{bmatrix} 1 & q^f_{ij}(v,w) & w_i \\ w_i & q^f_{ij}(v,w)\,w_i + (v_j - w_j) & w_i^2 \\ w_j & q^f_{ij}(v,w)\,w_j - (v_i - w_i) & w_i\,w_j \end{bmatrix} dw\right)}{\mathrm{Det}\left(\int_{\mathbb{R}^3} f(w)\begin{bmatrix} 1 & w_j & w_i \\ w_i & w_j\,w_i & w_i^2 \\ w_j & w_j^2 & w_i\,w_j \end{bmatrix} dw\right)}. \tag{33}$$

Il reste à estimer cette dernière quantité. On peut vérifier (en utilisant la normalisation de f) que

$$\begin{aligned} \frac{\partial_i f(v)}{f(v)} &= \frac{\mathrm{Det}\left(\begin{bmatrix} 1 & \int q^f_{ij}(v,w)\,dw & 0 \\ 0 & \int q^f_{ij}(v,w)\,w_i\,dw + v_j & P_{ii} \\ 0 & \int q^f_{ij}(v,w)\,w_j\,dw - v_i & P_{ij} \end{bmatrix}\right)}{\mathrm{Det}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & P_{ij} & P_{ii} \\ 0 & P_{jj} & P_{ij} \end{bmatrix}\right)} \\ &= \frac{P_{ij}\left(\int q^f_{ij}(v,w)\,w_i\,dw + v_j\right) - P_{ii}\left(\int q^f_{ij}(v,w)\,w_j\,dw - v_i\right)}{T_i\,T_j}, \end{aligned} \tag{34}$$

si bien qu'un point central de la preuve consiste à montrer que les températures directionnelles T_i sont bornées inférieurement.

5. Estimation d'entropie : cas du noyau de Landau avec potentiel coulombien

On présente maintenant une estimation nouvelle (cf. [10]) qui permet d'obtenir dans le cas des potentiels coulombiens une estimation d'entropie analogue à (27), dont on rappelle qu'elle est valide dans le cas des molécules maxwelliennes. Cette estimation peut en fait être généralisée à un grand nombre de sections efficaces incluant tous les potentiels très mous (cf. [10]). Elle s'écrit de la manière suivante :

Proposition. *Pour tout $f \geq 0$, on a*

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \sqrt{f(v)}|^2 \,(1+|v|^2)^{-3/2}\, dv \leq C\,(1 + D_{\mathrm{Lan},\,|\cdot|^{-1}}(f)), \tag{35}$$

où $C := C\Big(\int f\, dv, \int f\, v\, dv, \int f\, |v|^2/2\, dv, \int f\, \ln f\, dv\Big)$ est une constante que l'on peut expliciter et qui ne dépend que de la masse, l'impulsion, l'énergie et de l'entropie (ou plus précisément, d'un majorant de l'entropie) de f.

La constante C peut être estimée dans le cas particulier où f est radialement symétrique et vérifie la normalisation

$$\int f(v)\, dv = 1, \qquad \int f(v)\, v\, dv = 0, \qquad \int f|v|^2\, dv = 3,$$

par des nombres « raisonnables » :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} &|\nabla \sqrt{f(v)}|^2 \,(1+|v|^2)^{-3/2}\, dv \\ &\leq 108 \times 13^{3/2} \left(\frac{16\pi}{3}\right)^{4/3} \exp\left(\frac{16}{3}\,\bar{H}\right) \left(2 + \frac{128}{3}\, D_{\mathrm{Lan},\,|\cdot|^{-1}}(f)\right),\end{aligned} \tag{36}$$

où $\bar{H}$ est un majorant de l'entropie $H(f) = \int f\, \ln f\, dv$.

Le poids $(1+|v|^2)^{-3/2}$ qui apparaît dans l'estimation (35) est sans doute inévitable (il est cohérent avec d'autres estimations connues pour le noyau de Landau avec potentiel coulombien). Il reflète une perte de coercivité pour les grandes vitesses, que l'on peut aussi observer dans le cas de l'équation de Boltzmann sans cutoff avec potentiels mous.

L'idée de la preuve consiste à modifier les formules du cas « molécules maxwelliennes », en introduisant un poids Gaussien dans les intégrales :

$$D_{\mathrm{Lan},|\cdot|^{-1}}(f) = \frac{1}{4} \sum_{i,j=1,..,3} \int\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} f(v)\, f(w)\, |v-w|^{-3} \left| q^f_{ij}(v,w) \right|^2 \, dvdw, \tag{37}$$

et (pour tout $i \neq j$, $\lambda > 0$)

$$\frac{\partial_i f(v)}{f(v)} = \frac{\mathrm{Det}\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\lambda w^2} f(w) \begin{bmatrix} 1 & q^f_{ij} & w_i \\ w_i & q^f_{ij}\, w_i + (v_j - w_j) + O(\lambda) & w_i^2 \\ w_j & q^f_{ij}\, w_j - (v_i - w_i) + O(\lambda) & w_i\, w_j \end{bmatrix} dw \right)}{\mathrm{Det}\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\lambda w^2}\, f(w) \begin{bmatrix} 1 & w_j & w_i \\ w_i & w_j\, w_i & w_i^2 \\ w_j & w_j^2 & w_i\, w_j \end{bmatrix} dw \right)}. \tag{38}$$

6. Applications

Grâce à l'inégalité d'entropie (35), il est possible de montrer que les H-solutions possèdent une certaine régularité (et peuvent être considérées comme des solutions faibles habituelles) :

Proposition. *Soit* $f_{\rm in} := f_{\rm in}(v) \geq 0$ *une donnée initiale dans* $L^1_2 \cap L\,\ln L(\mathbb{R}^3)$, *et* f *une H-solution dans* $L^\infty(\mathbb{R}_+;\, L^1_2(\mathbb{R}^3))$ *de l'équation de Landau spatialement homogène dans le cas coulombien.*

Alors $\sqrt{f} \in L^2(\mathbb{R}_+;\, H^1_{-3}(\mathbb{R}^3))$ *(où* H^1_q *désigne les fonctions* f *telles que* $|f|^2$ *et* $|\nabla f|^2$ *appartiennent à* L^1_q*), si bien que* $f \in L^1(\mathbb{R}_+;\, L^3_{-3}(\mathbb{R}^3))$*, et* f *est une solution faible de l'équation de Landau.*

Cette proposition est une conséquence directe de l'estimation (35) appliquée à la solution au temps t de l'équation de Landau avec potentiel coulombien $f(t,\cdot)$, et de l'estimation de la production d'entropie de f dans L^1 en temps :

$$\int_0^T D_{\mathrm{Lan},|\cdot|^{-1}}(f(t,\cdot))\, dt < +\infty. \tag{39}$$

En effet on déduit de ces estimations que

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \sqrt{f(t,v)}|^2\, (1+|v|^2)^{-3/2}\, dvdt < +\infty, \tag{40}$$

et on conclut en utilisant une injection de Sobolev que

$$\int_0^T \Big(\int_{\mathbb{R}^3} |f(v)|^3\, (1+|v|^2)^{-9/2}\, dv \Big)^{1/3} dt < +\infty. \tag{41}$$

On se convainc que f est une solution faible de l'équation de Landau en observant que d'après (41),

$$\int_0^T \iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} f(t,v)\, f(t,w)\, |v-w|^{-1} dvdwdt < +\infty, \tag{42}$$

si bien que (12) a un sens.

On peut également démontrer à partir de (35) que les moments polynomiaux de n'importe quel ordre sont propagés pour l'équation de Landau avec potentiel coulombien :

Proposition. *Soit* $f_{\rm in} := f_{\rm in}(v) \geq 0$ *une donnée initiale dans* $L^1_k \cap L\,\ln L(\mathbb{R}^3)$, $k \geq 1$, *et* f *une H-solution dans* $L^\infty(\mathbb{R}_+;\, L^1_2(\mathbb{R}^3))$ *de l'équation de Landau spatialement homogène dans le cas coulombien.*

Alors $f \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+;\, L^1_k(\mathbb{R}^3))$.

On peut se convaincre qu'une proposition similaire est valable pour les potentiels très mous lorsque $\gamma \in]-2\sqrt{3}, -2[$. Une communication récente (cf. [4]) précise ce résultat en donnant des estimations en temps grand des moments, et en généralisant à tous les potentiels très mous.

Certains des résultats de [22] relatifs aux potentiels modérément mous peuvent être retrouvés grâce à l'estimation (35), par contre il n'y a pas pour l'instant de résultats permettant de prouver la propagation/création de régularité (au delà de $f \in L^1(\mathbb{R}_+;\, L^3_{loc}(\mathbb{R}^3))$) dans le cas coulombien (ou plus généralement lorsque $\gamma < -2$). En particulier on ne sait pas montrer l'unicité des H-solutions dans le cas coulombien, car celle-ci est connue seulement lorsque $f \in L^1(\mathbb{R}_+;\, L^\infty(\mathbb{R}^3))$ (cf. [14]).

Une direction de recherche prometteuse consiste à utiliser l'estimation (35) dans le cadre de l'étude du comportement en temps grand de l'équation de Landau (dans le cas coulombien). Un travail en commun avec Kleber Carrapatoso est en cours sur ce thème.

Références

[1] R. Alexandre, L. Desvillettes, C. Villani and B. Wennberg. Entropy dissipation and long-range interactions. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **152**, (2000), 327-355.

[2] R. Alexandre, J. Liao, and C. Lin. Some a priori estimates for the homogeneous Landau equation with soft potentials. `arXiv:1302.1814`.

[3] R. Alexandre, and C. Villani. On the Landau approximation in plasma physics. *Annales Inst. Henri Poincaré, (C) Analyse non-linéaire*, **21** n.1 (2004), 61-95.

[4] K. Carrapatoso and L. He. Personal Communication.

[5] C. Cercignani. *The Boltzmann equation and its applications.* Springer, New York, 1988.

[6] S. Chapman and T.G. Cowling. *The mathematical theory of non–uniform gases.* Cambridge Univ. Press, London, 1952.

[7] H. Chen, W.-X. Li, C.-J. Xu. Propagation of Gevrey regularity for solutions of Landau equations, *Kinetic and Related Models*, **1** n.3 (2008), 355–368.

[8] H. Chen, W.-X. Li, C.-J. Xu. Analytic smoothness effect of solutions for spatially homogeneous Landau equation, *J. Differ. Equations*, **248**, (2010), 77–94.

[9] P. Degond, B. Lucquin-Desreux. The Fokker-Planck asymptotics of the Boltzmann collision operator in the Coulomb case. *Math. Mod. Meth. Appl. Sci.*, **2** n.2 (1992), 167–182.

[10] L. Desvillettes. Entropy dissipation estimates for the Landau equation in the Coulomb case and applications `arXiv:1408.6025`.

[11] L. Desvillettes. On asymptotics of the Boltzmann equation when the collisions become grazing. *Transport Theory Statist. Phys.*, **21**, n.3 (1992), 259–276.

[12] L. Desvillettes and C. Villani. On the spatially homogeneous Landau equation for hard potentials. Part I. Existence, uniqueness and smoothness. *Commun. Partial Differential Equations*, **25**, n.1-2 (2000), 179-259.

[13] L. Desvillettes and C. Villani. On the spatially homogeneous Landau equation for hard potentials. Part II. H-Theorem and applications. *Commun. Partial Differential Equations*, **25**, n.1-2 (2000), 261-298.

[14] N. Fournier. Uniqueness of bounded solutions for the homogeneous Landau equation with a Coulomb potential. *Commun. Math. Phys.*, **299**, (2010), 765–782.

[15] N. Fournier, H. Guérin. Well-posedness of the spatially homogeneous Landau equation for soft potentials. *J. Funct. Anal.*, **25**, n.8, (2009), 2542–2560.

[16] Y. Guo. The Landau Equation in a Periodic Box. *Comm. Math. Phys.*, **231**, n.3, (2002), 391-434.

[17] E.M. Lifschitz and L.P. Pitaevskii. *Physical kinetics.* Pergamon Press., Oxford, 1981.

[18] P.L. Lions. On Boltzmann and Landau equations. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, **346**, (1994), 191–204.

[19] Y. Morimoto, K. Pravda-Starov and C.-J. Xu. A remark on the ultra-analytic smoothing properties of the spatially homogeneous Landau equation. *Kinet. Relat. Models*, **6**, n.4 (2013), 715–727.

[20] C. Villani. On a new class of weak solutions to the spatially homogeneous Boltzmann and Landau equations. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **143** n.3, (1998), 273–307.

[21] C. Villani. On the spatially homogeneous Landau equation for Maxwellian molecules. *Math. Meth. Mod. Appl. Sci.* **8** n.6, (1998), 957–983.

[22] K.-C. Wu. Global in time estimates for the spatially homogeneous Landau equation with soft potentials. *J. Funct. Anal.*, **266**, (2014), 3134-3155.

CMLA, ENS Cachan, CNRS, 61, avenue du Président Wilson, F-94230 Cachan, France

E-mail address: `desville@cmla.ens-cachan.fr`